OCTAVA EDICIÓN

ÁLGEBRA

JEROME E. KAUFMANN ▮ KAREN L. SCHWITTERS

Incluye CD

OCTAVA EDICIÓN

Álgebra

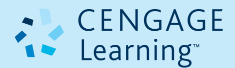
Jerome E. Kaufmann

Karen L. Schwitters
Seminole Community College

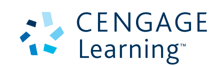
Traducción:
Víctor Campos Olguín
Traductor profesional

Germán Humberto Ramírez Calderón
Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional
Jefe de Área de Matemáticas
Colegio Gimnasio Los Caobos
Chía-Colombia

Revisión técnica:
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Universidad La Salle Morelia



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Álgebra, Octava edición
Kaufmann, Jerome E. /
Schwitters, Karen L.

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Ilustración:
Network Graphics and G&S Typesetters

Diseño de portada:
Lisa Henry

Imagen de portada:
Doug Smock/Getty Images

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Traducido del libro:
Algebra for College Students, Eighth ed.
Kaufmann, Jerome E. / Schwitters, Karen L.
Publicado en inglés por Brooks/Cole/Cengage Learning. © 2007
ISBN-13: 978-0-495-10510-7
ISBN-10: 0-495-10510-4

Datos para catalogación bibliográfica:
Álgebra, Octava Edición
Kaufmann, Jerome E. / Schwitters, Karen L.
ISBN 13: 978-607-519-033-4

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 13 12 11 10

Contenido

Capítulo 4 Expresiones racionales 165

Capítulo 5 Exponentes y radicales 224

Capítulo 6 Ecuaciones cuadráticas y desigualdades 278

Capítulo 7 Ecuaciones lineales y desigualdades con dos variables 333

Capítulo 8 Funciones 391

Capítulo 9 Funciones polinomiales y racionales 463

Capítulo 10 Funciones exponencial y logarítmica 520

Capítulo 15 Técnicas de conteo, probabilidad y teorema del binomio 768

Prefacio

Álgebra, *Octava Edición*, abarca temas que por lo general se asocian con álgebra intermedia y álgebra universitaria. Este texto se puede usar en un curso de un semestre, pero contiene material suficiente para abarcar una secuencia de dos semestres.

En este libro se presentan los conceptos básicos del álgebra en una forma simple y clara. Las ideas algebraicas se desarrollan en una secuencia lógica y en una forma fácil de leer, sin excesivo formalismo. Los conceptos se despliegan a través de ejemplos, se refuerzan con ejemplos adicionales y luego se aplican a una variedad de situaciones para resolver problemas. Los ejemplos muestran a los estudiantes cómo usar los conceptos algebraicos para resolver problemas en una gama diversa de situaciones, y en los conjuntos de problemas, para que los estudiantes razonen, se proporcionan otros contextos. En los ejemplos se alienta a los estudiantes a organizar su trabajo y decidir cuándo se puede usar un atajo significativo.

Al preparar esta edición se realizó un esfuerzo especial por incorporar las ideas sugeridas por revisores y usuarios de las ediciones anteriores; al mismo tiempo, se preservaron las características del libro por las cuales los usuarios muestran gran aceptación.

Lo nuevo en esta edición

- Las secciones 7.1 y 7.2 se reorganizaron de modo que en la sección 7.1 sólo se graficaron ecuaciones lineales en dos variables. Luego, en la sección 7.2, el énfasis está en la graficación de ecuaciones no lineales y el uso de gráficas para motivar las pruebas de simetría en el eje x, el eje y y el origen. Dichas pruebas de simetría se utilizan en los capítulos 8, 9, 10 y 13, y también se usarán en cursos posteriores de matemáticas conforme mejoren las habilidades de graficación de los estudiantes.
- Un punto central de cualquier revisión es el conjunto de problemas. Algunos usuarios de las ediciones anteriores sugirieron que los conjuntos de problemas, que son "muy buenos", se podrían mejorar al agregar algunos problemas en diferentes lugares. Con base en estas sugerencias se agregaron 90 nuevos problemas y se les distribuyeron en 15 diferentes conjuntos de problemas. Por ejemplo, se sugirió que en el Conjunto de problemas 6.6 se incluyera una mayor variedad de desigualdades cuadráticas. Se insertaron los nuevos problemas 37-46 para satisfacer esta solicitud. Del mismo modo, en cuatro conjuntos de problemas en el capítulo 13, "Secciones cónicas", se agregaron problemas para ayudar a los estudiantes con la transición de las formas estándar básicas de las ecuaciones de las cónicas a las formas más generales.
- En la sección 10.2, algunas de las tasas de interés compuesto cambiaron para estar más en línea con las predicciones para las tasas en el futuro cercano. Sin embargo, en la sección 10.2 y en el Conjunto de problemas 10.2 intencionalmente se usó un rango bastante amplio de tasas de interés. Al variar las tasas de interés, el número de periodos compuestos y la cantidad de tiempo, los estudiantes pueden apreciar el efecto que cada variable tiene sobre el resultado final.

- El hecho de que los logaritmos se definen sólo para números positivos no implica que las ecuaciones logarítmicas no tengan soluciones negativas. Al final de la sección 10.4 se agrega un ejemplo que muestra una ecuación logarítmica con solución negativa. También se agregaron cinco nuevas ecuaciones logarítmicas en el Conjunto de problemas 10.4, que tienen soluciones negativas o no tienen solución.
- Como solicitó un usuario de la edición anterior, se recuperó una sección acerca de fracciones parciales que apareció en algunas ediciones anteriores. Ahora es la sección 11.6 y se designa como sección opcional. No hay problemas que pertenezcan a esta sección en el Conjunto de problemas de repaso del capítulo o en el Examen de capítulo.

Otras características especiales

- A lo largo del libro se alienta a los estudiantes a: (a) aprender una habilidad, (b) usar la habilidad para ayudar a resolver ecuaciones y desigualdades y luego (c) usar las ecuaciones y desigualdades para resolver problemas verbales. Este enfoque influyó algunas de las decisiones que se tomaron para preparar y actualizar el texto.

  1. A lo largo del texto se distribuyeron aproximadamente 600 problemas verbales. Dichos problemas tratan con una gran variedad de aplicaciones que muestran la conexión entre matemáticas y su uso en el mundo real.

  2. En todo el texto se ofrecen muchas sugerencias para resolver problemas, y hay discusiones especiales en varias secciones. Cuando es adecuado, se muestran diferentes métodos para resolver el mismo problema. Las sugerencias para resolver problemas se demuestran en más de 100 ejemplos resueltos.

  3. Las habilidades recién adquiridas se usan tan pronto como sea posible para resolver ecuaciones y desigualdades que, a su vez, sirven para resolver problemas verbales. Por tanto, el concepto de resolución de ecuaciones y desigualdades se introduce temprano en el texto y se refuerza a lo largo del mismo. Los conceptos de factorización, resolución de problemas y resolución de problemas verbales se conjuntan en el capítulo 3.

- Como recomienda la American Mathematical Association of Two-Year Colleges, muchos conceptos geométricos básicos se integran en un escenario de resolución de problemas. Este texto contiene 20 ejemplos resueltos y 100 problemas que conectan álgebra, geometría y aplicaciones con el mundo real. Las siguientes secciones contienen discusiones específicas de conceptos geométricos:

  Sección 2.2: Ángulos complementarios y suplementarios; la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.
  Sección 2.4: Fórmulas de área y volumen.
  Sección 3.4: Más acerca de fórmulas de área y volumen, fórmulas de perímetro y circunferencia.
  Sección 3.7: Teorema de Pitágoras.
  Sección 6.2: Más acerca del teorema de Pitágoras, incluye trabajar con triángulos isósceles rectos y triángulos rectos de 30º a 60º.

- En los capítulos 7, 8, 9, 10 y 13 se introducen y usan ideas de graficación específicas (intersecciones, simetría, restricciones, asíntotas y transformaciones). El trabajo con parábolas de las secciones 8.3 y 8.4 se usa en la sección 8.5 para desa-

rrollar definiciones de traslaciones, reflexiones, estiramientos y encogimientos. En seguida estas transformaciones se aplican a las gráficas de

$$f(x) = x^3 \qquad f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad f(x) = |x|$$

- Los problemas llamados **Pensamientos en palabras** se incluyen en los conjuntos de problemas, excepto en los Ejercicios de repaso. Dichos problemas están diseñados para alentar a los estudiantes a expresar, en forma escrita, sus pensamientos acerca de varias ideas matemáticas. Vea, por ejemplo, los conjuntos de problemas 2.1, 3.5, 4.7, 5.5 y 6.6.
- Muchos conjuntos de problemas contienen un grupo especial de problemas llamados **Más investigación**, que se prestan para el trabajo en grupos pequeños. Dichos problemas abarcan varias ideas: algunos son pruebas, otros muestran diferentes enfoques a temas cubiertos en el texto, unos presentan temas complementarios y relaciones, y otros más son problemas más desafiantes. Aunque tales problemas agregan variedad y flexibilidad a los conjuntos de problemas, también se pueden omitir sin perturbar la continuidad del texto. Para muestra vea los conjuntos de problemas 2.3, 2.7, 3.6 y 7.4.
- En la sección 7.1 se introduce la calculadora graficadora. A partir de entonces, muchos de los conjuntos de problemas contienen un grupo de problemas llamados **Actividades con calculadora graficadora**. Dichas actividades, que son adecuadas para trabajo individual o en grupos pequeños, se diseñaron para reforzar los conceptos ya presentados y ponen los cimientos para conceptos a punto de estudiarse. En este texto el uso de la calculadora graficadora se considera opcional.
- Las fotografías y aplicaciones se usan en las aperturas de capítulo para introducir algunos conceptos que se presentan en el capítulo.
- Aprecie las características de diseño del texto excepcionalmente agradables, incluido el uso funcional del color. El formato de apertura se dirige hacia un flujo continuo y sencillo del material en lugar de trabajar a través de un laberinto de banderas, símbolos de precaución, símbolos de recordatorio, etcétera.
- *Todas* las respuestas para los conjuntos de problemas de repaso del capítulo, exámenes del capítulo y conjuntos de problemas de repaso acumulados aparecen en la parte final del texto.

Comentarios adicionales acerca de algunos de los capítulos

- El capítulo 1 se escribió de modo que se pueda cubrir rápidamente, incluso como trabajo individual si es necesario, para quienes requieran sólo un breve repaso de algunos conceptos aritméticos y algebraicos básicos. El apéndice A es para estudiantes que requieran un repaso más amplio de las operaciones con fracciones.
- El capítulo 2 presenta una introducción temprana al corazón de un curso de álgebra. La resolución de problemas y la resolución de ecuaciones y desigualdades se introducen temprano, de modo que se puedan usar como temas unificadores a lo largo del texto.
- El capítulo 6 está organizado para brindar a los estudiantes la oportunidad de aprender, día a día, diferentes técnicas para resolver ecuaciones cuadráticas.

Completar el cuadrado se trata como un proceso viable para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Aplicarse en completar el cuadrado en este escenario rinde frutos en los capítulos 8 y 13, cuando se grafican parábolas, círculos, elipses e hipérbolas. La sección 6.5 ofrece una guía acerca de cuándo usar una técnica particular para resolver ecuaciones cuadráticas. Además, las relaciones que involucran la suma y el producto de raíces, que con frecuencia se pasan por alto, se analizan y usan como un procedimiento de comprobación efectivo.

- El capítulo 8 se dedica por completo a funciones, y el tópico no se oscurece al saltar de ida y vuelta entre funciones y relaciones que no son funciones. Las funciones lineales y cuadráticas se cubren ampliamente y se usan en varias situaciones de resolución de problemas.
- La presentación de los capítulos 14 y 15 se presta para trabajo individual o en grupos pequeños. Las secuencias, técnicas de conteo y algunos conceptos de probabilidad se introducen y luego utilizan para resolver problemas.

Auxiliares

Para el instructor

Edición anotada del instructor. Esta versión especial del texto estudiantil completo contiene una Guía de integración de recursos con respuestas impresas junto a todos los ejercicios respectivos. Gráficas, tablas y otras respuestas aparecen en una sección especial de respuestas en la parte final del texto. En cada conjunto de problemas existen 20 problemas que están disponibles en formato electrónico a través de *iLrn*. El instructor puede usar estos problemas para asignar tareas en un formato electrónico o para generar evaluaciones para estudiantes. Los problemas *iLrn* se identifican mediante un subrayado azul del número de problema.

Banco de pruebas. El *Banco de pruebas* incluye ocho exámenes por capítulo, así como tres exámenes finales. Las pruebas se construyen con una combinación de preguntas de opción múltiple, respuesta libre, cierto/falso y llenar el espacio.

Manual de soluciones completas. El *Manual de soluciones completas* proporciona soluciones elaboradas a todos los problemas del texto.

Versión iLrn™ del instructor. Al brindar a los instructores y estudiantes insuperables control, variedad y utilidad, todo en uno, *iLrn™* se convierte en un poderoso sistema de enseñanza y aprendizaje completamente integrado. *iLrn* vincula cinco actividades de aprendizaje fundamentales: diagnósticos, tutoriales, tareas en casa, cuestionamientos y exámenes. Fácil de usar, *iLrn* ofrece a los instructores completo control cuando crea evaluaciones en las cuales puede extraer del cúmulo de ejercicios que se ofrecen o crear sus propias preguntas. *iLrn* presenta la más amplia variedad de tipos de problema, lo que permite a los instructores evaluar la forma en que imparten su materia. Un verdadero ahorrador de tiempo para los instructores, *iLrn* ofrece calificación automática de tareas, cuestionarios y exámenes, con resultados que fluyen directamente hacia la libreta de calificaciones. La característica de autoinscripción también ahorra tiempo con la integración del curso conforme los estudiantes se inscriben en la libreta de calificaciones del curso. *iLrn* proporciona integración sin costuras con Blackboard™ y WebCT™.

Videocintas específicas al texto. Estos conjuntos de videocintas específicas al texto, disponibles sin cargo a adquirentes calificados del texto, presenta lecciones de resolución de problemas de 10 a 20 minutos que cubren cada sección de todos los capítulos.

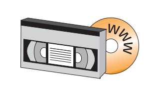
Para el estudiante

Manual de soluciones del estudiante. El *Manual de soluciones del estudiante* proporciona soluciones a los problemas con número impar, y a todos los problemas de repaso del capítulo, examen de capítulo y de repaso acumulado en el texto.

Website (academic.cengage.com/mathematis). Instructores y estudiantes tienen acceso a varios recursos de enseñanza y aprendizaje. Este sitio Web presenta de todo, desde recursos específicos del libro, hasta secciones de noticias.

Versión estudiantil tutorial de iLrn™. Al presentar varios enfoques que conectan con todos los tipos de estudiantes, *Tutorial iLrn*™ ofrece tutoriales específicos al texto que no requieren configuración por parte de los instructores. Los estudiantes pueden comenzar a explorar ejemplos activos del texto al usar el código de acceso que viene con un nuevo libro. *Tutorial iLrn* apoya a los estudiantes con explicaciones del texto, ejemplos, ayuda paso a paso para resolver problemas, práctica ilimitada y lecciones en video capítulo por capítulo. Con este sistema de ritmo personal, los estudiantes pueden incluso comprobar su comprensión sobre la marcha al presentar evaluaciones y recibir realimentación. Si todavía tienen problemas, los estudiantes pueden acceder fácilmente a *vMentor*™ para obtener ayuda en línea y en vivo por parte de un instructor matemático. Los estudiantes pueden plantear cualquier pregunta y obtener ayuda personalizada a través del pizarrón interactivo y con el uso de los micrófonos de sus computadoras para hablar con el instructor. Aunque está diseñado para estudiar fuera del aula, los instructores también pueden asignar los ejercicios tutoriales individuales.

CD-ROM constructor de habilidades video interactivo. Considérelo como horas de asesoría portátiles. El *CD-ROM constructor de habilidades video interactivo* contiene instrucciones en video que cubren cada capítulo del texto. Los problemas que se trabajan durante cada lección en video se muestran primero de modo que los estudiantes puedan intentar trabajarlos antes de mirar la solución. Para ayudar a los estudiantes a evaluar su progreso, cada sección contiene un cuestionario Web de 10 preguntas (cuyos resultados se pueden enviar por correo electrónico al instructor) y cada capítulo contiene un examen de capítulo con la respuesta a cada problema en cada examen. Una nueva herramienta de aprendizaje en este CD-ROM es un tutorial para calculadora graficadora, para álgebra de precálculo y universitaria, que presenta ejemplos, ejercicios y tutoriales en video. También novedosa es la capacidad para seleccionar subtítulos inglés/español para mostrar con la instrucción en video. Este CD-ROM también presenta el tutorial *MathCue* y software de exámenes. En relación con el texto, *MathCue* ofrece los siguientes componentes:



- *MathCue Skill Builder*: presenta problemas para resolver, evalúa respuestas e instruye a los estudiantes al mostrar las soluciones completas con explicaciones paso a paso.
- *MathCue Quiz*: permite a los estudiantes generar gran número de problemas similares a los tipos de problemas de cada sección del libro.
- *MathCue Chapter Test*: también ofrece gran número de problemas referidos a los tipos de problema de cada capítulo.
- *MathCue Solution Finder*: esta herramienta única permite a los estudiantes ingresar sus propios problemas básicos y recibir ayuda paso a paso, como si trabajaran con un tutor.
- Los reportes de calificaciones para cualquier sesión *MathCue* se pueden imprimir y manejar para crédito o crédito adicional.

- Informes de calificaciones impresos o por correo electrónico: Los informes de calificaciones para cualquier sesión *MathCue* se pueden imprimir o enviar a los instructores vía el sistema seguro de calificaciones por correo electrónico de *MathCue*.

vMentor™ *Live*, *sistema de tutoría en línea*. Empacado gratis con cada texto. Con acceso sin cortes a través de *iLrn Tutorial*, *vMentor* proporciona ayuda educativa que puede mejorar sustancialmente el desempeño del estudiante, aumentar sus calificaciones en los exámenes y mejorar su aptitud técnica. Los estudiantes tienen acceso, vía la Web, a tutores altamente calificados con conocimiento profundo de nuestros libros. Cuando los estudiantes se atoran en un problema o concepto particular, sólo necesitan ingresar en *vMentor*, donde pueden hablar (a través de los micrófonos de sus computadoras) con tutores *vMentor* quienes los guiarán hábilmente a través del problema, usando el pizarrón interactivo para ilustrar. Brooks/ Cole también ofrece *Elluminate Live!*, un entorno de aula virtual interactiva que se puede personalizar y es fácil de usar. *Elluminate Live!* mantiene al estudiante conectado a audio total de dos vías, mensajes instantáneos y un pizarrón interactivo, todo en una interfaz gráfica intuitiva. Para información acerca de la obtención de una licencia del sitio *Elluminate Live!*, los instructores pueden ponerse en contacto con su representante de Cengage Learning. *Sólo para adquirentes propietarios, escuelas y universidades. Para información adicional los instructores pueden consultar a su representante Cengage Learning*.

Explorations in Beginning and Intermediate Algebra Using the TI-82/83/83-Plus/85/86 Graphing Calculator, tercera edición (0-534-40644-0)
Deborah J. Cochener y Bonnie M. Hodge, ambas de Austin Peay State University
Este cuaderno de trabajo amigable para el usuario mejora la comprensión de los estudiantes y su retención de los conceptos del álgebra a través de una serie de actividades y exploraciones guiadas con el uso de la calculadora graficadora. Un complemento ideal para cualquier curso de álgebra introductorio o intermedio, *Explorations in Beginning and Intermediate Algebra, tercera edición* es una herramienta ideal para integrar tecnología sin sacrificar contenido de curso. Al enseñar la pulsación de teclas clara y sucintamente, el tiempo de clase se dedica a investigaciones en lugar de enseñar cómo usar una calculadora graficadora.

The Math Students' Guide to the TI-83 Graphing Calculator (0-534-37802-1)
The Math Students' Guide to the TI-86 Graphing Calculator (0-534-37801-3)
The Math Students' Guide to the TI-83 Plus Graphing Calculator (0-534-42021-4)
The Math Students' Guide to the TI-89 Graphing Calculator (0-534-42022-2)
Trish Cabral, de Butte College
Estos videos están diseñados para estudiantes que sean novatos en las calculadoras graficadoras o para quienes quisieran mejorar sus habilidades. Cada videocinta educativa de la calculadora gráfica cubre cálculos básicos, el menú personal, graficación, graficación avanzada, operaciones con matrices, trigonometría, ecuaciones paramétricas, coordenadas polares, cálculo, estadística I y datos con una variable, y estadística II con regresión lineal. Estas maravillosas herramientas tienen cada una 105 minutos de duración y cubren todas las funciones importantes de una calculadora gráfica.

Mastering Mathematics: How to Be a Great Math Student, tercera edición (0-534-34947-1)
Richard Manning Smith, Bryant College
Al brindar sólidas sugerencias para cada etapa de estudio, *Mastering Mathematics* subraya la importancia de una actitud positiva y proporciona a los estudiantes las herramientas para triunfar en su curso de matemáticas.

Activities for Beginning and Intermediate Algebra, segunda edición
Edición del instructor (0-534-99874-7); edición estudiantil (0-534-99873-9)
Debbie Garrison, Judy Jones y Jolene Rhodes, todos de Valencia Community College
Diseñado como un complemento independiente para cualquier texto de álgebra inicial o intermedio, *Activities in Beginning and Intermediate Algebra* es una colección de actividades escritas para incorporar las recomendaciones del NCTM y de Crossroads de AMATYC. Las actividades se pueden usar durante clase o en un escenario de laboratorio para introducir, enseñar o reforzar un tema.

Conquering Math Anxiety: A Self-Help Workbook, segunda edición (0-534-38634-2)
Cynthia Arem, Pima Community College
Un libro de trabajo detallado que proporciona varios ejercicios y hojas de trabajo junto con explicaciones puntuales de métodos para ayudar a los estudiantes "matefóbicos" a lidiar con y superar el temor a las matemáticas. Esta edición ahora viene con un CD-ROM de relajación gratuito y una lista detallada de recursos en Internet.

Active Arithmetic and Algebra: Activities for Prealgebra and Beginning Algebra (0-534-36771-2)
Judy Jones, Valencia Community College
Este manual de actividades incluye diversos enfoques para aprender conceptos matemáticos. Se incluyen 16 actividades, incluidos acertijos, juegos, colección de datos, graficación y actividades escritas.

Math Facts: Survival Guide to Basic Mathematics, segunda edición (0-534-94734-4)
Algebra Facts: Survival Guide to Basic Algebra (0-534-19986-0)
Theodore John Szymanski, Tompkins-Cortland Community College
Este cuadernillo brinda acceso sencillo a la mayoría de los conceptos y fórmulas cruciales en álgebra. Aunque es limitado, este cuadernillo está estructurado para trabajar como tarjetas didácticas.

Reconocimientos

Nos gustaría aprovechar esta oportunidad para agradecer a las siguientes personas que fungieron como revisores para las nuevas ediciones de esta serie de textos:

Yusuf Abdi
Rutgers University, Newark

Lynda Fish
St. Louis Community College at Forest Park

Cindy Fleck
Wright State University

James Hodge
Mountain State University

Barbara Laubenthal
University of North Alabama

Karolyn Morgan
University of Montevallo

Jayne Prude
University of North Alabama

Renee Quick
Wallace State Community College, Hanceville

Queremos expresar nuestra sincera gratitud al equipo de Brooks/Cole, en especial a Gary Whalen, por su continua cooperación y asistencia a lo largo de este proyecto, y a Susan Graham y Hal Humphrey, quien llevó a cabo los muchos detalles de la producción. Finalmente, a Arlene Kaufmann le debemos un agradecimiento muy especial, pues pasó varias horas leyendo las pruebas.

Jerome E. Kaufmann
Karen L. Schwitters

1

Conceptos y propiedades básicos

Los números del conjunto de enteros se usan para expresar temperaturas que están por abajo de 0ºF.

La temperatura a las 6 p.m. fue de −3ºF. Hacia las 11 p.m. la temperatura cayó otros 5ºF. Se puede usar la **expresión numérica** −3 −5 para determinar la temperatura a las 11 p.m.

Justin tiene p monedas de 1 centavo, n monedas de 5 centavos y d monedas de 10 centavos en su bolsillo. La **expresión algebraica** $p + 5n + 10d$ representa dicha cantidad de monedas en centavos.

El álgebra con frecuencia se describe como una **aritmética generalizada**. Tal descripción puede no contar toda la historia, pero sí transmite una idea importante: una buena comprensión de la aritmética proporciona una base firme para el estudio del álgebra. En este capítulo se usan los conceptos **expresión numérica** y **expresión algebraica** para revisar algunas ideas de aritmética y comenzar la transición al álgebra. Asegúrese de que comprende con claridad los conceptos básicos que se revisan en este primer capítulo.

1.1 Conjuntos, números reales y expresiones numéricas

En aritmética se usan símbolos como 6, $\frac{2}{3}$, 0.27 y π para representar números. Los símbolos $+$, $-$, $\cdot$ y $\div$ por lo general indican las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, respectivamente. Por ende, se pueden formar **expresiones numéricas** específicas. Por ejemplo, es posible escribir la suma indicada de seis y ocho como $6 + 8$.

En álgebra, el concepto de una variable proporciona la base para generalizar las ideas aritméticas. Por ejemplo, al usar x y y para representar cualquier número, se utiliza la expresión $x + y$ para representar la suma indicada de dos números cualesquiera. La x y la y en tal expresión se conocen como **variables**, y la frase $x + y$ se llama **expresión algebraica**.

Se pueden extender al álgebra muchos de los acuerdos de notación que se hacen en aritmética, con algunas modificaciones. La siguiente tabla resume los acuerdos de notación que pertenecen a las cuatro operaciones básicas.

Operación	Aritmética	Álgebra	Vocabulario
Suma	$4 + 6$	$x + y$	La **suma** de x y y
Resta	$14 - 10$	$a - b$	La **diferencia** de a y b
Multiplicación	$7 \cdot 5$ o 7×5	$a \cdot b$, $a(b)$, $(a)b$, $(a)(b)$, o ab	El **producto** de a y b
División	$8 \div 4$, $\frac{8}{4}$ o $4\overline{)8}$	$x \div y$, $\frac{x}{y}$ o $y\overline{)x}$	El **cociente** de x y y

Advierta las diferentes formas de indicar un producto, incluido el uso de paréntesis. La forma ab es la más simple y probablemente la más ampliamente usada. Expresiones como abc, $6xy$ y $14xyz$ indican multiplicación. También ponga atención a las distintas formas que indican división. En álgebra es más frecuente la forma fraccional, $\frac{x}{y}$, aunque las otras formas en ocasiones tienen un propósito.

Uso de conjuntos

En el estudio del álgebra es posible usar algo del vocabulario y simbolismo básicos asociados con el concepto de conjuntos. Un **conjunto** es una colección de objetos y éstos se llaman **elementos** o **miembros** del conjunto. En aritmética y álgebra los elementos de un conjunto por lo general son números.

El uso de llaves, { }, para encerrar los elementos (o una descripción de los elementos) y el empleo de letras mayúsculas para nombrar los conjuntos proporciona una forma conveniente de comunicar acerca de conjuntos. Por ejemplo, el conjunto A, que consiste de las vocales del abecedario se puede representar en cualquiera de las siguientes formas:

$A = \{\text{vocales del abecedario}\}$	Descripción verbal
$A = \{a, e, i, o, u\}$	Listado o descripción en lista
$A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$	Notación constructor de conjunto

El enfoque de listas se modifica si el número de elementos es muy grande. Por ejemplo, todas las letras del alfabeto se pueden mencionar como

$$\{a, b, c, \ldots, z\}$$

En este caso primero se escriben suficientes elementos para establecer un patrón, luego tres puntos indican que el conjunto continúa en dicho patrón. La entrada final indica el último elemento del patrón. Si escribe

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

el conjunto comienza con el conteo de números 1, 2 y 3. Los tres puntos indican que continúa en forma parecida hasta el infinito; no hay un elemento último. Un conjunto que consiste de ningún elemento se llama **conjunto vacío** (se escribe $\emptyset$).

La **notación de constructor de conjunto** combina el uso de llaves y el concepto de una variable. Por ejemplo, $\{x \mid x \text{ es una vocal}\}$ se lee "el conjunto de todas las x tal que x es una vocal". Note que la línea vertical se lee "tal que". Se puede usar la notación de constructor de conjunto para describir el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ como $\{x \mid x > 0 \text{ y } x \text{ es un número entero}\}$.

El símbolo $\in$ se usa para denotar pertenencia a un conjunto. Por ende, si $A = \{a, e, i, o, u\}$, se puede escribir $e \in A$, que se lee como "e es un elemento de A". El símbolo diagonal, /, comúnmente se usa en matemáticas como un símbolo de negación. Por ejemplo, $m \notin A$ se lee como "m no es un elemento de A".

Se dice que dos conjuntos son *iguales* si contienen exactamente el mismo número de elementos. Por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$$

porque ambos conjuntos contienen los mismos elementos; el orden en el que se escriben los elementos no importa. La marca diagonal a través del símbolo de igualdad denota "no es igual a". Por tanto, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, se puede escribir $A \neq B$, que se lee como "el conjunto A no es igual al conjunto B".

Números reales

A la mayoría del álgebra que se estudiará en este texto se le conoce como **álgebra de números reales**. Esto significa que las variables representan números reales. Por tanto, es necesario familiarizarse con los diferentes términos que se usan para clasificar distintos tipos de números reales.

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Números naturales, números para contar, enteros positivos
$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Números enteros, enteros no negativos
$\{\ldots -3, -2, -1\}$	Enteros negativos
$\{\ldots -3, -2, -1, 0\}$	Enteros no positivos
$\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Enteros

Un **número racional** es cualquier número que se expresa en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y b no es cero. Los siguientes son ejemplos de números racionales.

$$-\frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad -4, \quad 0, \quad 0.3, \quad 6\frac{1}{2}$$

-4 porque $-4 = \frac{-4}{1} = \frac{4}{-1}$ $\qquad$ 0 porque $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$

0.3 porque $0.3 = \frac{3}{10}$ $\qquad$ $6\frac{1}{2}$ porque $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

También se puede definir un número racional en términos de una representación decimal. Antes de hacerlo revise las diferentes posibilidades de las representaciones decimales. Los decimales se pueden clasificar como **terminales**, **repetitivos** o **no repetitivos**. He aquí algunos ejemplos.

$$\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.46 \\ 0.789 \\ 0.6234 \end{bmatrix} \text{Decimales terminales} \qquad \begin{bmatrix} 0.6666\ldots \\ 0.141414\ldots \\ 0.694694694\ldots \\ 0.2317171717\ldots \\ 0.5417283283283\ldots \end{bmatrix} \text{Decimales repetitivos}$$

$$\begin{bmatrix} 0.276314583\ldots \\ 0.21411811161111\ldots \\ 0.673183329333\ldots \end{bmatrix} \text{Decimales no repetitivos}$$

Un decimal repetitivo tiene un bloque de dígitos que se repiten de manera indefinida. Este bloque repetitivo de dígitos puede ser cualquier número de dígitos y comienzan o no enseguida del punto decimal. Para indicar el bloque repetitivo por lo general se usa una pequeña barra horizontal. Por lo tanto, $0.6666\ldots$ se escribe como $0.\overline{6}$, y $0.2317171717\ldots$ se escribe como $0.23\overline{17}$.

En términos de decimales un **número racional** se define como un número que tiene representación decimal, terminal o repetitiva. Los siguientes ejemplos ilustran algunos números racionales que se escriben en forma $\frac{a}{b}$ y en forma decimal.

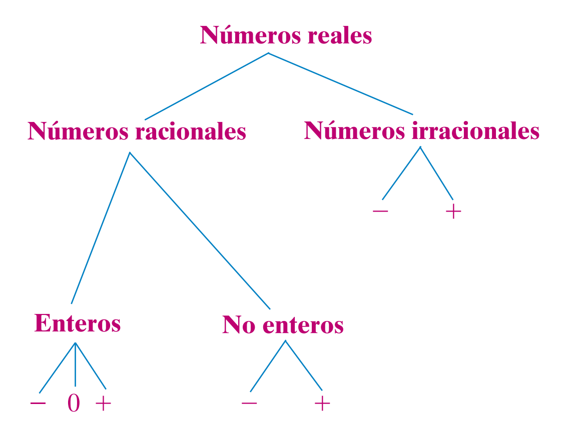
$$\frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{3}{11} = 0.\overline{27} \qquad \frac{1}{8} = 0.125 \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \qquad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

Un **número irracional** es un número que *no se puede* expresar en forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y b no es cero. Más todavía, un número irracional tiene una

representación decimal no repetitiva y no terminal. Algunos ejemplos de números irracionales con una representación decimal parcial son los siguientes:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \sqrt{3} = 1.73205080756887\ldots$$
$$\pi = 3.14159265358979\ldots$$

Todo el conjunto de los **números reales** está compuesto de los números racionales junto con los irracionales. Cualquier número real es un número racional o un número irracional. El siguiente diagrama de árbol resume las varias clasificaciones del sistema de números reales.



Es posible rastrear a través del diagrama cualquier número real del modo siguiente:

7 es real, racional, entero y positivo.

$-\frac{2}{3}$ es real, racional, no entero y negativo.

$\sqrt{7}$ es real, irracional y positivo.

0.38 es real, racional, no entero y positivo.

Observación: Por lo general, al conjunto de enteros no negativos, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, se le conoce como el conjunto de **números enteros**, y al conjunto de enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$ se le conoce como **números naturales**. El conjunto de los números enteros difiere del conjunto de números naturales por la inclusión del número cero.

En este momento es conveniente usar el concepto de subconjunto. Un conjunto A es un **subconjunto** de un conjunto B si y sólo si cada elemento de A también es un elemento de B. Esto se escribe como $A \subseteq B$ y se lee como "A es un subconjunto de B". Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, entonces $A \subseteq B$, porque cada elemento de A también es un elemento de B. La marca diagonal de nuevo denota negación, de modo que si $A = \{1, 2, 5\}$ y $B = \{2, 4, 7\}$, se puede decir que A no es un subconjunto de B al escribir $A \nsubseteq B$. La figura 1.1 representa las relaciones de subconjuntos para el conjunto de los números reales. Consulte la fi-

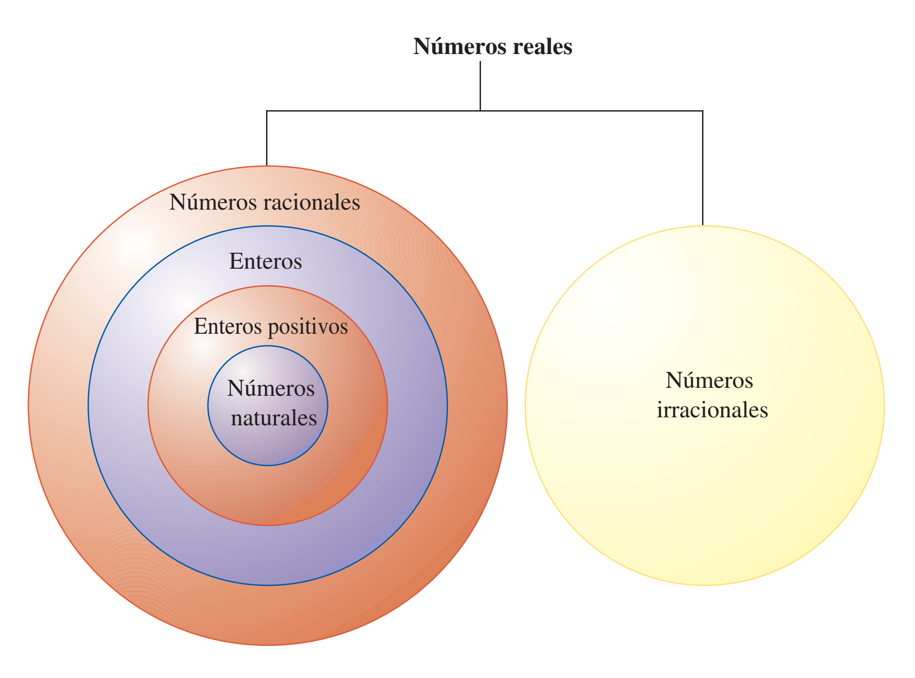


Figura 1.1

gura 1.1 conforme estudie los siguientes enunciados que usan vocabulario y simbolismo de subconjunto.

1. El conjunto de los números enteros positivos es un subconjunto del conjunto de los enteros.

   $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

2. El conjunto de los enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

   $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq \{x|x \text{ es un número racional}\}$

3. El conjunto de los números racionales es un subconjunto del conjunto de los números reales.

   $\{x|x \text{ es un número racional}\} \subseteq \{y|y \text{ es un número real}\}$

Igualdad

La relación **igualdad** juega una función importante en matemáticas, en especial cuando se manipulan números reales y expresiones algebraicas que representan números reales. Una igualdad es un enunciado en el cual dos símbolos, o grupos de símbolos, son nombres para el mismo número. El símbolo = se usa para expresar una igualdad. Por ende, se puede escribir

$6 + 1 = 7 \qquad 18 - 2 = 16 \qquad 36 \div 4 = 9$

(El símbolo $\neq$ significa *no es igual a*.) Las siguientes cuatro propiedades básicas de la igualdad son evidentes, pero es necesario tenerlas en mente. (En el capítulo 2 se extenderá esta lista, cuando se trabaje con soluciones de ecuaciones.)

Propiedades de la igualdad

Propiedad reflexiva

Para cualquier número real a,

$$a = a$$

Ejemplos: $14 = 14$ $\quad x = x$ $\quad a + b = a + b$

Propiedad simétrica

Para cualesquiera números reales a y b,

si $a = b$, entonces $b = a$

Ejemplos: Si $13 + 1 = 14$, entonces $14 = 13 + 1$.
Si $3 = x + 2$, entonces $x + 2 = 3$.

Propiedad transitiva

Para cualesquiera números reales a, b y c,

si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

Ejemplos: Si $3 + 4 = 7$ y $7 = 5 + 2$, entonces $3 + 4 = 5 + 2$.
Si $x + 1 = y$ y $y = 5$, entonces $x + 1 = 5$.

Propiedad de sustitución

Para cualesquiera números reales a y b: si $a = b$, entonces a puede sustituirse por b, o b puede sustituirse por a, en cualquier enunciado, sin cambiar el significado del enunciado.

Ejemplos: Si $x + y = 4$ y $x = 2$, entonces $2 + y = 4$.
Si $a - b = 9$ y $b = 4$, entonces $a - 4 = 9$.

Expresiones numéricas

Esta sección concluye mediante la *simplificación de algunas expresiones numéricas* que implican números enteros positivos. Cuando se simplifican expresiones numéricas, las operaciones se realizan en el siguiente orden. Asegúrese de coincidir con el resultado en cada ejemplo.

1. Realice las operaciones dentro de los símbolos de inclusión (paréntesis, corchetes y llaves) y arriba y abajo de cada barra de fracción. Inicie con el símbolo de inclusión más interno.
2. Realice todas las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.
3. Realice todas las sumas y restas en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.

EJEMPLO 1

Simplifique $20 + 60 - 10 \cdot 2$

Solución

Primero haga la división.

$$20 + 60 \div 10 \cdot 2 = 20 + 6 \cdot 2$$

A continuación realice la multiplicación.

$$20 + 6 \cdot 2 = 20 + 12$$

Luego haga la suma.

$$20 + 12 = 32$$

Por tanto, $20 + 60 \div 10 \cdot 2$ se simplifica a 32. ■

EJEMPLO 2

Simplifique $7 \cdot 4 \div 2 \cdot 3 \cdot 2 \div 4$

Solución

Las multiplicaciones y divisiones se realizan de izquierda a derecha en el orden en el que aparecen.

$$\begin{aligned} 7 \cdot 4 \div 2 \cdot 3 \cdot 2 \div 4 &= 28 \div 2 \cdot 3 \cdot 2 \div 4 \\ &= 14 \cdot 3 \cdot 2 \div 4 \\ &= 42 \cdot 2 \div 4 \\ &= 84 \div 4 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Por tanto, $7 \cdot 4 \div 2 \cdot 3 \cdot 2 \div 4$ se simplifica a 21. ■

EJEMPLO 3

Simplifique $5 \cdot 3 + 4 \div 2 - 2 \cdot 6 - 28 \div 7$.

Solución

Primero haga las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen. Luego realice las sumas y restas en el orden en el que aparecen. Este trabajo puede tomar el formato siguiente.

$$5 \cdot 3 + 4 \div 2 - 2 \cdot 6 - 28 \div 7 = 15 + 2 - 12 - 4 = 1$$ ■

EJEMPLO 4

Simplifique $(4 + 6)(7 + 8)$

Solución

Use los paréntesis para indicar el *producto* de las cantidades $4 + 6$ y $7 + 8$. Primero realice las sumas dentro de los paréntesis y luego multiplique.

$$(4 + 6)(7 + 8) = (10)(15) = 150$$ ■

EJEMPLO 5

Simplifique $(3 \cdot 2 + 4 \cdot 5)(6 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$.

Solución

Primero haga las multiplicaciones dentro de los paréntesis.

$$(3 \cdot 2 + 4 \cdot 5)(6 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = (6 + 20)(48 - 35)$$

Luego haga la suma y la resta dentro del paréntesis.

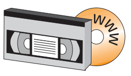
$$(6 + 20)(48 - 35) = (26)(13)$$

Después encuentre el producto final.

$$(26)(13) = 338$$ ■

EJEMPLO 6

Simplifique $6 + 7[3(4 + 6)]$



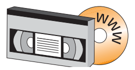
Solución

Los corchetes se usan con el mismo propósito que los paréntesis. En cada problema es necesario simplificar *de adentro hacia fuera*; esto es, primero se realizan las operaciones en los paréntesis más internos. Por ende, se obtiene

$$\begin{aligned} 6 + 7[3(4 + 6)] &= 6 + 7[3(10)] \\ &= 6 + 7[30] \\ &= 6 + 210 \\ &= 216 \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7

Simplifique $\dfrac{6 \cdot 8 \div 4 - 2}{5 \cdot 4 - 9 \cdot 2}$



Solución

Primero realice las operaciones arriba y abajo de la barra de fracción. Luego se encuentra el cociente final.

$$\frac{6 \cdot 8 \div 4 - 2}{5 \cdot 4 - 9 \cdot 2} = \frac{48 \div 4 - 2}{20 - 18} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$ ■

Observación: Con paréntesis, el problema en el ejemplo 7 se podría escribir como $(6 \cdot 8 \div 4 - 2) \div (5 \cdot 4 - 9 \cdot 2)$. ■

Conjunto de problemas 1.1

Para los problemas 1-10 identifique cada enunciado como cierto o falso.

1. Todo número irracional es un número real.
2. Todo número racional es un número real.
3. Si un número es real, entonces es irracional.
4. Todo número real es un número racional.
5. Todos los enteros son números racionales.
6. Algunos números irracionales también son números racionales.
7. El cero es un entero positivo.
8. El cero es un número racional.
9. Todos los enteros positivos son enteros.
10. El cero es un entero negativo.

Para los problemas 11-18, de esta lista 0, 14, $\frac{2}{3}\pi$, $\sqrt{7}$, $-\frac{11}{14}$, 2.34, $3.2\overline{1}$, $\frac{55}{8}$, $-\sqrt{17}$, -19 y -2.6, identifique cada uno de los siguientes.

11. Los números enteros positivos
12. Los números naturales
13. Los números racionales
14. Los enteros
15. Los enteros no negativos
16. Los números irracionales
17. Los números reales
18. Los enteros no positivos

Para los problemas 19-28 use las siguientes designaciones de conjunto.

$N = \{x|x$ es un número natural$\}$

$Q = \{x|x$ es un número racional$\}$

$W = \{x|x$ es un número entero positivo$\}$

$H = \{x|x$ es un número irracional$\}$

$I = \{x|x$ es un entero$\}$

$R = \{x|x$ es un número real$\}$

Coloque $\subseteq$ o $\nsubseteq$ en cada espacio en blanco para formar un enunciado verdadero.

19. R ________ N **20.** N ________ R

21. I ________ Q **22.** N ________ I

23. Q ________ H **24.** H ________ Q

25. N ________ W **26.** W ________ I

27. I ________ N **28.** I ________ W

Para los problemas 29-32 clasifique el número real al rastrearlo a través del diagrama en el texto (vea la página 5).

29. -8 **30.** 0.9

31. $-\sqrt{2}$ **32.** $\frac{5}{6}$

Para los problemas 33-42 mencione los elementos de cada conjunto. Por ejemplo, los elementos de $\{x|x$ es un número natural menor que 4$\}$ se pueden mencionar como $\{1, 2, 3\}$.

33. $\{x|x$ es un número natural menor que 3$\}$
34. $\{x|x$ es un número natural mayor que 3$\}$
35. $\{n|n$ es un número entero positivo menor que 6$\}$
36. $\{y|y$ es un entero mayor que $-4\}$
37. $\{y|y$ es un entero menor que 3$\}$
38. $\{n|n$ es un entero positivo mayor que $-7\}$
39. $\{x|x$ es un número entero positivo menor que 0$\}$
40. $\{x|x$ es un entero negativo mayor que $-3\}$
41. $\{n|n$ es un entero no negativo menor que 5$\}$
42. $\{n|n$ es un entero no positivo mayor que 3$\}$

Para los problemas 43-50 sustituya cada marca de interrogación para hacer que cada enunciado sea una aplicación de la propiedad de igualdad indicada. Por ejemplo, $16 = ?$ se convierte en $16 = 16$ debido a la propiedad reflexiva de la igualdad.

43. Si $y = x$ y $x = -6$, entonces $y = ?$ (Propiedad transitiva de la igualdad)
44. $5x + 7 = ?$ (Propiedad reflexiva de la igualdad)
45. Si $n = 2$ y $3n + 4 = 10$, entonces $3(?) + 4 = 10$ (Propiedad de sustitución de la igualdad)
46. Si $y = x$ y $x = z + 2$, entonces $y = ?$ (Propiedad transitiva de la igualdad)
47. Si $4 = 3x + 1$, entonces $? = 4$ (Propiedad simétrica de la igualdad)

48. Si $t = 4$ y $s + t = 9$, entonces $s + ? = 9$ (Propiedad de sustitución de la igualdad)

49. $5x = ?$ (Propiedad reflexiva de la igualdad)

50. Si $5 = n + 3$, entonces $n + 3 = ?$ (Propiedad simétrica de la igualdad)

Para los problemas 51-74 simplifique cada una de las expresiones numéricas.

51. $16 + 9 - 4 - 2 + 8 - 1$

52. $18 + 17 - 9 - 2 + 14 - 11$

53. $9 \div 3 \cdot 4 \div 2 \cdot 14$

54. $21 \div 7 \cdot 5 \cdot 2 \div 6$

55. $7 + 8 \cdot 2$

56. $21 - 4 \cdot 3 + 2$

57. $9 \cdot 7 - 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7$

58. $6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2$

59. $(17 - 12)(13 - 9)(7 - 4)$

60. $(14 - 12)(13 - 8)(9 - 6)$

61. $13 + (7 - 2)(5 - 1)$

62. $48 - (14 - 11)(10 - 6)$

63. $(5 \cdot 9 - 3 \cdot 4)(6 \cdot 9 - 2 \cdot 7)$

64. $(3 \cdot 4 + 2 \cdot 1)(5 \cdot 2 + 6 \cdot 7)$

65. $7[3(6 - 2)] - 64$

66. $12 + 5[3(7 - 4)]$

67. $[3 + 2(4 \cdot 1 - 2)][18 - (2 \cdot 4 - 7 \cdot 1)]$

68. $3[4(6 + 7)] + 2[3(4 - 2)]$

69. $14 + 4\left(\frac{8 - 2}{12 - 9}\right) - 2\left(\frac{9 - 1}{19 - 15}\right)$

70. $12 + 2\left(\frac{12 - 2}{7 - 2}\right) - 3\left(\frac{12 - 9}{17 - 14}\right)$

71. $[7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 - 5] \div 8$

72. $[27 - (4 \cdot 2 + 5 \cdot 2)][(5 \cdot 6 - 4) - 20]$

73. $\frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 3}{5 \cdot 7 - 34} + 19$

74. $\frac{4 \cdot 9 - 3 \cdot 5 - 3}{18 - 12}$

75. Desde luego, debe ser capaz de realizar cálculos como los de los problemas 51-74, tanto con calculadora como sin ella. Más aún, diferentes tipos de calculadoras manejan el tema de prioridad de operación en formas distintas. Asegúrese de realizar los problemas 51-74 con *su* calculadora.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

76. Explique con sus palabras la diferencia entre la propiedad reflexiva de la igualdad y la propiedad simétrica de la igualdad.

77. Su amigo sigue obteniendo una respuesta de 30 cuando simplifica $7 + 8(2)$. ¿Qué error comete y cómo podría ayudarlo?

78. ¿Cree que $3\sqrt{2}$ es un número racional o irracional? Defienda su respuesta.

79. Explique por qué todo entero es un número racional, mas no todo número racional es un entero.

80. Explique la diferencia entre $1.\overline{3}$ y 1.3.

1.2 Operaciones con números reales

Antes de revisar las cuatro operaciones básicas con números reales se discutirán brevemente algunos conceptos y terminología de uso común con este material. Con frecuencia es útil tener una representación geométrica del conjunto de los números reales, como se indica en la figura 1.2. Tal representación, llamada **recta de números reales**, indica una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y los puntos sobre una recta.

En otras palabras, a cada número real le corresponde uno y sólo un punto sobre la recta, y a cada punto en la recta le corresponde uno y sólo un número real. El número asociado con cada punto sobre la recta se llama **coordenada** del punto.

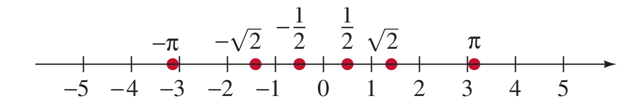


Figura 1.2

A muchas operaciones, relaciones, propiedades y conceptos que pertenecen a los números reales se les puede dar una interpretación geométrica en la recta de los números reales. Por ejemplo, el problema de sumar $(-1) + (-2)$ se puede mostrar en la recta numérica como en la figura 1.3.

Figura 1.3

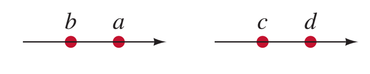


Figura 1.4

Las relaciones de desigualdad también tienen una interpretación geométrica. El enunciado $a > b$ (que se lee "a es mayor que b") significa que a está a la derecha de b, y el enunciado $c < d$ (que se lee "c es menor que d") significa que c está a la izquierda de d, como se muestra en la figura 1.4. El símbolo $\leq$ significa *es menor que o igual a*, y el símbolo $\geq$ significa *es mayor que o igual a*.

La propiedad $-(-x) = x$ se puede representar en la recta numérica mediante la siguiente secuencia de pasos que se muestra en la figura 1.5.

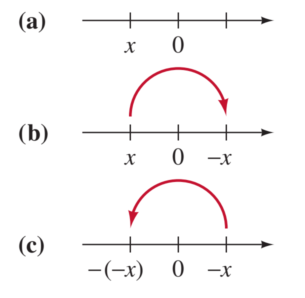


Figura 1.5

1. Elija un punto que tenga una coordenada de x.
2. Localice su opuesto, que se escribe $-x$, en el otro lado de cero.
3. Localice el opuesto de $-x$, que se escribe como $-(-x)$, en el otro lado de cero.

Por tanto, se concluye que **el opuesto del opuesto de cualquier número real es el número en sí mismo**, y esto se expresa simbólicamente como $-(-x) = x$.

Observación: El símbolo -1 se puede leer "uno negativo", "el negativo de uno", "el opuesto de uno" o "el inverso aditivo de uno". La terminología "opuesto de" e "inverso aditivo de" es especialmente significativa cuando se trabaja con variables. Por ejemplo, el símbolo $-x$, que se lee "el opuesto de x" o "el inverso aditivo de x", enfatiza un tema importante. Puesto que x puede ser cualquier número real, $-x$ (el opuesto de x) puede ser cero, positivo o negativo. Si x es positivo, entonces $-x$ es negativo. Si x es negativo, entonces $-x$ es positivo. Si x es cero, entonces $-x$ es cero.

Valor absoluto

Es posible usar el concepto de **valor absoluto** para describir con precisión cómo operar con números positivos o negativos. En términos geométricos, el valor absoluto de cualquier número es

la distancia entre el número y el cero en la recta numérica. Por ejemplo, el valor absoluto de 2 es 2. El valor absoluto de −3 es 3. El valor absoluto de 0 es 0 (vea la figura 1.6).

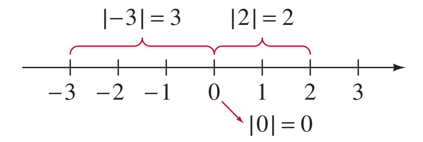


Figura 1.6

Simbólicamente, el valor absoluto se denota con barras verticales. Por ende se escribe

$$|2| = 2 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0$$

La definición formal del concepto de valor absoluto es la siguiente:

Definición 1.1

Para todo número real a,

1. Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.

2. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

De acuerdo con la definición 1.1 se obtiene

$|6| = 6$ Al aplicar la parte 1 de la definición 1.1

$|0| = 0$ Al aplicar la parte 1 de la definición 1.1

$|-7| = -(-7) = 7$ Al aplicar la parte 2 de la definición 1.1

Advierta que el valor absoluto de un número positivo es el número en sí, pero el valor absoluto de un número negativo es su opuesto. Por tanto, el valor absoluto de cualquier número, excepto cero, es positivo, y el valor absoluto de cero es cero. En conjunto, estos hechos indican que el valor absoluto de cualquier número real es igual al valor absoluto de su opuesto. Estas ideas se resumen en las siguientes propiedades.

Propiedades del valor absoluto

Las variables a y b representan cualquier número real.

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = |-a|$

3. $|a - b| = |b - a|$ $a - b$ y $b - a$ son opuestos uno del otro.

Suma de números reales

Se pueden usar varios modelos físicos para describir la suma de números reales. Por ejemplo, los rendimientos y pérdidas que pertenecen a las inversiones: una pérdida de $25.75 (que se escribe como −25.75) en una inversión, junto con un rendimiento de $22.20 (que se escribe como 22.20) en una segunda inversión, produce una pérdida global de $3.55. Por tanto (−25.75) + 22.20 = −3.55. Piense en términos de rendimientos y pérdidas para cada uno de los siguientes ejemplos.

$$50 + 75 = 125 \qquad 20 + (-30) = -10$$

$$-4.3 + (-6.2) = -10.5 \qquad -27 + 43 = 16$$

$$\frac{7}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} \qquad -3\frac{1}{2} + \left(-3\frac{1}{2}\right) = -7$$

Aunque todos los problemas que implican suma de números reales podrían resolverse con el uso de la interpretación rendimiento-pérdida, a veces es conveniente tener una descripción más precisa del proceso de suma. Para este propósito se utiliza el concepto de valor absoluto.

Suma de números reales

Dos números positivos La suma de dos números reales positivos es la suma de sus valores absolutos.

Dos números negativos La suma de dos números reales negativos es la opuesta de la suma de sus valores absolutos.

Un número positivo y uno negativo La suma de un número real positivo y un número real negativo se puede encontrar al restar el menor valor absoluto del mayor valor absoluto y dar al resultado el signo del número original, que tiene el valor absoluto más grande. Si los dos números tienen el mismo valor absoluto, entonces su suma es 0.

Cero y otro número La suma de 0 y cualquier número real es el número real en sí.

Ahora considere los siguientes ejemplos en términos de la descripción anterior de suma. Estos ejemplos incluyen operaciones con números racionales en forma de fracción común. Si necesita una revisión de las operaciones con fracciones, vea el Apéndice A.

$$(-6) + (-8) = -(|-6| + |-8|) = -(6 + 8) = -14$$

$$(-1.6) + (-7.7) = -(|-1.6| + |-7.7|) = -(1.6 + 7.7) = -9.3$$

$$6\frac{3}{4} + \left(-2\frac{1}{2}\right) = \left(\left|6\frac{3}{4}\right| - \left|-2\frac{1}{2}\right|\right) = \left(6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}\right) = \left(6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{4}\right) = 4\frac{1}{4}$$

$$14 + (-21) = -(|-21| - |14|) = -(21 - 14) = -7$$

$$-72.4 + 72.4 = 0 \qquad 0 + (-94) = -94$$

Resta de números reales

La resta de los números reales se puede describir en términos de suma.

Resta de números reales

Si a y b son números reales, entonces

$$a - b = a + (-b)$$

Puede ser útil que lea $a - b = a + (-b)$ como "a menos b es igual a a más el opuesto de b". En otras palabras, todo problema de resta se puede cambiar a un problema de suma equivalente. Considere los siguientes ejemplos.

$$7 - 9 = 7 + (-9) = -2, \qquad -5 - (-13) = -5 + 13 = 8$$

$$6.1 - (-14.2) = 6.1 + 14.2 = 20.3, \qquad -16 - (-11) = -16 + 11 = -5$$

$$-\frac{7}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{8} + \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$$

Debe ser evidente que la suma es una operación clave. Para simplificar expresiones numéricas que implican suma y resta, primero puede cambiar todas las restas a sumas y luego realizar las sumas.

EJEMPLO 1

Simplifique $7 - 9 - 14 + 12 - 6 + 4$

Solución

$$7 - 9 - 14 + 12 - 6 + 4 = 7 + (-9) + (-14) + 12 + (-6) + 4$$
$$= -6$$

EJEMPLO 2

Simplifique $-2\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right) - \frac{1}{2}$

Solución

$$-2\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right) - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{17}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \left(-\frac{4}{8}\right)$$

Cambie a fracciones equivalentes con un común denominador.

$$= -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Con frecuencia es útil convertir *mentalmente* restas a sumas. En los siguientes dos ejemplos, el trabajo que se muestra en los recuadros con línea discontinua lo podría realizar en su mente.

EJEMPLO 3

Simplifique $4 - 9 - 18 + 13 - 10$

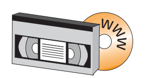
Solución

$$\begin{aligned} 4 - 9 - 18 + 13 - 10 &= \boxed{4 + (-9) + (-18) + 13 + (-10)} \\ &= -20 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4

Simplifique $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{10}\right)$



Solución

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{10}\right) &= \boxed{\left[\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{5}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{7}{10}\right)\right]} \\ &= \left[\frac{10}{15} + \left(-\frac{3}{15}\right)\right] - \left[\frac{5}{10} + \left(-\frac{7}{10}\right)\right] \end{aligned}$$

Dentro de los corchetes, cambie a fracciones equivalentes con un común denominador.

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{7}{15}\right) - \left(-\frac{2}{10}\right) \\ &= \boxed{\left(\frac{7}{15}\right) + \left(+\frac{2}{10}\right)} \\ &= \frac{14}{30} + \left(+\frac{6}{30}\right) \end{aligned}$$

Cambie a fracciones equivalentes con un común denominador.

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

■

■ Multiplicación de números reales

La multiplicación de números enteros positivos se puede interpretar como suma repetitiva. Por ejemplo, $3 \cdot 2$ significa tres veces 2; por tanto, $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$. Esta misma interpretación de la multiplicación como suma repetida se puede usar para encontrar el producto de un número positivo y un número negativo, como se muestra mediante los siguientes ejemplos.

$$2(-3) = -3 + (-3) = -6, \qquad 3(-2) = -2 + (-2) + (-2) = -6$$

$$4(-1.2) = -1.2 + (-1.2) + (-1.2) + (-1.2) = -4.8$$

$$3\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8}$$

Cuando se multiplican números enteros positivos, el orden en el que se multiplican dos factores no cambia el producto. Por ejemplo, $2(3) = 6$ y $3(2) = 6$. Al usar esta idea se puede manejar un número negativo por un número positivo del modo siguiente:

$$(-2)(3) = (3)(-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$
$$(-3)(4) = (4)(-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$
$$\left(-\frac{3}{7}\right)(2) = (2)\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{6}{7}$$

Finalmente, considere el producto de dos enteros negativos. El siguiente patrón que usa enteros ayuda con el razonamiento.

$$4(-2) = -8 \qquad 3(-2) = -6 \qquad 2(-2) = -4$$
$$1(-2) = -2 \qquad 0(-2) = 0 \qquad (-1)(-2) = ?$$

Para continuar este patrón, el producto de -1 y -2 tiene que ser 2. En general, este tipo de razonamiento ayuda a darse cuenta que el producto de cualesquiera dos números reales negativos es un número real positivo. Al usar el concepto de valor absoluto, la **multiplicación de números reales** se puede describir del modo siguiente:

Multiplicación de números reales

1. El producto de dos números reales positivos o dos negativos es el producto de sus valores absolutos.
2. El producto de un número real positivo y un número real negativo (en cualquier orden) es el opuesto del producto de sus valores absolutos.
3. El producto de cero y cualquier número real es cero.

Los siguientes ejemplos ilustran esta descripción de la multiplicación. De nuevo, los pasos que se muestran en los recuadros con línea discontinua por lo general se realizan mentalmente.

$$(-6)(-7) = \boxed{|-6| \cdot |-7| = 6 \cdot 7} = 42$$
$$(8)(-9) = \boxed{-(|8| \cdot |-9|) = -(8 \cdot 9)} = -72$$
$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\left(\left|-\frac{3}{4}\right| \cdot \left|\frac{1}{3}\right|\right) = -\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}$$
$$(-14.3)(0) = 0$$

Los ejemplos anteriores ilustran un proceso paso a paso para multiplicar números reales. Sin embargo, en la práctica, la clave es recordar que el producto de dos números positivos o dos negativos es positivo y que el producto de un número positivo y un número negativo (en cualquier orden) es negativo.

División de números reales

La relación entre multiplicación y división proporciona las bases para dividir números reales. Por ejemplo, se sabe que $8 \div 2 = 4$ porque $2 \cdot 4 = 8$. En otras palabras, el cociente de dos números se puede encontrar al observar un problema de multiplicación relacionado. En los siguientes ejemplos se usó este mismo tipo de razonamiento para determinar algunos cocientes que involucran enteros.

$$\frac{6}{-2} = -3 \quad \text{porque} \quad (-2)(-3) = 6$$

$$\frac{-12}{3} = -4 \quad \text{porque} \quad (3)(-4) = -12$$

$$\frac{-18}{-2} = 9 \quad \text{porque} \quad (-2)(9) = -18$$

$$\frac{0}{-5} = 0 \quad \text{porque} \quad (-5)(0) = 0$$

$$\frac{-8}{0} \text{ es indefinida}$$

¡Recuerde que la división entre cero es indefinida!

A continuación se presenta una descripción precisa para la **división de números reales**.

División de números reales

1. El cociente de dos números reales positivos o dos negativos es el cociente de sus valores absolutos.
2. El cociente de un número real positivo y un número real negativo, o de un número real negativo y un número real positivo, es el opuesto del cociente de sus valores absolutos.
3. El cociente de cero y cualquier número real distinto de cero es cero.
4. El cociente de cualquier número distinto de cero y cero es indefinido.

Los siguientes ejemplos ilustran esta descripción de la división. De nuevo, para propósitos prácticos, la clave es recordar si el cociente es positivo o negativo.

$$\frac{-16}{-4} = \frac{|-16|}{|-4|} = \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{28}{-7} = -\left(\frac{|28|}{|-7|}\right) = -\left(\frac{28}{7}\right) = -4$$

$$\frac{-3.6}{4} = -\left(\frac{|-3.6|}{|4|}\right) = -\left(\frac{3.6}{4}\right) = -0.9 \qquad \frac{0}{\frac{7}{8}} = 0$$

Ahora simplifique algunas expresiones numéricas que implican las cuatro operaciones básicas con números reales. Recuerde que primero se realizan multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha, antes de hacer sumas y restas.

EJEMPLO 5

Simplifique $-2\frac{1}{3} + 4\left(-\frac{2}{3}\right) - (-5)\left(-\frac{1}{3}\right)$

Solución

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{3} + 4\left(-\frac{2}{3}\right) - (-5)\left(-\frac{1}{3}\right) &= -2\frac{1}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{7}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{20}{3} \end{aligned}$$

Cambiar a fracción impropia.

■

EJEMPLO 6

Simplifique $-24 \div 4 + 8(-5) - (-5)(3)$

Solución

$$\begin{aligned} -24 \div 4 + 8(-5) - (-5)(3) &= -6 + (-40) - (-15) \\ &= -6 + (-40) + 15 \\ &= -31 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7

Simplifique $-7.3 - 2[-4.6(6 - 7)]$

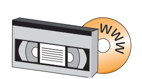
Solución

$$\begin{aligned} -7.3 - 2[-4.6(6 - 7)] = -7.3 - 2[-4.6(-1)] &= -7.3 - 2[4.6] \\ &= -7.3 - 9.2 \\ &= -7.3 + (-9.2) \\ &= -16.5 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8

Simplifique $[3(-7) - 2(9)][5(-7) + 3(9)]$.



Solución

$$\begin{aligned} [3(-7) - 2(9)][5(-7) + 3(9)] &= [-21 - 18][-35 + 27] \\ &= [-39][-8] \\ &= 312 \end{aligned}$$

■

Conjunto de problemas 1.2

Para los problemas 1-50 realice las siguientes operaciones con números reales.

1. $8 + (-15)$

2. $9 + (-18)$

3. $(-12) + (-7)$

4. $(-7) + (-14)$

5. $-8 - 14$

6. $-17 - 9$

7. $9 - 16$

8. $8 - 22$

9. $(-9)(-12)$

10. $(-6)(-13)$

11. $(5)(-14)$

12. $(-17)(4)$

13. $(-56) \div (-4)$

14. $(-81) \div (-3)$

15. $\frac{-112}{16}$

16. $\frac{-75}{5}$

17. $-2\frac{3}{8} + 5\frac{7}{8}$

18. $-1\frac{1}{5} + 3\frac{4}{5}$

19. $4\frac{1}{3} - \left(-1\frac{1}{6}\right)$

20. $1\frac{1}{12} - \left(-5\frac{3}{4}\right)$

21. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$

22. $(-8)\left(\frac{1}{3}\right)$

23. $\frac{1}{2} \div \left(-\frac{1}{8}\right)$

24. $\frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{6}\right)$

25. $0 \div (-14)$

26. $(-19) \div 0$

27. $(-21) \div 0$

28. $0 \div (-11)$

29. $-21 - 39$

30. $-23 - 38$

31. $-17.3 + 12.5$

32. $-16.3 + 19.6$

33. $21.42 - 7.29$

34. $2.73 - 8.14$

35. $-21.4 - (-14.9)$

36. $-32.6 - (-9.8)$

37. $(5.4)(-7.2)$

38. $(-8.5)(-3.3)$

39. $\frac{-1.2}{-6}$

40. $\frac{-6.3}{0.7}$

41. $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$

42. $-\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$

43. $-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)$

44. $\frac{5}{8} - \frac{11}{12}$

45. $-\frac{2}{3} - \frac{7}{9}$

46. $\frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{9}\right)$

47. $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$

48. $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

49. $\frac{3}{4} \div \left(-\frac{1}{2}\right)$

50. $\left(-\frac{5}{6}\right) \div \left(-\frac{7}{8}\right)$

Para los problemas 51-90 simplifique cada expresión numérica.

51. $9 - 12 - 8 + 5 - 6$

52. $6 - 9 + 11 - 8 - 7 + 14$

53. $-21 + (-17) - 11 + 15 - (-10)$

54. $-16 - (-14) + 16 + 17 - 19$

55. $7\frac{1}{8} - \left(2\frac{1}{4} - 3\frac{7}{8}\right)$

56. $-4\frac{3}{5} - \left(1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{10}\right)$

57. $16 - 18 + 19 - [14 - 22 - (31 - 41)]$

58. $-19 - [15 - 13 - (-12 + 8)]$

59. $[14 - (16 - 18)] - [32 - (8 - 9)]$

60. $[-17 - (14 - 18)] - [21 - (-6 - 5)]$

61. $4\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$

62. $-\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\right)$

63. $-5 + (-2)(7) - (-3)(8)$

64. $-9 - 4(-2) + (-7)(6)$

65. $\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

66. $-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$

67. $(-6)(-9) + (-7)(4)$

68. $(-7)(-7) - (-6)(4)$

69. $3(5 - 9) - 3(-6)$

70. $7(8 - 9) + (-6)(4)$

71. $(6 - 11)(4 - 9)$

72. $(7 - 12)(-3 - 2)$

73. $-6(-3 - 9 - 1)$

74. $-8(-3 - 4 - 6)$

75. $56 \div (-8) - (-6) \div (-2)$

76. $-65 \div 5 - (-13)(-2) + (-36) \div 12$

77. $-3[5 - (-2)] - 2(-4 - 9)$

78. $-2(-7 + 13) + 6(-3 - 2)$

79. $\dfrac{-6 + 24}{-3} + \dfrac{-7}{-6 - 1}$

80. $\dfrac{-12 + 20}{-4} + \dfrac{-7 - 11}{-9}$

81. $14.1 - (17.2 - 13.6)$

82. $-9.3 - (10.4 + 12.8)$

83. $3(2.1) - 4(3.2) - 2(-1.6)$

84. $5(-1.6) - 3(2.7) + 5(6.6)$

85. $7(6.2 - 7.1) - 6(-1.4 - 2.9)$

86. $-3(2.2 - 4.5) - 2(1.9 + 4.5)$

87. $\dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6}\right)$

88. $-\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4}\right)$

89. $3\left(\dfrac{1}{2}\right) + 4\left(\dfrac{2}{3}\right) - 2\left(\dfrac{5}{6}\right)$

90. $2\left(\dfrac{3}{8}\right) - 5\left(\dfrac{1}{2}\right) + 6\left(\dfrac{3}{4}\right)$

91. Use una calculadora para comprobar sus respuestas a los problemas 51-86.

92. Un buzo está 32 pies bajo el nivel del mar, cuando nota que su compañero tiene su cuchillo adicional. Asciende 13 pies para encontrar a su compañero y luego continúa bajando durante otros 50 pies. ¿Cuán abajo del nivel del mar está el buzo?

93. Jeff jugó 18 hoyos de golf el sábado. En cada uno de 6 hoyos estuvo 1 bajo par, en cada uno de 4 hoyos estuvo 2 sobre par, en 1 hoyo estuvo 3 sobre par, en cada uno de 2 hoyos tiró par, y en cada uno de 5 hoyos estuvo 1 sobre par. ¿Cómo terminó en relación con el par?

94. Después de hacer dieta durante 30 días, Ignacio perdió 18 libras. ¿Qué número describe su cambio de peso promedio por día?

95. Michael apostó $5 en cada una de las 9 carreras en el hipódromo. Sus únicas ganancias fueron $28.50 en una carrera. ¿Cuánto ganó (o perdió) durante el día?

96. Max compró un trozo de moldura de madera que medía $11\frac{3}{8}$ pies de largo. Debido a defectos en la madera, tuvo que recortar $1\frac{5}{8}$ pies de un extremo, y también tuvo que cortar $\frac{3}{4}$ del otro extremo. ¿Cuánto mide la moldura después de recortar los extremos?

97. Natasha registró las ganancias o pérdidas diarias para su compañía durante una semana. En lunes ganó 1.25 dólares; el martes ganó 0.88 dólares; el miércoles perdió 0.50 dólares; el jueves perdió 1.13 dólares; el viernes ganó 0.38 dólares. ¿Cuál fue la ganancia (o pérdida) neta durante la semana?

98. En un día de verano en Florida, la temperatura en la tarde fue de 96ºF. Después de una tormenta, la temperatura cayó a 8ºF. ¿Cuál sería la temperatura si el sol saliera de nuevo y la temperatura se elevara 5ºF?

99. Con la intención de aligerar un dragster, el equipo de carreras cambió dos ruedas traseras por ruedas que pesaban cada una 15.6 libras menos. También cambiaron el cigüeñal por uno que pesaba 4.8 libras menos. Cambiaron el eje trasero por uno que pesaba 23.7 libras menos, pero tuvieron que agregar una barra de rodamiento adicional que pesaba 10.6 libras. Si querían aligerar el dragster 50 libras, ¿cumplieron con la meta?

100. Una gran corporación tiene cinco divisiones. Dos de las divisiones tuvieron ganancias por $2 300 000 cada una. Las otras tres divisiones tuvieron, respectivamente, una pérdidas de $1 450 000, otra pérdidas de $640 000 y la tercera ganancia de $1 850 000. ¿Cuál fue la ganancia (o pérdida) neta de la corporación durante el año?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

101. Explique por qué $\frac{0}{8} = 0$, pero $\frac{8}{0}$ es indefinido.

102. El siguiente problema de simplificación es incorrecto. La respuesta debe ser −11. Encuentra y corrige el error.

$$\begin{aligned} 8 \div (-4)(2) - 3(4) \div 2 + (-1) &= (-2)(2) - 12 \div 1 \\ &= -4 - 12 \\ &= -16 \end{aligned}$$

1.3 Propiedades de los números reales y uso de exponentes

Enseguida se mencionan y discuten brevemente algunas de las propiedades básicas de los números reales. Asegúrese de comprender estas propiedades, pues no sólo facilitan el manejo con números reales, sino también representan la base para muchos cálculos algebraicos.

Propiedad de cerradura para la suma

Si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real único.

Propiedad de cerradura para la multiplicación

Si a y b son números reales, entonces ab es un número real único.

Se dice que el conjunto de los números reales es *cerrado* con respecto a la suma y también con respecto a la multiplicación. Esto es, la suma de dos números reales es un número real único, y el producto de dos números reales es un número real único. Se usa la palabra *único* para indicar *exactamente uno*.

Propiedad conmutativa de la suma

Si a y b son números reales, entonces

$$a + b = b + a$$

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Si a y b son números reales, entonces

$$ab = ba$$

Se dice que la suma y la multiplicación son operaciones conmutativas. Esto significa que el orden en el que se suman o multiplican dos números no afecta el resultado. Por ejemplo, $6 + (-8) = (-8) + 6$ y $(-4)(-3) = (-3)(-4)$. También es importante darse cuenta que la resta y la división *no* son operaciones conmutativas; el orden *sí* hace una diferencia. Por ejemplo, $3 - 4 = -1$, pero $4 - 3 = 1$. Del mismo modo, $2 \div 1 = 2$ pero $1 \div 2 = \frac{1}{2}$.

Propiedad asociativa de la suma

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Propiedad asociativa de la multiplicación

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(ab)c = a(bc)$$

La suma y la multiplicación son **operaciones binarias**. Esto es: se suman (o multiplican) dos números a la vez. Las propiedades asociativas se aplican si se deben sumar o multiplicar más de dos números; son propiedades de agrupamiento. Por ejemplo, $(-8 + 9) + 6 = -8 + (9 + 6)$; cambiar el agrupamiento de los números no afecta la suma final. Esto también es cierto para la multiplicación, que se ilustra mediante $[(-4)(-3)](2) = (-4)[(-3)(2)]$. La resta y la división *no* son operaciones asociativas. Por ejemplo, $(8 - 6) - 10 = -8$, pero $8 - (6 - 10) = 12$. Un ejemplo que demuestra que la división no es asociativa es $(8 \div 4) \div 2 = 1$, pero $8 \div (4 \div 2) = 4$.

Propiedad de identidad de la suma

Si a es cualquier número real, entonces

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Al cero se le llama elemento identidad para la suma. Esto simplemente significa que la suma de cualquier número real y cero es idénticamente el mismo número real. Por ejemplo, $-87 + 0 = 0 + (-87) = -87$.

Propiedad de identidad de la multiplicación

Si a es cualquier número real, entonces

$$a(1) = 1(a) = a$$

Al 1 se le llama elemento identidad para la multiplicación. El producto de cualquier número real y 1 es idénticamente el mismo número real. Por ejemplo, $(-119)(1) = (1)(-119) = -119$.

Propiedad de inverso aditivo

Para todo número real a, existe un número real único $-a$ tal que

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

El número real $-a$ se llama **inverso aditivo de *a*** o el **opuesto de *a***. Por ejemplo, 16 y -16 son inversos aditivos y su suma es 0. El inverso aditivo de 0 es 0.

Propiedad de multiplicación de cero

Si a es cualquier número real, entonces

$$(a)(0) = (0)(a) = 0$$

El producto de cualquier número real y cero es cero. Por ejemplo, $(-17)(0) = 0(-17) = 0$.

Propiedad de multiplicación de uno negativo

Si a es cualquier número real, entonces

$$(a)(-1) = (-1)(a) = -a$$

El producto de cualquier número real y -1 es el opuesto del número real. Por ejemplo, $(-1)(52) = (52)(-1) = -52$.

Propiedad de inverso multiplicativo

Para cualquier número real a distinto de cero, existe un número real único $\frac{1}{a}$ tal que

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}(a) = 1$$

El número $\frac{1}{a}$ se llama **inverso multiplicativo de *a*** o el **recíproco de *a***. Por ejemplo, el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$ y $2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2) = 1$. Del mismo modo, el

recíproco de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Por tanto, se dice que 2 y $\frac{1}{2}$ son recíprocos (o inversos multiplicativos) uno de otro. Puesto que la división por cero es indefinida, cero no tiene un recíproco.

Propiedad distributiva

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

La propiedad distributiva liga las operaciones de suma y multiplicación. Se dice que **la multiplicación distribuye sobre la suma**. Por ejemplo, $7(3 + 8) = 7(3) + 7(8)$. Puesto que $b - c = b + (-c)$, se sigue que **la multiplicación también distribuye sobre la resta**. Esto se puede expresar simbólicamente como $a(b - c) = ab - ac$. Por ejemplo, $6(8 - 10) = 6(8) - 6(10)$.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades de los números reales para facilitar ciertos tipos de manipulaciones.

EJEMPLO 1

Simplifique $[74 + (-36)] + 36$

Solución

En tal problema, es mucho más ventajoso agrupar -36 y 36.

$$[74 + (-36)] + 36 = 74 + [(-36) + 36] \quad \text{Por la propiedad asociativa de la suma}$$
$$= 74 + 0 = 74$$

■

EJEMPLO 2

Simplifique $[(-19)(25)](-4)$.

Solución

Es mucho más fácil agrupar 25 y -4. Por tanto

$$[(-19)(25)](-4) = (-19)[(25)(-4)] \quad \text{la propiedad asociativa de la multiplicación}$$
$$= (-19)(-100)$$
$$= 1900$$

■

EJEMPLO 3

Simplifique $17 + (-14) + (-18) + 13 + (-21) + 15 + (-33)$

Solución

Podría sumar en el orden en el que aparecen los números. Sin embargo, puesto que la suma es conmutativa y asociativa, podría cambiar el orden y agrupar en cualquier forma conveniente. Por ejemplo, podría sumar todos los enteros positivos y

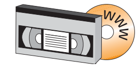
sumar todos los enteros negativos, y luego encontrar la suma de estos dos resultados. Acaso sea conveniente usar el siguiente formato vertical:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 13 \\ \underline{15} \\ 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -14 \\ -18 \\ -21 \\ \underline{-33} \\ -86 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -86 \\ \underline{45} \\ -41 \end{array}$$

■

EJEMPLO 4

Simplifique $-25(-2 + 100)$



Solución

Para este problema puede ser más sencillo aplicar primero la propiedad distributiva y luego simplificar.

$$\begin{aligned} -25(-2 + 100) &= (-25)(-2) + (-25)(100) \\ &= 50 + (-2500) \\ &= -2450 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5

Simplifique $(-87)(-26 + 25)$

Solución

Para este problema sería mejor no aplicar la propiedad distributiva, sino primero sumar los números dentro de los paréntesis y luego encontrar el producto indicado.

$$\begin{aligned} (-87)(-26 + 25) &= (-87)(-1) \\ &= 87 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

Simplifique $3.7(104) + 3.7(-4)$

Solución

Recuerde que la propiedad distributiva permite cambiar de la forma $a(b + c)$ a $ab + ac$ o de la forma $ab + ac$ a $a(b + c)$. En este problema se usa el último cambio. Por tanto

$$\begin{aligned} 3.7(104) + 3.7(-4) &= 3.7[104 + (-4)] \\ &= 3.7(100) \\ &= 370 \end{aligned}$$

■

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran un tema importante. En ocasiones la forma $a(b + c)$ es más conveniente, pero en otros momentos es mejor la forma $ab + ac$. En estos casos, como en los de otras propiedades, debe *pensar primero* y decidir si las propiedades pueden o no usarse para facilitar las manipulaciones.

Exponentes

Los exponentes se utilizan para indicar multiplicación repetida. Por ejemplo, puede escribir $4 \cdot 4 \cdot 4$ como 4^3, donde el "3 elevado" indica que 4 se usa como factor 3 veces. La siguiente definición general es útil.

Definición 1.2

Si n es un entero positivo y b es cualquier número real, entonces

$$b^n = \underbrace{bbb \cdots b}_{n \text{ factores de } b}$$

A b se le conoce como la **base** y a n como el **exponente**. La expresión b^n se puede leer "b a la n-ésima potencia". Por lo general los términos *al cuadrado* y *al cubo* se asocian con los exponentes 2 y 3, respectivamente. Por ejemplo, b^2 se lee "b al cuadrado" y b^3 como "b al cubo". Un exponente de 1 usualmente no se escribe, de modo que b^1 se escribe como b. Los siguientes ejemplos ilustran la definición 1.2.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad (0.7)^2 = (0.7)(0.7) = 0.49$$

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25 \qquad (-5)^2 = (-5)(-5) = 25$$

Tome nota especial de los últimos dos ejemplos. Observe que $(-5)^2$ significa que -5 es la base y se usa como factor dos veces. Sin embargo, -5^2 significa que 5 es la base y que, después de elevar al cuadrado, se toma el opuesto de dicho resultado.

La simplificación de expresiones numéricas que contienen exponentes no representa problemas si se tiene en mente que los exponentes se usan para indicar multiplicación repetida. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 7

Simplifique $3(-4)^2 + 5(-3)^2$

Solución

$$\begin{aligned} 3(-4)^2 + 5(-3)^2 &= 3(16) + 5(9) && \text{Encuentre las potencias.} \\ &= 48 + 45 \\ &= 93 \end{aligned}$$

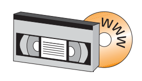
EJEMPLO 8 Simplifique $(2 + 3)^2$

Solución

$$(2 + 3)^2 = (5)^2$$ Sume el interior de los paréntesis antes de aplicar el exponente.

$$= 25$$ Eleve al cuadrado el 5. ■

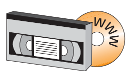
EJEMPLO 9 Simplifique $[3(-1) - 2(1)]^3$.



Solución

$$[3(-1) - 2(1)]^3 = [-3 - 2]^3$$
$$= [-5]^3$$
$$= -125$$ ■

EJEMPLO 10 Simplifique $4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2$



Solución

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 4\left(\frac{1}{8}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 3 + 2$$
$$= \frac{19}{4}$$ ■

Conjunto de problemas 1.3

Para los problemas 1-14 establezca la propiedad que justifica cada uno de los enunciados. Por ejemplo, $3 + (-4) = (-4) + 3$, debido a la propiedad conmutativa de la suma.

1. $[6 + (-2)] + 4 = 6 + [(-2) + 4]$
2. $x(3) = 3(x)$
3. $42 + (-17) = -17 + 42$
4. $1(x) = x$
5. $-114 + 114 = 0$
6. $(-1)(48) = -48$
7. $-1(x + y) = -(x + y)$
8. $-3(2 + 4) = -3(2) + (-3)(4)$
9. $12yx = 12xy$
10. $[(-7)(4)](-25) = (-7)[4(-25)]$
11. $7(4) + 9(4) = (7 + 9)4$
12. $(x + 3) + (-3) = x + [3 + (-3)]$
13. $[(-14)(8)](25) = (-14)[8(25)]$
14. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 1$

Para los problemas 15-26 simplifique cada expresión numérica. Asegúrese de sacar ventaja de las propiedades siempre que se puedan usar para facilitar los cálculos.

15. $36 + (-14) + (-12) + 21 + (-9) - 4$

16. $-37 + 42 + 18 + 37 + (-42) - 6$

17. $[83 + (-99)] + 18$

18. $[63 + (-87)] + (-64)$

19. $(25)(-13)(4)$

20. $(14)(25)(-13)(4)$

21. $17(97) + 17(3)$

22. $-86[49 + (-48)]$

23. $14 - 12 - 21 - 14 + 17 - 18 + 19 - 32$

24. $16 - 14 - 13 - 18 + 19 + 14 - 17 + 21$

25. $(-50)(15)(-2) - (-4)(17)(25)$

26. $(2)(17)(-5) - (4)(13)(-25)$

Para los problemas 27-54 simplifique cada una de las expresiones numéricas.

27. $2^3 - 3^3$

28. $3^2 - 2^4$

29. $-5^2 - 4^2$

30. $-7^2 + 5^2$

31. $(-2)^3 - 3^2$

32. $(-3)^3 + 3^2$

33. $3(-1)^3 - 4(3)^2$

34. $4(-2)^3 - 3(-1)^4$

35. $7(2)^3 + 4(-2)^3$

36. $-4(-1)^2 - 3(2)^3$

37. $-3(-2)^3 + 4(-1)^5$

38. $5(-1)^3 - (-3)^3$

39. $(-3)^2 - 3(-2)(5) + 4^2$

40. $(-2)^2 - 3(-2)(6) - (-5)^2$

41. $2^3 + 3(-1)^3(-2)^2 - 5(-1)(2)^2$

42. $-2(3)^2 - 2(-2)^3 - 6(-1)^5$

43. $(3 + 4)^2$

44. $(4 - 9)^2$

45. $[3(-2)^2 - 2(-3)^2]^3$

46. $[-3(-1)^3 - 4(-2)^2]^2$

47. $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 4(-1) - 5$

48. $(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 1$

49. $2^4 - 2(2)^3 - 3(2)^2 + 7(2) - 10$

50. $3(-3)^3 + 4(-3)^2 - 5(-3) + 7$

51. $3\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

52. $4(0.1)^2 - 6(0.1) + 0.7$

53. $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{2}{3}\right) - 4$

54. $4\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 6$

C **55.** Use su calculadora para comprobar sus respuestas a los problemas 27-52.

C Para los problemas 56-54 use su calculadora para evaluar cada expresión numérica.

56. 2^{10}

57. 3^7

58. $(-2)^8$

59. $(-2)^{11}$

60. -4^9

61. -5^6

62. $(3.14)^3$

63. $(1.41)^4$

64. $(1.73)^5$

El símbolo C señala un problema que requiere calculadora.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

65. Enuncie, con sus propias palabras, la propiedad de multiplicación del uno negativo.

66. Explique cómo se pueden usar las propiedades asociativa y conmutativa para simplificar $[(25)(97)](-4)$.

67. Su amigo sigue obteniendo una respuesta de 64 cuando simplifica -2^6. ¿Qué error comete y cómo puede ayudarlo?

68. Escriba una oración que explique con sus propias palabras cómo evaluar la expresión $(-8)^2$. Escriba también una oración que explique cómo evaluar -8^2.

69. ¿Para qué números naturales n es $(-1)^n = -1$? ¿Para qué números naturales n es $(-1)^n = 1$? Explique sus respuestas.

70. ¿El conjunto $\{0, 1\}$ es cerrado con respecto a la suma? ¿El conjunto $\{0, 1\}$ es cerrado con respecto a la multiplicación? Explique sus respuestas.

1.4 Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas como

$$2x, \quad 8xy, \quad 3xy^2, \quad -4a^2b^3c, \quad \text{y} \quad z$$

se llaman **términos**. Un término es un producto indicado que puede tener cualquier número de factores. Las variables implicadas en un término se llaman **factores literales** y el factor numérico se llama **coeficiente numérico**. Por tanto, en $8xy$, x y y son factores literales y 8 es el coeficiente numérico. El coeficiente numérico del término $-4a^2bc$ es -4. Puesto que $1(z) = z$, el coeficiente numérico del término z se sobreentiende es 1. Los términos que tienen los mismos factores literales se llaman **términos similares** o **términos semejantes**. Algunos ejemplos de términos semejantes son

$$3x \quad \text{y} \quad 14x \qquad\qquad 5x^2 \quad \text{y} \quad 18x^2$$

$$7xy \quad \text{y} \quad -9xy \qquad\qquad 9x^2y \quad \text{y} \quad -14x^2y$$

$$2x^3y^2, \quad 3x^3y^2 \quad \text{y} \quad -7x^3y^2$$

Por la propiedad simétrica de la igualdad, la propiedad distributiva se puede escribir como

$$ab + ac = a(b + c)$$

Luego se puede aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación para cambiar la forma a

$$ba + ca = (b + c)a$$

Esta última forma proporciona la base para simplificar expresiones algebraicas mediante **combinación de términos semejantes**. Considere los siguientes ejemplos.

$$3x + 5x = (3 + 5)x \qquad\qquad -6xy + 4xy = (-6 + 4)xy$$
$$= 8x \qquad\qquad = -2xy$$
$$5x^2 + 7x^2 + 9x^2 = (5 + 7 + 9)x^2 \qquad\qquad 4x - x = 4x - 1x$$
$$= 21x^2 \qquad\qquad = (4 - 1)x = 3x$$

Las expresiones más complicadas pueden requerir que primero se reordenen los términos al aplicar la propiedad conmutativa para la suma.

$$7x + 2y + 9x + 6y = 7x + 9x + 2y + 6y$$
$$= (7 + 9)x + (2 + 6)y \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$= 16x + 8y$$
$$6a - 5 - 11a + 9 = 6a + (-5) + (-11a) + 9$$
$$= 6a + (-11a) + (-5) + 9 \qquad \text{Propiedad conmutativa}$$
$$= (6 + (-11))a + 4 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$= -5a + 4$$

Tan pronto como comprenda a profundidad los distintos pasos de simplificación, tal vez quiera realizar los pasos mentalmente. Entonces podría ir de modo directo de la expresión dada a la forma simplificada, como se muestra:

$$14x + 13y - 9x + 2y = 5x + 15y$$

$$3x^2y - 2y + 5x^2y + 8y = 8x^2y + 6y$$

$$-4x^2 + 5y^2 - x^2 - 7y^2 = -5x^2 - 2y^2$$

Al aplicar la propiedad distributiva para quitar paréntesis y luego combinar términos semejantes en ocasiones se simplifica una expresión algebraica (como ilustra el siguiente ejemplo).

$$\begin{aligned} 4(x+2) + 3(x+6) &= 4(x) + 4(2) + 3(x) + 3(6) \\ &= 4x + 8 + 3x + 18 \\ &= 4x + 3x + 8 + 18 \\ &= (4+3)x + 26 \\ &= 7x + 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(y+3) - 2(y-8) &= -5(y) - 5(3) - 2(y) - 2(-8) \\ &= -5y - 15 - 2y + 16 \\ &= -5y - 2y - 15 + 16 \\ &= -7y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5(x-y) - (x+y) &= 5(x-y) - 1(x+y) \\ &= 5(x) - 5(y) - 1(x) - 1(y) \\ &= 5x - 5y - 1x - 1y \\ &= 4x - 6y \end{aligned}$$

Recuerde: $-a = -1(a)$.

Cuando se multiplican dos términos como 3 y $2x$, la propiedad asociativa para la multiplicación proporciona la base para simplificar el producto.

$$3(2x) = (3 \cdot 2)x = 6x$$

Esta idea se utiliza en el siguiente ejemplo.

$$\begin{aligned} 3(2x+5y) + 4(3x+2y) &= 3(2x) + 3(5y) + 4(3x) + 4(2y) \\ &= 6x + 15y + 12x + 8y \\ &= 6x + 12x + 15y + 8y \\ &= 18x + 23y \end{aligned}$$

Después de estar seguro de cada paso puede usar un formato más simplificado, como ilustra el siguiente ejemplo.

$$\begin{aligned} 5(a+4) - 7(a+3) &= 5a + 20 - 7a - 21 \\ &= -2a - 1 \end{aligned}$$

Tenga cuidado con este signo.

$$3(x^2 + 2) + 4(x^2 - 6) = 3x^2 + 6 + 4x^2 - 24$$
$$= 7x^2 - 18$$
$$2(3x - 4y) - 5(2x - 6y) = 6x - 8y - 10x + 30y$$
$$= -4x + 22y$$

Evaluación de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica toma un valor numérico siempre que cada variable en la expresión se sustituya con un número real. Por ejemplo, si x se sustituye con 5 y y con 9, la expresión algebraica $x + y$ se convierte en la expresión numérica $5 + 9$, que se simplifica a 14. Se dice que $x + y$ tiene un valor de 14 cuando x es igual a 5 y y es igual a 9. Si $x = -3$ y $y = 7$, entonces $x + y$ tiene un valor de $-3 + 7 = 4$. Los siguientes ejemplos ilustran el proceso para encontrar un valor de una expresión algebraica. Por lo general, el proceso se conoce como **evaluación de expresiones algebraicas**.

EJEMPLO 1

Encuentre el valor de $3x - 4y$ cuando $x = 2$ y $y = -3$

Solución

$$3x - 4y = 3(2) - 4(-3), \quad \text{cuando } x = 2 \text{ y } y = -3$$
$$= 6 + 12$$
$$= 18$$

■

EJEMPLO 2

Evalúe $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -2$ y $y = -5$

Solución

$$x^2 - 2xy + y^2 = (-2)^2 - 2(-2)(-5) + (-5)^2, \quad \text{cuando } x = -2 \text{ y } y = -5$$
$$= 4 - 20 + 25$$
$$= 9$$

■

EJEMPLO 3

Evalúe $(a + b)^2$ para $a = 6$ y $b = -2$

Solución

$$(a + b)^2 = [6 + (-2)]^2, \quad \text{cuando } a = 6 \text{ y } b = -2$$
$$= (4)^2$$
$$= 16$$

■

EJEMPLO 4

Evalúe $(3x + 2y)(2x - y)$ para $x = 4$ y $y = -1$

Solución

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(2x - y) &= [3(4) + 2(-1)][2(4) - (-1)] \quad \text{cuando } x = 4 \text{ y } y = -1\\ &= (12 - 2)(8 + 1)\\ &= (10)(9)\\ &= 90\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5

Evalúe $7x - 2y + 4x - 3y$ para $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{2}{3}$

Solución

Primero simplifique la expresión dada,

$$7x - 2y + 4x - 3y = 11x - 5y$$

Ahora puede sustituir $-\frac{1}{2}$ para x y $\frac{2}{3}$ para y

$$\begin{aligned}11x - 5y &= 11\left(-\frac{1}{2}\right) - 5\left(\frac{2}{3}\right)\\ &= -\frac{11}{2} - \frac{10}{3}\\ &= -\frac{33}{6} - \frac{20}{6} \quad \text{Cambie a fracciones equivalentes con un denominador común.}\\ &= -\frac{53}{6}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

Evalúe $2(3x + 1) - 3(4x - 3)$ para $x = -6.2$

Solución

Primero simplifique la expresión dada.

$$\begin{aligned}2(3x + 1) - 3(4x - 3) &= 6x + 2 - 12x + 9\\ &= -6x + 11\end{aligned}$$

Ahora puede sustituir -6.2 para x.

$$\begin{aligned}-6x + 11 &= -6(-6.2) + 11\\ &= 37.2 + 11\\ &= 48.2\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7

Evalúe $2(a^2 + 1) - 3(a^2 + 5) + 4(a^2 - 1)$ para $a = 10$

Solución

Primero simplifique la expresión.

$$\begin{aligned} 2(a^2 + 1) - 3(a^2 + 5) + 4(a^2 - 1) &= 2a^2 + 2 - 3a^2 - 15 + 4a^2 - 4 \\ &= 3a^2 - 17 \end{aligned}$$

Al sustituir $a = 10$ se obtiene

$$\begin{aligned} 3a^2 - 17 &= 3(10)^2 - 17 \\ &= 3(100) - 17 \\ &= 300 - 17 \\ &= 283 \end{aligned}$$

Traducción del español al álgebra

Para usar las herramientas de álgebra y resolver problemas debe poder traducir del español al álgebra. Este proceso de traducción requiere el reconocimiento de frases clave en el idioma que se traduzcan en expresiones algebraicas (que implican las operaciones de suma, resta, multiplicación y división). Algunas de estas frases clave y sus contrapartes algebraicas se mencionan en la siguiente tabla. La variable n representa el número al que se hace referencia en cada frase. Cuando traduzca, recuerde que la propiedad conmutativa se sostiene sólo para las operaciones de suma y multiplicación. Por tanto, el orden será crucial para las expresiones algebraicas que involucran resta y división.

Frase en español	Expresión algebraica
Suma	
La suma de un número y 4	$n + 4$
7 más que un número	$n + 7$
Un número más 10	$n + 10$
Un número aumentado por 6	$n + 6$
8 agregado a un número	$n + 8$
Resta	
14 menos un número	$14 - n$
12 menos que un número	$n - 12$
Un número reducido por 10	$n - 10$
La diferencia entre un número y 2	$n - 2$
5 restado de un número	$n - 5$

Frase en español	Expresión algebraica
Multiplicación	
14 veces un número	$14n$
El producto de 4 y un número	$4n$
$\frac{3}{4}$ de un número	$\frac{3}{4}n$
El doble de un número	$2n$
Multiplicar un número por 12	$12n$
División	
El cociente de 6 y un número	$\frac{6}{n}$
El cociente de un número y 6	$\frac{n}{6}$
Un número dividido entre 9	$\frac{n}{9}$
La razón de un número y 4	$\frac{n}{4}$
Mezcla de operaciones	
4 más que tres veces un número	$3n + 4$
5 menos que el doble de un número	$2n - 5$
3 veces la suma de un número y 2	$3(n + 2)$
2 más que el cociente de un número y 12	$\frac{n}{12} + 2$
7 veces la diferencia de 6 y un número	$7(6 - n)$

Un enunciado en español no siempre puede contener una palabra clave como *suma*, *diferencia*, *producto* o *cociente*. En vez de ello, el enunciado puede describir una situación física y a partir de esta descripción se deben deducir las operaciones implicadas. En los siguientes ejemplos se proporcionan algunas sugerencias para manejar tales situaciones.

EJEMPLO 8

Sonya puede escribir 65 palabras por minuto. ¿Cuántas palabras escribirá en m minutos?

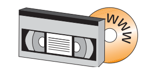
Solución

El número total de palabras escritas es igual al producto de la tasa por minuto y el número de minutos. Por tanto, Sonya debe escribir $65m$ palabras en m minutos.

■

EJEMPLO 9

Russ tiene n nickels y d dimes. Exprese esta cantidad de dinero en centavos.



Solución

Cada nickel vale 5 centavos y cada dime vale 10 centavos. La cantidad en centavos se representa por $5n + 10d$. ■

EJEMPLO 10

El costo de un saco de fertilizante de 50 libras es d dólares. ¿Cuál es el costo por libra para el fertilizante?

Solución

Calcule el costo por libra al dividir el costo total por el número de libras. El costo por libra se representa mediante $\frac{d}{50}$. ■

El enunciado en español que se quiere traducir en álgebra puede contener algunas ideas geométricas. Las tablas 1.1 y 1.2 contienen algunas de las relaciones básicas que pertenecen a la medición lineal en los sistemas inglés y métrico, respectivamente.

Tabla 1.1 Sistema inglés

12 pulgadas =	1 pie
3 pies =	1 yarda
1760 yardas =	1 milla
5280 pies =	1 milla

Tabla 1.2 Sistema métrico

1 kilómetro =	1000 metros
1 hectómetro =	100 metros
1 decámetro =	10 metros
1 decímetro =	0.1 metros
1 centímetro =	0.01 metros
1 milímetro =	0.001 metros

EJEMPLO 11

La distancia entre dos ciudades es k kilómetros. Exprese esta distancia en metros.

Solución

Dado que 1 kilómetro es igual a 1000 metros, la distancia en metros se representa como $1000k$. ■

EJEMPLO 12

La longitud de una soga es y yardas y f pies. Exprese esta longitud en pulgadas.

Solución

Dado que 1 pie es igual a 12 pulgadas y 1 yarda es igual a 36 pulgadas, la longitud de la soga en pulgadas se puede representar como $36y + 12f$. ■

EJEMPLO 13

La longitud de un rectángulo es l centímetros y el ancho es w centímetros. Exprese el perímetro del rectángulo en metros.

Solución

Puede resultar útil un bosquejo del rectángulo (figura 1.7).

Figura 1.7

El perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de los cuatro lados. Por ende, el perímetro en centímetros es $l + w + l + w$, que se simplifica a $2l + 2w$. Ahora, dado que 1 centímetro es igual a 0.01 metros, el perímetro, en metros, es $0.01(2l + 2w)$. Esto también se podría escribir como $\frac{2l + 2w}{100} = \frac{2(l + w)}{100} = \frac{l + w}{50}$.

Conjunto de problemas 1.4

Simplifique las expresiones algebraicas en los problemas 1-14 mediante la combinación de términos similares.

1. $-7x + 11x$
2. $5x - 8x + x$
3. $5a^2 - 6a^2$
4. $12b^3 - 17b^3$
5. $4n - 9n - n$
6. $6n + 13n - 15n$
7. $4x - 9x + 2y$
8. $7x - 9y - 10x - 13y$
9. $-3a^2 + 7b^2 + 9a^2 - 2b^2$
10. $-xy + z - 8xy - 7z$
11. $15x - 4 + 6x - 9$
12. $5x - 2 - 7x + 4 - x - 1$
13. $5a^2b - ab^2 - 7a^2b$
14. $8xy^2 - 5x^2y + 2xy^2 + 7x^2y$

Simplifique las expresiones algebraicas en los problemas 15-34 al quitar los paréntesis y combinar términos semejantes.

15. $3(x + 2) + 5(x + 3)$
16. $5(x - 1) + 7(x + 4)$
17. $-2(a - 4) - 3(a + 2)$
18. $-7(a + 1) - 9(a + 4)$
19. $3(n^2 + 1) - 8(n^2 - 1)$
20. $4(n^2 + 3) + (n^2 - 7)$
21. $-6(x^2 - 5) - (x^2 - 2)$
22. $3(x + y) - 2(x - y)$
23. $5(2x + 1) + 4(3x - 2)$
24. $5(3x - 1) + 6(2x + 3)$
25. $3(2x - 5) - 4(5x - 2)$
26. $3(2x - 3) - 7(3x - 1)$
27. $-2(n^2 - 4) - 4(2n^2 + 1)$
28. $-4(n^2 + 3) - (2n^2 - 7)$
29. $3(2x - 4y) - 2(x + 9y)$
30. $-7(2x - 3y) + 9(3x + y)$
31. $3(2x - 1) - 4(x + 2) - 5(3x + 4)$
32. $-2(x - 1) - 5(2x + 1) + 4(2x - 7)$
33. $-(3x - 1) - 2(5x - 1) + 4(-2x - 3)$
34. $4(-x - 1) + 3(-2x - 5) - 2(x + 1)$

Evalúe las expresiones algebraicas en los problemas 35-57 para los valores dados de las variables.

35. $3x + 7y$, $x = -1$ y $y = -2$
36. $5x - 9y$, $x = -2$ y $y = 5$

37. $4x^2 - y^2$, $x = 2$ y $y = -2$

38. $3a^2 + 2b^2$, $a = 2$ y $b = 5$

39. $2a^2 - ab + b^2$, $a = -1$ y $b = -2$

40. $-x^2 + 2xy + 3y^2$, $x = -3$ y $y = 3$

41. $2x^2 - 4xy - 3y^2$, $x = 1$ y $y = -1$

42. $4x^2 + xy - y^2$, $x = 3$ y $y = -2$

43. $3xy - x^2y^2 + 2y^2$, $x = 5$ y $y = -1$

44. $x^2y^3 - 2xy + x^2y^2$, $x = -1$ y $y = -3$

45. $7a - 2b - 9a + 3b$, $a = 4$ y $b = -6$

46. $-4x + 9y - 3x - y$, $x = -4$ y $y = 7$

47. $(x - y)^2$, $x = 5$ y $y = -3$

48. $2(a + b)^2$, $a = 6$ y $b = -1$

49. $-2a - 3a + 7b - b$, $a = -10$ y $b = 9$

50. $3(x - 2) - 4(x + 3)$, $x = -2$

51. $-2(x + 4) - (2x - 1)$, $x = -3$

52. $-4(2x - 1) + 7(3x + 4)$, $x = 4$

53. $2(x - 1) - (x + 2) - 3(2x - 1)$, $x = -1$

54. $-3(x + 1) + 4(-x - 2) - 3(-x + 4)$, $x = -\frac{1}{2}$

55. $3(x^2 - 1) - 4(x^2 + 1) - (2x^2 - 1)$, $x = \frac{2}{3}$

56. $2(n^2 + 1) - 3(n^2 - 3) + 3(5n^2 - 2)$, $n = \frac{1}{4}$

57. $5(x - 2y) - 3(2x + y) - 2(x - y)$, $x = \frac{1}{3}$ y $y = -\frac{3}{4}$

C Para los problema 58-63 use su calculadora y evalúe cada una de las expresiones algebraicas para los valores indicados. Exprese las respuestas finales al décimo más cercano.

58. πr^2, $\pi = 3.14$ y $r = 2.1$

59. πr^2, $\pi = 3.14$ y $r = 8.4$

60. $\pi r^2 h$, $\pi = 3.14, r = 1.6$ y $h = 11.2$

61. $\pi r^2 h$, $\pi = 3.14, r = 4.8$ y $h = 15.1$

62. $2\pi r^2 + 2\pi rh$, $\pi = 3.14, r = 3.9$ y $h = 17.6$

63. $2\pi r^2 + 2\pi rh$, $\pi = 3.14, r = 7.8$ y $h = 21.2$

Para los problemas 64-78 traduzca cada frase en español en una expresión algebraica y use n para representar el número desconocido.

64. La suma de un número y 4

65. Un número aumentado por 12

66. Un número reducido por 7

67. Cinco menos que un número

68. Un número restado de 75

69. El producto de un número y 50

70. Un tercio de un número

71. Cuatro menos que la mitad de un número

72. Siete más que tres veces un número

73. El cociente de un número y 8

74. El cociente de 50 y un número

75. Nueve menos que el doble de un número

76. Seis más que un tercio de un número

77. Diez veces la diferencia de un número y 6

78. Doce veces la suma de un número y 7

Para los problemas 79-99 responda las preguntas con una expresión algebraica.

79. Brian tiene n años de edad. ¿Cuántos años tendrá en 20 años?

80. Crystal tiene n años de edad. ¿Cuántos años tenía hace 5 años?

81. Pam tiene t años de edad y su madre es 3 años menor que el doble de la edad de Pam. ¿Cuál es la edad de la mamá de Pam?

82. La suma de dos números es 65 y uno de los números es x. ¿Cuál es el otro número?

83. La diferencia de dos números es 47 y el número más pequeño es n. ¿Cuál es el otro número?

84. El producto de dos números es 98 y uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?

85. El cociente de dos números es 8 y el número más pequeño es y. ¿Cuál es el otro número?

86. El perímetro de un cuadrado es c centímetros. ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?

87. El perímetro de un cuadrado es m metros. ¿Cuánto mide, en centímetros, cada lado del cuadrado?

88. Jesse tiene n monedas de cinco centavos, d monedas de diez centavos y q monedas de 25 centavos en su alcancía. ¿Cuánto dinero, en centavos, tiene en su alcancía?

89. Tina tiene c centavos en monedas de 25 centavos. ¿Cuántas monedas de 25 centavos tiene?

90. Si n representa un número entero positivo, ¿qué representa el siguiente número entero positivo más grande?

91. Si n representa un entero impar, ¿qué representa el siguiente entero impar más grande?

92. Si n representa un entero par, ¿qué representa el siguiente entero par más grande?

93. El costo de una caja de dulces de 5 libras es c centavos. ¿Cuál es el precio por libra?

El símbolo C señala un problema que requiere calculadora.

94. El salario anual de Larry es d dólares. ¿Cuál es su salario mensual?

95. El salario mensual de Mila es d dólares. ¿Cuál es su salario anual?

96. El perímetro de un cuadrado es i pulgadas. ¿Cuál es el perímetro expresado en pies?

97. El perímetro de un rectángulo es y yardas y f pies. ¿Cuál es el perímetro expresado en pies?

98. La longitud de un segmento de recta es d decímetros. ¿Cuán largo es el segmento de recta, expresado en metros?

99. La distancia entre dos ciudades es m millas. ¿Cuán lejos es esto, expresado en pies?

C **100.** Use su calculadora para comprobar sus respuestas a los problemas 35-54.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

101. Explique la diferencia entre simplificar una expresión numérica y evaluar una expresión algebraica.

102. ¿Cómo ayudaría a alguien que se le dificulta expresar n monedas de cinco centavos y d monedas de diez centavos en términos de centavos?

103. Cuando se le pide escribir una expresión algebraica para "8 más que un número", usted escribe $x + 8$ y otro estudiante escribe $8 + x$. ¿Ambas expresiones son correctas? Explique su respuesta.

104. Cuando se le pide escribir una expresión algebraica para "6 menos que un número", usted escribe $x - 6$ y otro estudiante escribe $6 - x$. ¿Ambas expresiones son correctas? Explique su respuesta.

Capítulo 1 Resumen

(1.1) Un **conjunto** es una colección de objetos; los objetos se llaman **elementos** o **miembros** del conjunto. El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si y sólo si cada miembro de A también es miembro de B. Los conjuntos de **números naturales**, **números enteros positivos**, **enteros**, **números racionales** y **números irracionales** son todos subconjuntos del conjunto de los **números reales**.

Las **expresiones numéricas** se pueden evaluar al realizar las operaciones en el siguiente orden.

1. Realice las operaciones dentro de los paréntesis y arriba y abajo de las barras de fracción.
2. Encuentre todas las potencias o conviértalas a la multiplicación indicada.
3. Realice todas las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.
4. Realice todas las sumas y restas en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.

(1.2) El **valor absoluto** de un número real a se define del modo siguiente:

1. Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.
2. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Operaciones con números reales

Suma

1. La suma de dos números reales positivos es la suma de sus valores absolutos.
2. La suma de dos números reales negativos es lo opuesto de la suma de sus valores absolutos.
3. La suma de un número positivo y uno negativo se encuentra del modo siguiente:
   a. Si el número positivo tiene el valor absoluto más grande, entonces la suma es la diferencia de sus valores absolutos cuando el valor absoluto más pequeño se resta del valor absoluto más grande.
   b. Si el número negativo tiene el valor absoluto más grande, entonces la suma es el opuesto de la diferencia de sus valores absolutos cuando el valor absoluto más pequeño se resta del valor absoluto más grande.

Resta

Aplicar el principio de que $a - b = a + (-b)$ cambia cada problema de resta a un problema equivalente de suma. Entonces se pueden seguir las reglas para la suma.

Multiplicación

1. El producto de dos números reales positivos o dos negativos es el producto de sus valores absolutos.
2. El producto de un número real positivo y uno negativo es el opuesto del producto de sus valores absolutos.

División

1. El cociente de dos números reales positivos o dos negativos es el cociente de sus valores absolutos.
2. El cociente de un número real positivo y uno negativo es el opuesto del cociente de sus valores absolutos.

(1.3) Las siguientes propiedades básicas de los números reales ayudan con las manipulaciones numéricas y sirven como base para los cálculos algebraicos.

Propiedades de cerradura

$a + b$ es un número real

ab es un número real

Propiedades conmutativas

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

Propiedades asociativas

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(ab)c = a(bc)$$

Propiedades de identidad

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a(1) = 1(a) = a$$

Propiedad de inverso aditivo

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Propiedad de multiplicación de cero

$$a(0) = 0(a) = 0$$

Propiedad de multiplicación de uno negativo

$$-1(a) = a(-1) = -a$$

Propiedad de inverso multiplicativo

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$$

Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab + ac$$

(1.4) Las expresiones algebraicas como

$$2x, \quad 8xy, \quad 3xy^2, \quad -4a^2b^3c \quad \text{y} \quad z$$

se llaman **términos**. Un término es un producto indicado y puede tener cualquier número de factores. A las variables en un término se les llama **factores literales** y al factor numérico se le llama **coeficiente numérico**. Los términos que tienen los mismos factores literales se llaman **términos similares** o **semejantes**.

La propiedad distributiva en la forma $ba + ca = (b + c)a$ sirve como base para la **combinación de términos semejantes**. Por ejemplo,

$$3x^2y + 7x^2y = (3 + 7)x^2y = 10x^2y$$

Para traducir frases en español en expresiones algebraicas debe familiarizarse con las frases clave que señalan si es necesario encontrar una suma, diferencia, producto o cociente.

Capítulo 1 Conjunto de problemas de repaso

1. De esta lista $0, \sqrt{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{25}{3}, -\sqrt{3}, -8, 0.34, 0.2\overline{3}, 67$ y $\frac{9}{7}$, identifique cada uno de los siguientes:

a. Los números naturales

b. Los enteros

c. Los enteros no negativos

d. Los números racionales

e. Los números irracionales

Para los problemas 2-10 establezca la propiedad de igualdad o la propiedad de los números reales que justifica cada uno de los enunciados. Por ejemplo, $6(-7) = -7(6)$ debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación; y si $2 = x + 3$, entonces $x + 3 = 2$ es cierto debido a la propiedad simétrica de la igualdad.

2. $7 + (3 + (-8)) = (7 + 3) + (-8)$

3. Si $x = 2$ y $x + y = 9$, entonces $2 + y = 9$.

4. $-1(x + 2) = -(x + 2)$

5. $3(x + 4) = 3(x) + 3(4)$

6. $[(17)(4)](25) = (17)[(4)(25)]$

7. $x + 3 = 3 + x$

8. $3(98) + 3(2) = 3(98 + 2)$

9. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 1$

10. Si $4 = 3x - 1$, entonces $3x - 1 = 4$.

Para los problemas 11-22 simplifique cada una de las expresiones numéricas.

11. $-8\frac{1}{4} + \left(-4\frac{5}{8}\right) - \left(-6\frac{3}{8}\right)$

12. $9\frac{1}{3} - 12\frac{1}{2} + \left(-4\frac{1}{6}\right) - \left(-1\frac{1}{6}\right)$

13. $-8(2) - 16 \div (-4) + (-2)(-2)$

14. $4(-3) - 12 \div (-4) + (-2)(-1) - 8$

15. $-3(2 - 4) - 4(7 - 9) + 6$

16. $[48 + (-73)] + 74$

17. $[5(-2) - 3(-1)][-2(-1) + 3(2)]$

18. $-4^2 - 2^3$

19. $(-2)^4 + (-1)^3 - 3^2$

20. $2(-1)^2 - 3(-1)(2) - 2^2$

21. $[4(-1) - 2(3)]^2$

22. $3 - [-2(3 - 4)] + 7$

Para los problemas 23-32 simplifique cada una de las expresiones algebraicas al combinar términos similares.

23. $3a^2 - 2b^2 - 7a^2 - 3b^2$

24. $4x - 6 - 2x - 8 + x + 12$

25. $\frac{1}{5}ab^2 - \frac{3}{10}ab^2 + \frac{2}{5}ab^2 + \frac{7}{10}ab^2$

26. $-\frac{2}{3}x^2y - \left(-\frac{3}{4}x^2y\right) - \frac{5}{12}x^2y - 2x^2y$

27. $3(2n^2 + 1) + 4(n^2 - 5)$

28. $-2(3a - 1) + 4(2a + 3) - 5(3a + 2)$

29. $-(n - 1) - (n + 2) + 3$

30. $3(2x - 3y) - 4(3x + 5y) - x$

31. $4(a - 6) - (3a - 1) - 2(4a - 7)$

32. $-5(x^2 - 4) - 2(3x^2 + 6) + (2x^2 - 1)$

Para los problemas 33-42 evalúe cada una de las expresiones algebraicas para los valores dados de las variables.

33. $-5x + 4y$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = -1$

34. $3x^2 - 2y^2$ para $x = \frac{1}{4}$ y $y = -\frac{1}{2}$

35. $-5(2x - 3y)$ para $x = 1$ y $y = -3$

36. $(3a - 2b)^2$ para $a = -2$ y $b = 3$

37. $a^2 + 3ab - 2b^2$ para $a = 2$ y $b = -2$

38. $3n^2 - 4 - 4n^2 + 9$ para $n = 7$

39. $3(2x - 1) + 2(3x + 4)$ para $x = 1.2$

40. $-4(3x - 1) - 5(2x - 1)$ para $x = -2.3$

41. $2(n^2 + 3) - 3(n^2 + 1) + 4(n^2 - 6)$ para $n = -\frac{2}{3}$

42. $5(3n - 1) - 7(-2n + 1) + 4(3n - 1)$ para $n = \frac{1}{2}$

Para los problemas 43-50 traduzca cada frase en español a una expresión algebraica y use n para representar el número desconocido.

43. Cuatro aumentado por el doble de un número

44. Cincuenta restado de tres veces un número

45. Seis menos que dos tercios de un número

46. Diez veces la diferencia de un número y 14

47. Ocho restado de cinco veces un número

48. El cociente de un número y tres menos que el número

49. Tres menos que cinco veces la suma de un número y 2

50. Tres cuartos de la suma de un número y 12

Para los problemas 51-60 responda la pregunta con una expresión algebraica.

51. La suma de dos números es 37 y uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?

52. Yuriko puede escribir w palabras en una hora. ¿Cuál es su tasa de escritura por minuto?

53. Harry tiene y años de edad. Su hermano es 7 años menor que el doble de la edad de Harry. ¿Cuántos años tiene el hermano de Harry?

54. Si n representa un múltiplo de 3, ¿qué representa el siguiente múltiplo más grande que 3?

55. Celia tiene p centavos, n monedas de cinco centavos y q monedas de 25 centavos. ¿Cuánto dinero, en centavos, tiene Celia?

56. El perímetro de un cuadrado es i pulgadas. ¿Cuán largo, en pies, es cada lado del cuadrado?

57. La longitud de un rectángulo es y yardas y el ancho es f pies. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo expresado en pulgadas?

58. La longitud de un trozo de alambre es d decímetros. ¿Cuál es la longitud expresada en centímetros?

59. Joan mide f pies e i pulgadas de alto. ¿Cuán alta es en pulgadas?

60. El perímetro de un rectángulo es 50 centímetros. Si el rectángulo mide c centímetros de largo, ¿cuán ancho es?

Capítulo 1 Examen

1. Enuncie la propiedad de igualdad que justifica escribir $x + 4 = 6$ para $6 = x + 4$.
2. Enuncie la propiedad de los números reales que justifica escribir $5(10 + 2)$ como $5(10) + 5(2)$.

Para los problemas 3-11 simplifique cada expresión numérica.

3. $-4 - (-3) + (-5) - 7 + 10$
4. $7 - 8 - 3 + 4 - 9 - 4 + 2 - 12$
5. $5\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 7\left(-\frac{2}{3}\right) + 1$
6. $(-6) \cdot 3 \div (-2) - 8 \div (-4)$
7. $-\frac{1}{2}(3 - 7) - \frac{2}{5}(2 - 17)$
8. $[48 + (-93)] + (-49)$
9. $3(-2)^3 + 4(-2)^2 - 9(-2) - 14$
10. $[2(-6) + 5(-4)][-3(-4) - 7(6)]$
11. $[-2(-3) - 4(2)]^5$
12. Simplifique $6x^2 - 3x - 7x^2 - 5x - 2$ mediante combinación de términos similares.
13. Simplifique $3(3n - 1) - 4(2n + 3) + 5(-4n - 1)$ al remover paréntesis y combinar términos semejantes.

Para los problemas 14-20, evalúe cada expresión algebraica para los valores dados de las variables.

14. $-7x - 3y$ para $x = -6$ y $y = 5$
15. $3a^2 - 4b^2$ para $a = -\frac{3}{4}$ y $b = \frac{1}{2}$
16. $6x - 9y - 8x + 4y$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{1}{3}$
17. $-5n^2 - 6n + 7n^2 + 5n - 1$ para $n = -6$
18. $-7(x - 2) + 6(x - 1) - 4(x + 3)$ para $x = 3.7$
19. $-2xy - x + 4y$ para $x = -3$ y $y = 9$
20. $4(n^2 + 1) - (2n^2 + 3) - 2(n^2 + 3)$ para $n = -4$

Para los problemas 21 y 22 traduzca la frase en español a una expresión algebraica usando ***n*** para representar el número desconocido.

21. Treinta restado de seis veces un número
22. Cuatro más que tres veces la suma de un número y 8

Para los problemas 23-25 responda cada pregunta con una expresión algebraica.

23. El producto de dos números es 72 y uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?
24. Tao tiene n monedas de cinco centavos, d monedas de diez centavos y q monedas de 25 centavos. ¿Cuánto dinero, en centavos, tiene?
25. La longitud de un rectángulo es x yardas y el ancho es y pies. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo, expresado en pies?

2

Ecuaciones, desigualdades y resolución de problemas

La mayoría de los compradores sacan ventaja de los descuentos que ofrecen los detallistas. Cuando se toman decisiones acerca de las compras, es benéfico poder calcular los precios de venta.

Un vendedor de artículos deportivos compró un *putter* por $18. Quiere poner un precio al *putter* para obtener una ganancia de 40% en el precio de venta. ¿Qué precio debe poner al *putter*? Puede usar la ecuación $s = 18 + 0.4s$ para determinar que el *putter* se debe vender en $30.

A lo largo de este texto se desarrollarán habilidades algebraicas que se usarán para ayudarlo a resolver ecuaciones y desigualdades, y luego se usarán ecuaciones y desigualdades para resolver problemas aplicados. En este capítulo se revisan y amplían los conceptos que son importantes para el desarrollo de las habilidades para resolver problemas.

2.1 Resolución de ecuaciones de primer grado

En la sección 1.1 se indicó que una igualdad (ecuación) es un enunciado donde dos símbolos, o grupos de símbolos, son nombres para el mismo número. Ahora, además, se debe enunciar que una ecuación puede ser cierta o falsa. Por ejemplo, la ecuación $3 + (-8) = -5$ es cierta, pero la ecuación $-7 + 4 = 2$ es falsa.

Las **ecuaciones algebraicas** contienen una o más variables. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones algebraicas.

$$3x + 5 = 8 \qquad 4y - 6 = -7y + 9 \qquad x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$3x + 5y = 4 \qquad x^3 + 6x^2 - 7x - 2 = 0$$

Una ecuación algebraica como $3x + 5 = 8$ no es ni cierta ni falsa, y con frecuencia se le llama "oración abierta". Cada vez que un número se sustituye por x, la ecuación algebraica $3x + 5 = 8$ se convierte en un enunciado numérico que es cierto o falso. Por ejemplo, si $x = 0$, entonces $3x + 5 = 8$ se convierte en $3(0) + 5 = 8$, que es un enunciado falso. Si $x = 1$, entonces $3x + 5 = 8$ se convierte en $3(1) + 5 = 8$, que es un enunciado verdadero. Por **resolución de una ecuación** se entiende el proceso de encontrar el número (o números) que hace a una ecuación algebraica un enunciado numérico verdadero. A tales números se les llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y se dice que **satisfacen** la ecuación. Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación se le conoce como **conjunto solución**. Por ende, $\{1\}$ es el conjunto solución de $3x + 5 = 8$.

En este capítulo se considerarán técnicas para resolver **ecuaciones de primer grado con una variable**. Esto significa que las ecuaciones sólo contienen una variable y que esta variable tiene un exponente de 1. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones de primer grado con una variable.

$$3x + 5 = 8 \qquad \frac{2}{3}y + 7 = 9$$

$$7a - 6 = 3a + 4 \qquad \frac{x-2}{4} = \frac{x-3}{5}$$

Las **ecuaciones equivalentes** son ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo.

1. $3x + 5 = 8$
2. $3x = 3$
3. $x = 1$

son todas ecuaciones equivalentes porque $\{1\}$ es el conjunto solución de cada una.

El procedimiento general para resolver una ecuación es continuar sustituyendo la ecuación dada con ecuaciones equivalentes, pero más simples, hasta obtener una ecuación de la forma *variable* = *constante* o *constante* = *variable*. En consecuencia, en el ejemplo anterior, $3x + 5 = 8$ se simplificó a $3x = 3$, que se simplificó aún más a $x = 1$, a partir de lo cual es obvio el conjunto solución $\{1\}$.

Para resolver ecuaciones es necesario usar las diversas propiedades de la igualdad. Además de las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva y de sustitución que se mencionaron en la sección 1.1, las siguientes propiedades de la igualdad juegan un papel importante.

Propiedad aditiva de la igualdad

Para todo número real a, b y c,

$a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$

Propiedad multiplicativa de la igualdad

Para todo número real a, b y c, donde $c \neq 0$,

$a = b$ si y sólo si $ac = bc$

La propiedad aditiva de la igualdad afirma que, cuando el mismo número se suma a ambos lados de una ecuación, se produce una ecuación equivalente. La propiedad multiplicativa de la igualdad afirma que se obtiene una ecuación equivalente siempre que ambos lados de una ecuación se multipliquen por el mismo número real *distinto de cero*. Los siguientes ejemplos demuestran el uso de estas propiedades para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 1

Resuelva $2x - 1 = 13$

Solución

$$2x - 1 = 13$$

$$2x - 1 + 1 = 13 + 1 \qquad \text{Sume 1 a ambos lados.}$$

$$2x = 14$$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(14) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{2}.$$

$$x = 7$$

El conjunto solución es $\{7\}$. ■

Para comprobar una solución aparente puede sustituirla en la ecuación original y ver si obtiene un enunciado numérico verdadero.

✔ **Comprobación**

$$2x - 1 = 13$$

$$2(7) - 1 \stackrel{?}{=} 13$$

$$14 - 1 \stackrel{?}{=} 13$$

$$13 = 13$$

Ahora se sabe que {7} es el conjunto solución de $2x - 1 = 13$. En este texto no se mostrarán las comprobaciones para todos los ejemplos, pero recuerde que la comprobación es una forma de detectar errores aritméticos.

EJEMPLO 2 Simplifique $-7 = -5a + 9$

Solución

$$-7 = -5a + 9$$

$$-7 + (-9) = 5a + 9 + (-9) \qquad \text{Sume } -9 \text{ a ambos lados.}$$

$$-16 = -5a$$

$$-\frac{1}{5}(-16) = -\frac{1}{5}(-5a) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{5}.$$

$$\frac{16}{5} = a$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{16}{5}\right\}$. ■

Note que, en el ejemplo 2, la ecuación final es $\frac{16}{5} = a$ en lugar de $a = \frac{16}{5}$. Técnicamente, la propiedad simétrica de la igualdad (si $a = b$, entonces $b = a$) permitiría cambiar de $\frac{16}{5} = a$ a $a = \frac{16}{5}$, pero tal cambio no es necesario para determinar que la solución es $\frac{16}{5}$. Observe que podría usar la propiedad simétrica desde el principio para cambiar $-7 = -5a + 9$ a $-5a + 9 = -7$; algunas personas prefieren tener la variable en el lado izquierdo de la ecuación.

Clarifique otro punto. Las propiedades de la igualdad se establecieron en términos de sólo dos operaciones: suma y multiplicación. También podría incluir las operaciones de resta y división en los enunciados de las propiedades. Esto es: podría pensar en términos de restar el mismo número de ambos lados de una ecuación y también en términos de dividir ambos lados de una ecuación por el mismo número distinto de cero. Por ejemplo, en la solución del ejemplo 2, podría restar 9 de ambos lados en lugar de sumar −9 a ambos lados. Del mismo modo, podría dividir ambos lados entre −5 en lugar de multiplicar ambos lados por $-\frac{1}{5}$.

EJEMPLO 3 Resuelva $7x - 3 = 5x + 9$

Solución

$$7x - 3 = 5x + 9$$

$$7x - 3 + (-5x) = 5x + 9 + (-5x) \qquad \text{Sume } -5x \text{ a ambos lados.}$$

$$2x - 3 = 9$$

$$2x - 3 + 3 = 9 + 3 \qquad \text{Sume 3 a ambos lados.}$$

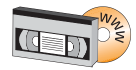
$$2x = 12$$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(12) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{2}.$$

$$x = 6$$

El conjunto solución es $\{6\}$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $4(y - 1) + 5(y + 2) = 3(y - 8)$.



Solución

$$4(y - 1) + 5(y + 2) = 3(y - 8)$$

$$4y - 4 + 5y + 10 = 3y - 24 \qquad \text{Quite los paréntesis al aplicar la propiedad distributiva.}$$

$$9y + 6 = 3y - 24 \qquad \text{Simplifique el lado izquierdo al combinar términos similares.}$$

$$9y + 6 + (-3y) = 3y - 24 + (-3y) \qquad \text{Sume } -3y \text{ a ambos lados.}$$

$$6y + 6 = -24$$

$$6y + 6 + (-6) = -24 + (-6) \qquad \text{Sume } -6 \text{ a ambos lados.}$$

$$6y = -30$$

$$\frac{1}{6}(6y) = \frac{1}{6}(-30) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{6}.$$

$$y = -5$$

El conjunto solución es $\{-5\}$. ■

El proceso de resolver ecuaciones de primer grado con una variable se puede resumir del modo siguiente:

Paso 1 Simplifique ambos lados de la ecuación tanto como sea posible.

Paso 2 Use la propiedad aditiva de la igualdad para aislar un término que contenga la variable en un lado de la ecuación y una constante en el otro lado.

Paso 3 Use la propiedad multiplicativa de la igualdad para formar el coeficiente de la variable 1; esto es: multiplique ambos lados de la ecuación por el recíproco del coeficiente numérico de la variable. Ahora debe ser obvio el conjunto solución.

Paso 4 Compruebe cada solución mediante la sustitución en la ecuación original y verifique que el enunciado numérico resultante es verdadero.

Uso de ecuaciones para resolver problemas

Para aplicar las herramientas del álgebra en la resolución de problemas debe traducir, de ida y vuelta, entre el lenguaje verbal y el lenguaje del álgebra. De manera más específica, necesita traducir oraciones en español a ecuaciones algebraicas. Tales traducciones permiten usar el conocimiento de la resolución de ecuaciones para resolver problemas verbales. Considere un ejemplo.

PROBLEMA 1

Si resta 27 de tres veces cierto número, el resultado es 18. Encuentre el número.

Solución

Sea n el número a encontrar. La oración "Si resta 27 de tres veces cierto número, el resultado es 18" se traduce en la ecuación $3n - 27 = 18$. Al resolver esta ecuación se obtiene

$$3n - 27 = 18$$

$$3n = 45 \quad \text{Sume 27 a ambos lados.}$$

$$n = 15 \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{3}.$$

El número a encontrar es 15. ■

Con frecuencia, al enunciado "Sea n el número a encontrar" se le conoce como **declaración de la variable**. Es necesario elegir una letra a usar como variable e indicar qué representa para un problema específico. Esto puede parecer una idea insignificante, pero conforme los problemas se vuelvan más complejos, el proceso de declarar la variable se vuelve incluso más importante. Más aún, es cierto que probablemente podría resolver un problema como el problema 1 sin establecer una ecuación algebraica. Sin embargo, conforme los problemas aumentan en dificultad, la traducción del español al álgebra se vuelve un tema central. Por tanto, incluso con estos problemas relativamente sencillos, se le sugiere concentrarse en el proceso de traducción.

El siguiente ejemplo implica el uso de enteros. Recuerde que el conjunto de enteros consiste de $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Más aún, los enteros se pueden clasificar como pares $\{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, o impares $\{\ldots -3, -1, 1, 3, \ldots\}$.

PROBLEMA 2

La suma de tres enteros consecutivos es 13 más grande que el doble del menor de los tres enteros. Encuentre los enteros.

Solución

Puesto que los enteros consecutivos difieren por 1, se les representará del modo siguiente: sea n el menor de los tres enteros consecutivos; entonces $n + 1$ representa el segundo más grande y $n + 2$ representa el más grande.

$$\underbrace{n + (n + 1) + (n + 2)}_{\text{La suma de los tres enteros consecutivos}} = \underbrace{2n + 13}_{\text{13 más grande que el doble del menor}}$$

$$3n + 3 = 2n + 13$$

$$n = 10$$

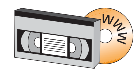
Los tres enteros consecutivos son 10, 11 y 12. ■

Para comprobar las respuestas al problema 2 debe determinar si satisfacen o no las condiciones establecidas en el problema original. Puesto que 10, 11 y 12 son enteros consecutivos cuya suma es 33, y dado que el doble del menor más 13 también es 33 ($2(10) + 13 = 33$), se sabe que las respuestas son correctas. (Recuerde, al comprobar un resultado para un problema verbal, *no* es suficiente comprobar el resultado en la ecuación establecida para resolver el problema; ¡la ecuación en sí puede tener un error!)

En los dos problemas anteriores, la ecuación que se formó fue casi una traducción directa de una oración en el enunciado del problema. Ahora considere una situación donde es necesario pensar en términos de un lineamiento no establecido de manera explícita en el problema.

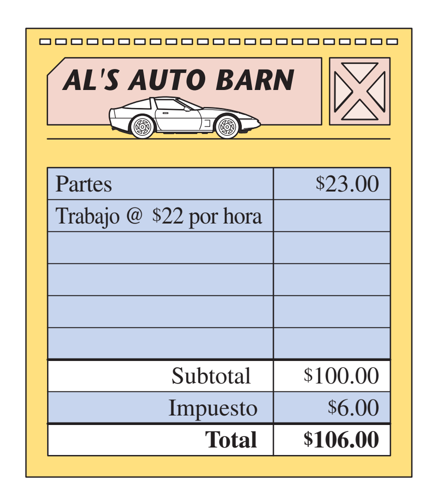
PROBLEMA 3

Khoa recibió una factura de \$106 por la reparación de su automóvil. La factura incluía \$23 por partes, \$22 por cada hora de trabajo y \$6 por impuestos. Encuentre el número de horas de trabajo.



Solución

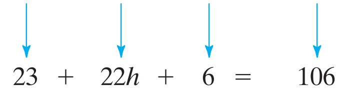
Vea la figura 2.1. Sea h el número de horas de trabajo. Entonces $22h$ representa el cargo total por trabajo.


AL'S AUTO BARN

Partes	\$23.00
Trabajo @ \$22 por hora	
Subtotal	\$100.00
Impuesto	\$6.00
Total	**\$106.00**

Figura 2.1

Puede usar una guía de *cargo por partes más cargo por trabajo más impuestos igual a factura total* para establecer la siguiente ecuación.



$$23 + 22h + 6 = 106$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$22h + 29 = 106$$
$$22h = 77$$
$$h = 3\frac{1}{2}$$

A Khoa le cobraron por $3\frac{1}{2}$ horas de trabajo. ■

Conjunto de problemas 2.1

Para los problemas 1–50 resuelva cada ecuación.

1. $3x + 4 = 16$ **2.** $4x + 2 = 22$

3. $5x + 1 = -14$ **4.** $7x + 4 = -31$

5. $-x - 6 = 8$ **6.** $8 - x = -2$

7. $4y - 3 = 21$ **8.** $6y - 7 = 41$

9. $3x - 4 = 15$ **10.** $5x + 1 = 12$

11. $-4 = 2x - 6$ **12.** $-14 = 3a - 2$

13. $-6y - 4 = 16$ **14.** $-8y - 2 = 18$

15. $4x - 1 = 2x + 7$ **16.** $9x - 3 = 6x + 18$

17. $5y + 2 = 2y - 11$ **18.** $9y + 3 = 4y - 10$

19. $3x + 4 = 5x - 2$ **20.** $2x - 1 = 6x + 15$

21. $-7a + 6 = -8a + 14$ **22.** $-6a - 4 = -7a + 11$

23. $5x + 3 - 2x = x - 15$ **24.** $4x - 2 - x = 5x + 10$

25. $6y + 18 + y = 2y + 3$ **26.** $5y + 14 + y = 3y - 7$

27. $4x - 3 + 2x = 8x - 3 - x$

28. $x - 4 - 4x = 6x + 9 - 8x$

29. $6n - 4 - 3n = 3n + 10 + 4n$

30. $2n - 1 - 3n = 5n - 7 - 3n$

31. $4(x - 3) = -20$ **32.** $3(x + 2) = -15$

33. $-3(x - 2) = 11$ **34.** $-5(x - 1) = 12$

35. $5(2x + 1) = 4(3x - 7)$

36. $3(2x - 1) = 2(4x + 7)$

37. $5x - 4(x - 6) = -11$ **38.** $3x - 5(2x + 1) = 13$

39. $-2(3x - 1) - 3 = -4$ **40.** $-6(x - 4) - 10 = -12$

41. $-2(3x + 5) = -3(4x + 3)$

42. $-(2x - 1) = -5(2x + 9)$

43. $3(x - 4) - 7(x + 2) = -2(x + 18)$

44. $4(x - 2) - 3(x - 1) = 2(x + 6)$

45. $-2(3n - 1) + 3(n + 5) = -4(n - 4)$

46. $-3(4n + 2) + 2(n - 6) = -2(n + 1)$

47. $3(2a - 1) - 2(5a + 1) = 4(3a + 4)$

48. $4(2a + 3) - 3(4a - 2) = 5(4a - 7)$

49. $-2(n - 4) - (3n - 1) = -2 + (2n - 1)$

50. $-(2n - 1) + 6(n + 3) = -4 - (7n - 11)$

Para los problemas 51–66 use un abordaje algebraico para resolver cada problema.

51. Si 15 se resta de tres veces cierto número, el resultado es 27. Encuentre el número.

52. Si 1 se resta de siete veces cierto número, el resultado es el mismo como si 31 se agregara a tres veces el número. Encuentre el número.

53. Encuentre tres enteros consecutivos cuya suma sea 42.

54. Encuentre cuatro enteros consecutivos cuya suma sea −118.

55. Encuentre tres enteros impares consecutivos tales que tres veces el segundo menos el tercero es 11 más que el primero.

56. Encuentre tres enteros pares consecutivos tales que cuatro veces el primero menos el tercero es seis más que el doble del segundo.

57. La diferencia de dos números es 67. El número más grande es tres menos que seis veces el número más pequeño. Encuentre los números.

58. La suma de dos números es 103. El número más grande es uno más que cinco veces el número más pequeño. Encuentre los números.

59. A Ángelo se le paga el doble por cada hora que trabaja arriba de 40 horas a la semana. La semana pasada trabajó 46 horas y ganó $572. ¿Cuál es su tasa horaria normal?

60. Suponga que una factura por reparación de plomería, sin impuestos, fue de $130. Ésta incluye $25 por partes y una cantidad por 5 horas de trabajo. Encuentre la tasa por hora que se cargó por trabajo.

61. Suponga que María tiene 150 monedas que consisten de piezas de 1, 5 y 10 centavos. El número de monedas de cinco centavos que tiene es 10 menos que el doble del número de las de un centavo; el número de las de 10 centavos es 20 menos que tres veces el número de las de 1 centavo. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

62. Héctor tiene una colección de monedas de 5, 10 y 25 centavos, que totalizan 122 monedas. El número de monedas de 10 centavos que tiene es 3 más que cuatro veces el número de monedas de 5 centavos, y el número de las monedas de 25 centavos es 19 menos que el número de las de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

63. El precio de venta de un anillo es de $750. Esto representa $150 menos que tres veces el costo del anillo. Encuentre el costo del anillo.

64. En una clase de 62 estudiantes, el número de mujeres es uno menos que el doble del número de hombres. ¿Cuántas mujeres y cuántos hombres hay en la clase?

65. Un complejo habitacional contiene 230 departamentos, cada uno con una, dos o tres recámaras. El número de departamentos de dos recámaras es 10 más que tres veces el número de departamentos de tres recámaras. El número de departamentos de una recámara es el doble de los departamentos de dos recámaras. ¿Cuántos departamentos de cada tipo hay en el complejo?

66. Barry vende bicicletas con base en salario más comisión. Él recibe un salario mensual de $300 y una comisión de $15 por cada bicicleta que vende. ¿Cuántas bicicletas debe vender en un mes para tener un ingreso mensual total de $750?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

67. Explique la diferencia entre un enunciado numérico y una ecuación algebraica.

68. ¿Las ecuaciones $7 = 9x - 4$ y $9x - 4 = 7$ son ecuaciones equivalentes? Defienda su respuesta.

69. Suponga que su amigo le muestra la siguiente solución a una ecuación

$$17 = 4 - 2x$$
$$17 + 2x = 4 - 2x + 2x$$
$$17 + 2x = 4$$
$$17 + 2x - 17 = 4 - 17$$
$$2x = -13$$
$$x = \frac{-13}{2}$$

¿Es una solución correcta? ¿Qué sugerencias tendría en términos del método empleado para resolver la ecuación?

70. Explique con sus palabras qué entiende por declarar una variable cuando se resuelve un problema verbal.

71. Establezca una ecuación cuyo conjunto solución es el conjunto vacío y explique por qué es el conjunto solución.

72. Establezca una ecuación cuyo conjunto solución sea el conjunto de todos los números reales y explique por qué es el conjunto solución.

MÁS INVESTIGACIÓN

73. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $5x + 7 = 5x - 4$

(b) $4(x - 1) = 4x - 4$

(c) $3(x - 4) = 2(x - 6)$

(d) $7x - 2 = -7x + 4$

(e) $2(x - 1) + 3(x + 2) = 5(x - 7)$

(f) $-4(x - 7) = -2(2x + 1)$

74. Verifique que, para cualesquiera tres enteros consecutivos, la suma del menor y el mayor es igual al doble del entero intermedio. [*Sugerencia:* Use n, $n + 1$ y $n + 2$ para representar los tres enteros consecutivos.]

75. Verifique que no se pueden encontrar cuatro enteros consecutivos tales que el producto del menor y el mayor sea igual al producto de los otros dos enteros.

2.2 Ecuaciones que implican formas fraccionarias

Para resolver ecuaciones que implican fracciones, por lo general es más sencillo comenzar por **limpiar la ecuación de todas las fracciones**. Esto se puede lograr al multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores en la ecuación. Recuerde que el mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros es el menor entero distinto de cero que es divisible entre cada uno de los números. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 6 es 12. Cuando se trabaja con fracciones, al mínimo común múltiplo de un conjunto de denominadores se le conoce como **mínimo común denominador** (MCD). Considere algunas ecuaciones que implican fracciones.

EJEMPLO 1

Resuelva $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

Solución

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$12\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

Multiplique ambos lados por 12, que es el MCD de 2, 3 y 4.

$$12\left(\frac{1}{2}x\right) + 12\left(\frac{2}{3}\right) = 12\left(\frac{3}{4}\right)$$

Aplique la propiedad distributiva al lado izquierdo.

$$6x + 8 = 9$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Comprobación

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{8}{12} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

Solución

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$$ Recuerde que $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$.

$$6\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) = 6(10)$$ Multiplique ambos lados por el MCD.

$$6\left(\frac{x}{2}\right) + 6\left(\frac{x}{3}\right) = 6(10)$$ Aplique la propiedad distributiva al lado izquierdo.

$$3x + 2x = 60$$

$$5x = 60$$

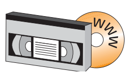
$$x = 12$$

El conjunto solución es {12}. ■

Conforme estudie los ejemplos de esta sección, ponga especial atención a los pasos que se muestran en las soluciones. No hay reglas rígidas y rápidas acerca de cuáles pasos debe realizar mentalmente; es una decisión individual. Cuando resuelva problemas, muestre suficientes pasos para permitir el flujo del proceso a comprender y así minimizar las posibilidades de cometer errores de cálculo por descuido.

EJEMPLO 3

Resuelva $\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{8} = \frac{5}{6}$



Solución

$$\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{8} = \frac{5}{6}$$

$$24\left(\frac{x-2}{3}+\frac{x+1}{8}\right)=24\left(\frac{5}{6}\right)$$ Multiplique ambos lados por el MCD.

$$24\left(\frac{x-2}{3}\right)+24\left(\frac{x+1}{8}\right)=24\left(\frac{5}{6}\right)$$ Aplique la propiedad distributiva al lado izquierdo.

$$8(x-2)+3(x+1)=20$$
$$8x-16+3x+3=20$$
$$11x-13=20$$
$$11x=33$$
$$x=3$$

El conjunto solución es $\{3\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{3t-1}{5}-\frac{t-4}{3}=1$

Solución

$$\frac{3t-1}{5}-\frac{t-4}{3}=1$$

$$15\left(\frac{3t-1}{5}-\frac{t-4}{3}\right)=15(1)$$ Multiplique ambos lados por el MCD.

$$15\left(\frac{3t-1}{5}\right)-15\left(\frac{t-4}{3}\right)=15(1)$$ Aplique la propiedad distributiva al lado izquierdo.

$$3(3t-1)-5(t-4)=15$$

$$9t-3-5t+20=15$$ ¡Tenga cuidado con este signo!

$$4t+17=15$$
$$4t=-2$$

$$t=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$ ¡Reduzca!

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. ■

■ Resolución de problemas

Conforme mejore sus habilidades para resolver ecuaciones, también ampliará su capacidad para resolver problemas verbales. No existe un procedimiento definitivo que garantice el éxito para resolver problemas verbales, pero las siguientes sugerencias pueden ser útiles.

Sugerencias para resolver problemas verbales

1. Lea cuidadosamente el problema y asegúrese de comprender el significado de todas las palabras. Esté especialmente alerta ante cualquier término técnico que se use en el enunciado del problema.
2. Lea el problema una segunda vez (incluso una tercera ocasión) para obtener un panorama de la situación descrita. Determine los hechos conocidos así como lo que debe encontrar.
3. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda ayudarle a analizar el problema.
4. Elija una variable significativa para representar una cantidad desconocida en el problema (quizá t, si el tiempo es una cantidad desconocida) y represente cualquiera otra incógnita en términos de dicha variable.
5. Busque una guía que pueda usar para establecer una ecuación. Una guía puede ser una fórmula, como *distancia igual a rapidez por tiempo*, o un enunciado de una relación, como “la suma de los dos números es 28”.
6. Forme una ecuación que contenga la variable y que traduzca las condiciones de la guía del español al álgebra.
7. Resuelva la ecuación y use la solución para determinar todos los hechos que se solicitan en el problema.
8. Compruebe todas las respuestas en el **enunciado original del problema**.

Tenga en mente estas sugerencias mientras continúa resolviendo problemas. Estas sugerencias se retomarán en diferentes momentos a lo largo del texto. Ahora considere algunos problemas.

PROBLEMA 1

Encuentre un número tal que tres octavos del número menos un medio de él es 14 menos que tres cuartos del número.

Solución

Sea n el número a encontrar.

$$\frac{3}{8}n - \frac{1}{2}n = \frac{3}{4}n - 14$$

$$8\left(\frac{3}{8}n - \frac{1}{2}n\right) = 8\left(\frac{3}{4}n - 14\right)$$

$$8\left(\frac{3}{8}n\right) - 8\left(\frac{1}{2}n\right) = 8\left(\frac{3}{4}n\right) - 8(14)$$

$$3n - 4n = 6n - 112$$

$$-n = 6n - 112$$

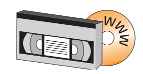
$$-7n = -112$$

$$n = 16$$

El número es 16. ¡Compruébelo! ■

PROBLEMA 2

El ancho de un estacionamiento rectangular es 8 pies menos que tres quintos de la longitud. El perímetro del estacionamiento es de 400 pies. Encuentre la longitud y el ancho del estacionamiento.



Solución

Sea l la longitud del estacionamiento. Entonces $\frac{3}{5}l - 8$ representa el ancho (figura 2.2).

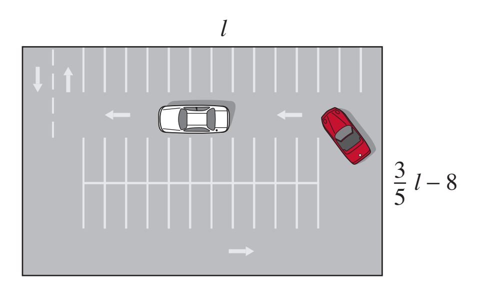


Figura 2.2

Una guía para este problema es la fórmula *el perímetro de un rectángulo es igual al doble de la longitud más el doble del ancho* ($P = 2l + 2w$). Use esta fórmula para formar la siguiente ecuación.

$$\begin{array}{ccccc} P & = & 2l\ + & & 2w \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 400 & = & 2l & + & 2\left(\frac{3}{5}l - 8\right) \end{array}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$400 = 2l + \frac{6l}{5} - 16$$

$$5(400) = 5\left(2l + \frac{6l}{5} - 16\right)$$

$$2000 = 10l + 6l - 80$$

$$2000 = 16l - 80$$

$$2080 = 16l$$

$$130 = l.$$

La longitud del estacionamiento es de 130 pies y el ancho es $\frac{3}{5}(130) - 8 = 70$. ■

En los problemas 1 y 2 observe el uso de diferentes letras como variables. Es útil elegir una variable que tenga significado para el problema en el que trabaja. Por ejemplo, en el problema 2 la elección de l para representar la longitud parece natural y significativa. (Ciertamente es un asunto de preferencia personal, pero puede considerarlo.)

En el problema 2 una relación geométrica, ($P = 2l + 2w$), sirve como guía para establecer la ecuación. Las siguientes relaciones geométricas que pertenecen a la medición de ángulos también pueden servir como guías.

1. Los ángulos complementarios son dos ángulos cuya suma mide 90º.

2. Los ángulos suplementarios son dos ángulos cuya suma mide 180º.

3. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180º.

PROBLEMA 3

Uno de dos ángulos complementarios es 6º mayor que un medio del otro ángulo. Encuentre la medida de cada uno de los ángulos.

Solución

Sea a la representación de la medida de uno de los ángulos. Entonces $\frac{1}{2}a + 6$ representa la medida del otro ángulo. Puesto que son ángulos complementarios, la suma de sus medidas es 90º.

$$a + \left(\frac{1}{2}a + 6\right) = 90$$

$$2a + a + 12 = 180$$

$$3a + 12 = 180$$

$$3a = 168$$

$$a = 56$$

Si $a = 56$, entonces $\frac{1}{2}a + 6$ se convierte en $\frac{1}{2}(56) + 6 = 34$. Los ángulos tienen medidas de 34 y 56º. ■

PROBLEMA 4

La edad actual de Dominic es 10 años más que la edad actual de Michele. En 5 años la edad de Michele será tres quintos la edad de Dominic. ¿Cuáles son sus edades actuales?

Solución

Sea x la edad actual de Michele. Entonces la edad de Dominic se representará como $x + 10$. En 5 años la edad de ambos aumenta en 5 años, así que es necesario sumar 5 a la edad actual de Michele y 5 a la edad actual de Dominic para representar sus edades en 5 años. Por tanto, en 5 años la edad de Michele se representará como $x + 5$, y la edad de Dominic se representará como $x + 15$. Entonces se puede establecer la ecuación que refleje el hecho de que, en 5 años, la edad de Michele será tres quintos la edad de Dominic.

$$x + 5 = \frac{3}{5}(x + 15)$$

$$5(x + 5) = 5\left[\frac{3}{5}(x + 15)\right]$$

$$5x + 25 = 3(x + 15)$$

$$5x + 25 = 3x + 45$$
$$2x + 25 = 45$$
$$2x = 20$$
$$x = 10$$

Puesto que x representa la edad actual de Michele, se sabe que su edad es 10. La edad actual de Dominic se representa como $x + 10$, de modo que su edad es 20. ■

Tenga en mente que las sugerencias para resolución de problemas que se ofrecen en esta sección simplemente subrayan un abordaje algebraico general a la resolución de problemas. Usted aumentará esta lista a lo largo de este curso y en cualquier curso de matemáticas posterior que tome. Más aún, podrá tomar ideas adicionales para resolver problemas de su instructor o de sus compañeros conforme discuta problemas en clase. Siempre esté alerta para cualquier idea que pueda ayudarle a convertirse en un mejor solucionador de problemas.

Conjunto de problemas 2.2

Para los problemas 1–40 resuelva cada ecuación.

1. $\frac{3}{4}x = 9$

2. $\frac{2}{3}x = -14$

3. $\frac{-2x}{3} = \frac{2}{5}$

4. $\frac{-5x}{4} = \frac{7}{2}$

5. $\frac{n}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

6. $\frac{n}{4} - \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

7. $\frac{5n}{6} - \frac{n}{8} = \frac{-17}{12}$

8. $\frac{2n}{5} - \frac{n}{6} = \frac{-7}{10}$

9. $\frac{a}{4} - 1 = \frac{a}{3} + 2$

10. $\frac{3a}{7} - 1 = \frac{a}{3}$

11. $\frac{h}{4} + \frac{h}{5} = 1$

12. $\frac{h}{6} + \frac{3h}{8} = 1$

13. $\frac{h}{2} - \frac{h}{3} + \frac{h}{6} = 1$

14. $\frac{3h}{4} + \frac{2h}{5} = 1$

15. $\frac{x - 2}{3} + \frac{x + 3}{4} = \frac{11}{6}$

16. $\frac{x + 4}{5} + \frac{x - 1}{4} = \frac{37}{10}$

17. $\frac{x + 2}{2} - \frac{x - 1}{5} = \frac{3}{5}$

18. $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x + 1}{7} = -\frac{1}{3}$

19. $\frac{n + 2}{4} - \frac{2n - 1}{3} = \frac{1}{6}$

20. $\frac{n - 1}{9} - \frac{n + 2}{6} = \frac{3}{4}$

21. $\frac{y}{3} + \frac{y - 5}{10} = \frac{4y + 3}{5}$

22. $\frac{y}{3} + \frac{y - 2}{8} = \frac{6y - 1}{12}$

23. $\frac{4x - 1}{10} - \frac{5x + 2}{4} = -3$

24. $\frac{2x - 1}{2} - \frac{3x + 1}{4} = \frac{3}{10}$

25. $\frac{2x - 1}{8} - 1 = \frac{x + 5}{7}$

26. $\frac{3x + 1}{9} + 2 = \frac{x - 1}{4}$

27. $\frac{2a - 3}{6} + \frac{3a - 2}{4} + \frac{5a + 6}{12} = 4$

28. $\frac{3a - 1}{4} + \frac{a - 2}{3} - \frac{a - 1}{5} = \frac{21}{20}$

29. $x + \frac{3x - 1}{9} - 4 = \frac{3x + 1}{3}$

30. $\frac{2x + 7}{8} + x - 2 = \frac{x - 1}{2}$

31. $\frac{x + 3}{2} + \frac{x + 4}{5} = \frac{3}{10}$

32. $\frac{x - 2}{5} - \frac{x - 3}{4} = -\frac{1}{20}$

33. $n + \frac{2n - 3}{9} - 2 = \frac{2n + 1}{3}$

34. $n - \frac{3n + 1}{6} - 1 = \frac{2n + 4}{12}$

35. $\frac{3}{4}(t - 2) - \frac{2}{5}(2t - 3) = \frac{1}{5}$

36. $\frac{2}{3}(2t + 1) - \frac{1}{2}(3t - 2) = 2$

37. $\frac{1}{2}(2x - 1) - \frac{1}{3}(5x + 2) = 3$

38. $\frac{2}{5}(4x - 1) + \frac{1}{4}(5x + 2) = -1$

39. $3x - 1 + \frac{2}{7}(7x - 2) = -\frac{11}{7}$

40. $2x + 5 + \frac{1}{2}(6x - 1) = -\frac{1}{2}$

Para los problemas 41–58 use un abordaje algebraico para resolver cada problema.

41. Encuentre un número tal que la mitad del número sea 3 menos que dos tercios del número.

42. La mitad de un número más tres cuartos del número es 2 más que cuatro tercios del número. Encuentre el número.

43. Suponga que el ancho de cierto rectángulo es una pulgada más que un cuarto de su longitud. El perímetro del rectángulo es de 42 pulgadas. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

44. Suponga que el ancho de un rectángulo es 3 centímetros menos que dos tercios de su longitud. El perímetro del rectángulo es de 114 centímetros. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

45. Encuentre tres enteros consecutivos tales que la suma del primero más un tercio del segundo más tres octavos del tercero sea 25.

46. A Lou se le paga $1\frac{1}{2}$ veces su salario por hora normal por cada hora que trabaje arriba de 40 horas a la semana. La semana pasada trabajó 44 horas y ganó $276. ¿Cuál es su salario por hora normal?

47. Una tabla de 20 pies de largo se corta en dos piezas tales que la longitud de una pieza es dos tercios la longitud de la otra. Encuentre la longitud de la pieza de tabla más corta.

48. Jody tiene una colección de 116 monedas que consisten de monedas de 10 centavos, 25 centavos y dólares de plata. El número de monedas de 25 centavos es 5 menos que tres cuartos el número de monedas de 10 centavos. El número de dólares de plata es 7 más que cinco octavos el número de monedas de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en su colección?

49. La suma de las edades actuales de Angie y su madre es 64 años. En ocho años Angie será tres quintos tan vieja como su madre en ese momento. Encuentre las edades actuales de Angie y su madre.

50. La edad actual de Annilee es dos tercios la edad actual de Jessie. En 12 años la suma de sus edades será 54 años. Encuentre sus edades actuales.

51. La edad actual de Sydney es la mitad de la edad actual de Marcus. En 12 años la edad de Sydney será cinco octavos la edad de Marcus. Encuentre sus edades actuales.

52. La suma de las edades actuales de Ian y su hermano es 45. En 5 años la edad de Ian será cinco sextos la edad de su hermano. Encuentre sus edades actuales.

53. Aura presentó tres exámenes de biología y tiene una calificación promedio de 88. La calificación de su segundo examen fue 10 puntos mejor que su primer examen y la calificación de su tercer examen fue 4 puntos mejor que su segundo examen. ¿Cuáles fueron las calificaciones de sus tres exámenes?

54. El promedio de los salarios de Tim, Maida y Aaron es de $24 000 por año. Maida gana $10 000 más que Tim y el salario de Aaron es $2000 más que el doble del salario de Tim. Encuentre el salario de cada persona.

55. Uno de los dos ángulos suplementarios es 4º más que un tercio del otro ángulo. Encuentre la medida de cada uno de los ángulos.

56. Si la mitad del complemento de un ángulo más tres cuartos del suplemento del ángulo es igual a 110º, encuentre la medida del ángulo.

57. Si el complemento de un ángulo es 5º menos que un sexto de su suplemento, encuentre la medida del ángulo.

58. En $\triangle ABC$, el ángulo B es 8º menos que la mitad de un ángulo A y el ángulo C es 28º mayor que el ángulo A. Encuentre la medida de los tres ángulos del triángulo.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

59. Explique por qué el conjunto solución de la ecuación $x + 3 = x + 4$ es el conjunto vacío.

60. Explique por qué el conjunto solución de la ecuación $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{5x}{6}$ es todo el conjunto de los números reales.

61. ¿Por qué las respuestas potenciales a los problemas verbales deben comprobarse de nuevo en el enunciado original del problema?

62. Suponga que su amiga resolvió el problema, *encuentre dos enteros impares consecutivos cuya suma es 28*, del modo siguiente:

$$x + x + 1 = 28$$
$$2x = 27$$
$$x = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

Ella afirma que $13\frac{1}{2}$ comprobará la ecuación. ¿Dónde está equivocada y cómo le ayudaría?

2.3 Ecuaciones que implican decimales y resolución de problemas

En la resolución de ecuaciones que implican fracciones, por lo general el procedimiento es limpiar la ecuación de todas las fracciones. Para resolver ecuaciones que implican decimales, existen dos procedimientos de uso común. Un procedimiento es mantener los números en forma decimal y resolver la ecuación mediante la aplicación de las propiedades. Otro procedimiento es multiplicar ambos lados de la ecuación por una potencia adecuada de 10 para limpiar la ecuación de todos los decimales. Cuál técnica usar depende de su preferencia personal y de la complejidad de la ecuación. Los siguientes ejemplos demuestran ambas técnicas.

EJEMPLO 1

Resuelva $0.2x + 0.24 = 0.08x + 0.72$

Solución

Limpie los decimales al multiplicar ambos lados de la ecuación por 100.

$$0.2x + 0.24 = 0.08x + 0.72$$
$$100(0.2x + 0.24) = 100(0.08x + 0.72)$$
$$100(0.2x) + 100(0.24) = 100(0.08x) + 100(0.72)$$
$$20x + 24 = 8x + 72$$
$$12x + 24 = 72$$
$$12x = 48$$
$$x = 4$$

✔ **Comprobación**

$$0.2x + 0.24 = 0.08x + 0.72$$
$$0.2(4) + 0.24 \stackrel{?}{=} 0.08(4) + 0.72$$
$$0.8 + 0.24 \stackrel{?}{=} 0.32 + 0.72$$
$$1.04 = 1.04$$

El conjunto solución es {4}. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $0.07x + 0.11x = 3.6$

Solución

Mantenga este problema en forma decimal.

$$0.07x + 0.11x = 3.6$$
$$0.18x = 3.6$$
$$x = \frac{3.6}{0.18}$$
$$x = 20$$

✔ **Comprobación**

$$0.07x + 0.11x = 3.6$$
$$0.07(20) + 0.11(20) \stackrel{?}{=} 3.6$$
$$1.4 + 2.2 \stackrel{?}{=} 3.6$$
$$3.6 = 3.6$$

El conjunto solución es {20}. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $s = 1.95 + 0.35s$

Solución

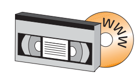
Mantenga este problema en forma decimal.

$$s = 1.95 + 0.35s$$
$$s + (-0.35s) = 1.95 + 0.35s + (-0.35s)$$
$$0.65s = 1.95 \qquad \text{Recuerde, } s = 1.00s.$$
$$s = \frac{1.95}{0.65}$$
$$s = 3$$

El conjunto solución es {3}. ¡Compruébelo! ■

EJEMPLO 4

Resuelva $0.12x + 0.11(7000 - x) = 790$



Solución

Limpie los decimales al multiplicar ambos lados de la ecuación por 100.

$$
\begin{aligned}
0.12x + 0.11(7000 - x) &= 790 \\
100[0.12x + 0.11(7000 - x)] &= 100(790) \quad \text{Multiplique ambos lados por 100.} \\
100(0.12x) + 100[0.11(7000 - x)] &= 100(790) \\
12x + 11\ 7000 - x) &= 79\,000 \\
12x + 77\,000 - 11x &= 79\,000 \\
x + 77\,000 &= 79\,000 \\
x &= 2000
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es {2000}. ■

De vuelta a la resolución de problemas

Es posible resolver muchos problemas de consumidor con un enfoque algebraico. Por ejemplo, considere ciertos problemas de descuento en ventas que implican la relación *precio de venta original menos descuento igual a precio de venta con descuento*.

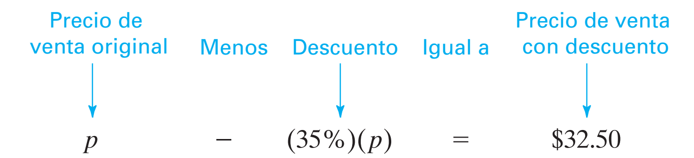
Precio de venta original – Descuento = Precio de venta con descuento

PROBLEMA 1

Karyl compró un vestido con un descuento de 35% por \$32.50. ¿Cuál era el precio original del vestido?

Solución

Sea p el precio original del vestido. Al usar la relación de venta con descuento como guía, se encuentra que el problema se traduce a una ecuación del modo siguiente:



Al cambiar esta ecuación a forma decimal y resolver la ecuación se obtiene

$$
\begin{aligned}
p - (35\%)(p) &= 32.50 \\
(65\%)(p) &= 32.50 \\
0.65p &= 32.50 \\
p &= 50
\end{aligned}
$$

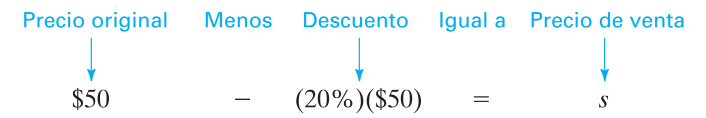
El precio original del vestido fue \$50. ■

PROBLEMA 2

Un par de tenis para trotar, con precio original de $50, están a la venta con 20% de descuento. Encuentre el precio de venta con descuento de los tenis.

Solución

Sea s el precio de venta con descuento.



Al resolver esta ecuación se obtiene

$$50 - (20\%)(50) = s$$
$$50 - (0.2)(50) = s$$
$$50 - 10 = s$$
$$40 = s$$

Los tenis están a la venta por $40. ■

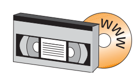
Observaciones: Tenga en mente que si un artículo está a la venta con 35% de descuento, entonces el comprador pagará 100% − 35% = 65% del precio original. Por tanto, en el problema 1 podría comenzar con la ecuación $0.65p = 32.50$. Del mismo modo, en el problema 2 podría comenzar con la ecuación $s = 0.8(50)$.

Otra relación básica que concierne a problemas del consumidor es *precio de venta igual a costo más ganancia.* La ganancia (también llamada rendimiento, beneficio y margen de ganancia) se establece de diferentes formas. La ganancia se puede establecer como porcentaje del precio de venta, como porcentaje del costo o simplemente en términos de pesos y centavos. Se considerarán algunos problemas para los cuales la ganancia se calcule o como porcentaje del costo o como porcentaje del precio de venta.

Precio de venta = Costo + Ganancia

PROBLEMA 3

Una vendedora tiene algunas camisetas que cuestan $20 cada una. Ella quiere venderlas con una ganancia de 60% del costo. ¿Qué precio de venta debe marcar en las camisetas?



Solución

Sea s el precio de venta. Use la relación *precio de venta igual a costo más ganancia* como guía.

Precio de venta	Igual a	Costo	Más	Ganancia
↓		↓		↓
s	=	$20	+	(60%)($20)

Resolver esta ecuación produce

$$s = 20 + (60\%)(20)$$
$$s = 20 + (0.6)(20)$$

$s = 20 + 12$

$s = 32$

El precio de venta debe ser \$32. ■

Observación: Una ganancia de 60% del costo significa que el precio de venta es 100% del costo más 60% del costo, o 160% del costo. Por tanto, en el problema 3 se podría resolver la ecuación $s = 1.6(20)$.

PROBLEMA 4

Un vendedor de artículos deportivos compró un putter por \$18. Quiere poner un precio al putter para obtener una ganancia de 40% en el precio de venta. ¿Qué precio debe poner al putter?

Solución

Sea s el precio de venta.

Resolver esta ecuación produce

$$s = 18 + (40\%)(s)$$

$$s = 18 + 0.4s$$

$$0.6s = 18$$

$$s = 30$$

El precio de venta debe ser \$30. ■

PROBLEMA 5

Si un árbol de maple cuesta a un terrateniente \$55.00 y quiere venderlo a \$80.00, ¿cuál es su tasa de ganancia con base en el costo? Redondee la tasa a la décima de porcentaje más cercana.

Solución

Sea r la tasa de ganancia y use la siguiente guía.

Precio de venta	Igual a	Costo	Más	Ganancia
↓	↓	↓		
80.00	=	55.00	+	r (55.00)
25.00	=	r (55.00)		
$\frac{25.00}{55.00}$	=	r		
0.455	≈	r		

Para cambiar la respuesta a porcentaje, multiplique 0.455 por 100. Por tanto, su tasa de ganancia es de 45.5%. ■

Ciertos tipos de problemas de inversión y dinero se resuelven mediante un enfoque algebraico. Considere los siguientes ejemplos.

PROBLEMA 6

Erick tiene 40 monedas, con valores de 10 y 5 centavos, que importan $3.35. ¿Cuántas monedas de 10 y de 5 centavos tiene?

Solución

Sea x el número de monedas de 10 centavos. Entonces el número de monedas de 5 centavos se puede representar con el número total de monedas menos el número de monedas de 10 centavos. En consecuencia, $40 - x$ representa el número de monedas de 5 centavos. Puesto que se conoce la cantidad de dinero que tiene Erick, es necesario multiplicar el número de cada moneda por su valor. Use la siguiente guía.

Dinero de las monedas de 10 centavos	Más	Dinero de las monedas de 5 centavos	Igual a	Dinero total	
↓		↓		↓	
$0.10x$	$+$	$0.05(40 - x)$	$=$	3.35	
$10x$	$+$	$5(40 - x)$	$=$	335	Multiplique ambos lados por 100.
$10x$	$+$	$200 - 5x$	$=$	335	
		$5x + 200$	$=$	335	
		$5x$	$=$	135	
		x	$=$	27	

El número de monedas de 10 centavos es 27 y el de monedas de 5 centavos es $40 - x = 13$. De modo que Erick tiene 27 monedas de 10 centavos y 13 monedas de 5 centavos. ■

PROBLEMA 7

Un hombre invierte $8000, una parte a 11% y el resto a 12%. El interés anual total de sus dos inversiones es $930. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

Solución

Sea x la cantidad que invirtió a 11%. Entonces $8000 - x$ representa la cantidad que invirtió a 12%. Use la siguiente guía.

Interés ganado de la inversión a 11%	+	Interés ganado de la inversión a 12%	=	Cantidad total de interés ganado
↓		↓		↓
$(11\%)(x)$	$+$	$(12\%)(8000 - x)$	$=$	$\$930$

Resolver esta ecuación produce

$$(11\%)(x) + (12\%)(8000 - x) = 930$$
$$0.11x + 0.12(8000 - x) = 930$$

$$11x + 12(8000 - x) = 93\,000 \quad \text{Multiplique ambos lados por 100.}$$
$$11x + 96\,000 - 12x = 93\,000$$
$$-x + 96\,000 = 93\,000$$
$$-x = -3000$$
$$x = 3000$$

Por tanto, se invirtieron \$3000 a 11% y \$8000 − \$3000 = \$5000 a 12%. ■

No olvide comprobar los problemas verbales; determine si las respuestas satisfacen las condiciones establecidas en el problema *original*. A continuación se presenta una comprobación al problema 7.

✔ **Comprobación**

Se afirma que se invirtieron \$3000 a 11% y \$5000 a 12%, y esto satisface la condición de que se invirtieron \$8000. Los \$3000 a 11% producen \$330 de interés y los \$5000 a 12% producen \$600. En consecuencia, el interés de las inversiones es \$930. Se satisfacen las condiciones del problema y las respuestas son correctas.

Conforme encuentre problemas verbales a lo largo de este texto, tenga en mente que el objetivo principal es ampliar su repertorio de técnicas para resolver problemas. Se eligieron problemas que le brindan la oportunidad de usar varios enfoques para resolver problemas. No caiga en la trampa de pensar "nunca me enfrentaré con este tipo de problemas". Ese no es el asunto; la meta es desarrollar técnicas para resolver problemas. En los ejemplos que siguen se comparten algunas de las ideas de los autores para resolver problemas, pero no vacile en usar su propio ingenio. Más aún, no se desaliente: todo el mundo ha tenido dificultad con algunos problemas. ¡Dé lo mejor de usted a cada uno!

Conjunto de problemas 2.3

Para los problemas 1–28 resuelva cada ecuación.

1. $0.14x = 2.8$

2. $1.6x = 8$

3. $0.09y = 4.5$

4. $0.07y = 0.42$

5. $n + 0.4n = 56$

6. $n - 0.5n = 12$

7. $s = 9 + 0.25s$

8. $s = 15 + 0.4s$

9. $s = 3.3 + 0.45s$

10. $s = 2.1 + 0.6s$

11. $0.11x + 0.12(900 - x) = 104$

12. $0.09x + 0.11(500 - x) = 51$

13. $0.08(x + 200) = 0.07x + 20$

14. $0.07x = 152 - 0.08(2000 - x)$

15. $0.12t - 2.1 = 0.07t - 0.2$

16. $0.13t - 3.4 = 0.08t - 0.4$

17. $0.92 + 0.9(x - 0.3) = 2x - 5.95$

18. $0.3(2n - 5) = 11 - 0.65n$

19. $0.1d + 0.11(d + 1500) = 795$

20. $0.8x + 0.9(850 - x) = 715$

21. $0.12x + 0.1(5000 - x) = 560$

22. $0.10t + 0.12(t + 1000) = 560$

23. $0.09(x + 200) = 0.08x + 22$

24. $0.09x = 1650 - 0.12(x + 5000)$

25. $0.3(2t + 0.1) = 8.43$

26. $0.5(3t + 0.7) = 20.6$

27. $0.1(x - 0.1) - 0.4(x + 2) = -5.31$

28. $0.2(x + 0.2) + 0.5(x - 0.4) = 5.44$

Para los problemas 29–50 use un enfoque algebraico para resolver cada problema.

29. Judy compró un abrigo con 20% de descuento por $72. ¿Cuál era el precio original del abrigo?

30. Jim compró un par de pantalones con 25% de descuento por $24. ¿Cuál fue el precio original de los pantalones?

31. Halle el precio de venta con descuento de un artículo de $64 que está a la venta con 15% de descuento.

32. Halle el precio de venta con descuento de un artículo de 72% que está en venta con 35% de descuento.

33. Una vendedora tiene algunas camisetas que cuestan $30 cada una. Ella quiere venderlas con una ganancia de 60% sobre el costo. ¿Qué precio debe cargar a las camisetas?

34. El propietario de una pizzería quiere obtener una ganancia de 70% del costo por cada pizza que venda. Si cuesta $2.50 elaborar una pizza, ¿a qué precio debe vender cada pizza?

35. Si un anillo cuesta $200 a un joyero, ¿a qué precio debe venderlo para obtener una ganancia de 50% en el precio de venta?

36. Si una lechuga cuesta $0.32 a un vendedor, ¿a qué precio debe venderla para producir una ganancia de 60% en el precio de venta?

37. Si un par de zapatos cuesta $24 a un vendedor, y él los vende en $39.60, ¿cuál es su tasa de ganancia con base en el costo?

38. Una vendedora tiene algunas camisetas que le cuestan $45 cada una. Si ella las vende en $83.25 por camiseta, encuentre su tasa de ganancia con base en el costo.

39. Si una computadora le cuesta $300 a una minorista en electrónica, y ella la vende en $800, ¿cuál es su tasa de ganancia con base en el precio de venta?

40. Un libro cuesta $45 a un librero y lo vende en $60. Encuentre la tasa de ganancia con base en el precio de venta.

41. El salario de Mitsuko para el próximo año es de $34 775. Esto representa un aumento de 7% sobre el salario de este año. Encuentre el salario actual de Mitsuko.

42. Don compró un automóvil usado por $15 794, con 6% de impuesto incluido. ¿Cuál fue el precio del automóvil sin impuestos?

43. Eva invirtió cierta cantidad de dinero a 10% de interés y $1500 más que dicha cantidad a 11%. Su interés anual total fue de $795. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

44. Un total de $4000 se invirtieron, parte a 8% de interés y el resto a 9%. Si el interés total anual fue de $350, ¿cuánto se invirtió a cada tasa?

45. Una suma de $95 000 se divide entre dos inversiones, una que paga 6% y la otra 9%. Si el interés total anual fue de $7290, ¿cuánto se invirtió a 9%?

46. Si $1500 se invirtieron a 6% de interés, ¿cuánto dinero se debe invertir a 9% de modo que el rendimiento total para ambas inversiones sea de $301.50?

47. Suponga que Javier tiene un puñado de monedas, que consisten de centavos, monedas de 5 centavos y monedas de 10 centavos, que importan $2.63. El número de monedas de 5 centavos es 1 menos que el doble del número de monedas de 1 centavo, y el número de monedas de 10 centavos es 3 más que el número de monedas de 5 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

48. Sarah tiene una colección de monedas de 5, 10 y 25 centavos que importan $15.75. Ella tiene 10 monedas más de 10 centavos que monedas de 5 centavos, y el doble de monedas de 25 centavos que de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

49. Una colección de 70 monedas, que consisten de monedas de 10, 25 y 50 centavos tiene un valor de $17.75. Hay tres veces monedas de 25 centavos que de 10 centavos. Encuentre el número de cada tipo de moneda.

50. Abby tiene 37 monedas, que consisten sólo de monedas de 10 y 25 centavos, que importan $7.45. ¿Cuántas monedas de 10 y cuántas de 25 centavos tiene?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

51. Vaya al problema 39 y calcule la tasa de rendimiento con base en el costo. Compare la tasa de ganancia con base en el costo con la tasa de ganancia con base en el precio de venta. Desde el punto de vista del consumidor, ¿preferiría que un vendedor planeara su ganancia con base en el costo de un artículo o con base en su precio de venta? Explique su respuesta.

52. ¿Un descuento de 10% seguido por un descuento de 30% es lo mismo que un descuento de 30% seguido por un descuento de 10%? Justifique su respuesta.

53. ¿Cuál es el error en la siguiente solución y cómo se debería realizar?

$$1.2x + 2 = 3.8$$
$$10(1.2x) + 2 = 10(3.8)$$
$$12x + 2 = 38$$
$$12x = 36$$
$$x = 3$$

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 54–63 resuelva cada ecuación y exprese las soluciones en forma decimal. Asegúrese de comprobar sus soluciones. Use su calculadora siempre que parezca útil.

54. $1.2x + 3.4 = 5.2$

55. $0.12x - 0.24 = 0.66$

56. $0.12x + 0.14(550 - x) = 72.5$

57. $0.14t + 0.13(890 - t) = 67.95$

58. $0.7n + 1.4 = 3.92$

59. $0.14n - 0.26 = 0.958$

60. $0.3(d + 1.8) = 4.86$

61. $0.6(d - 4.8) = 7.38$

62. $0.8(2x - 1.4) = 19.52$

63. $0.5(3x + 0.7) = 20.6$

64. La siguiente fórmula se puede usar para determinar el precio de venta de un artículo cuando la ganancia se basa en un porcentaje del precio de venta.

$$\text{Precio de venta} = \frac{\text{Costo}}{100\% - \text{Porcentaje de ganancia}}$$

Demuestre cómo se desarrolló esta fórmula.

65. Cierto vendedor compra un artículo por \$90, lo revende por \$100 y afirma que sólo obtuvo 10% de ganancia. ¿Esta afirmación es correcta?

66. ¿Un descuento de 10% seguido por un descuento de 20% es igual a un descuento de 30%? Defienda su respuesta.

2.4 Fórmulas

Para encontrar la distancia que se recorre en 4 horas a una rapidez de 55 millas por hora, se multiplica la rapidez por el tiempo; por ende, la distancia es $55(4) = 220$ millas. Se puede enunciar la regla *distancia es igual a rapidez por tiempo* como una fórmula: $d = rt$. Las fórmulas son reglas que se enuncian en forma simbólica, por lo general como ecuaciones.

Las fórmulas por lo general se usan en dos formas diferentes. En ocasiones una fórmula se resuelve para una variable específica, si se proporcionan valores numéricos para las otras variables. Esto es muy parecido a evaluar una expresión algebraica. En otras ocasiones es necesario cambiar la forma de una ecuación al resolver para una variable en términos de las otras variables. A lo largo del trabajo con fórmulas se usarán las propiedades de la igualdad y las técnicas que se aprendieron anteriormente para resolver ecuaciones. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Si se invierten P dólares a r por ciento durante t años, la cantidad de interés simple i está dada por la fórmula $i = Prt$. Encuentre la cantidad de interés que ganan $500 a 7% durante 2 años.

Solución

Al sustituir $500 por P, 7% por r y 2 por t, se obtiene

$$i = Prt$$
$$i = (500)(7\%)(2)$$
$$i = (500)(0.07)(2)$$
$$i = 70$$

Por tanto, se gana $70 en interés. ■

EJEMPLO 2

Si se invierten P dólares a una tasa simple de r por ciento, entonces la cantidad A acumulada después de t años está dada por la fórmula $A = P + Prt$. Si se invierten $500 a 8%, ¿cuántos años tardará en acumular $600?

Solución

Al sustituir $500 por P, 8% por r y $600 por A, se obtiene

$$A = P + Prt$$
$$600 = 500 + 500(8\%)(t)$$

Resolver esta ecuación para t produce

$$600 = 500 + 500(0.08)(t)$$
$$600 = 500 + 40t$$
$$100 = 40t$$
$$2\frac{1}{2} = t$$

Tardará $2\frac{1}{2}$ años acumular $600. ■

Cuando se usa una fórmula, a veces es conveniente primero cambiar su forma. Por ejemplo, suponga que usará la fórmula de *perímetro* para un rectángulo ($P = 2l + 2w$) para completar la siguiente tabla:

Perímetro (P)	32	24	36	18	56	80	
Longitud (l)	10	7	14	5	15	22	Todo en centímetros
Ancho (w)	?	?	?	?	?	?	

Dado que w es la cantidad desconocida, el trabajo de cálculo se simplificaría si primero se resuelve la fórmula para w en términos de las otras variables, del modo siguiente:

$$P = 2l + 2w$$

$$P - 2l = 2w \qquad \text{Sume } -2l \text{ a ambos lados.}$$

$$\frac{P - 2l}{2} = w \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{2}.$$

$$w = \frac{P - 2l}{2} \qquad \text{Aplique la propiedad simétrica de la igualdad.}$$

Ahora, para cada valor de P y l se puede determinar con facilidad el valor correspondiente para w. Asegúrese de concordar con los siguientes valores para w: 6, 5, 4, 4, 13 y 18. Del mismo modo, también puede resolver la fórmula $P = 2l + 2w$ para l en términos de P y w. El resultado sería $l = \frac{P - 2w}{2}$.

Considere algunas otras fórmulas de uso frecuente y vea cómo puede usar las propiedades de la igualdad para alterar sus formas. Aquí se resolverá una fórmula para una variable específica en términos de las otras variables. La clave es aislar el término que contiene la variable a resolver. Luego, al aplicar de manera adecuada la propiedad multiplicativa de la igualdad, se resolverá la fórmula para la variable especificada. A lo largo de esta sección se identificarán las fórmulas cuando se les use por primera vez. (Al final del libro también se proporcionan algunas fórmulas geométricas.)

EJEMPLO 3

Resuelva $A = \frac{1}{2}bh$ para h (área de un triángulo).

Solución

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$2A = bh \qquad \text{Multiplique ambos lados por 2.}$$

$$\frac{2A}{b} = h \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{b}.$$

$$h = \frac{2A}{b} \qquad \text{Aplique la propiedad simétrica de la igualdad.}$$

■

EJEMPLO 4

Resuelva $A = P + Prt$ para t.

Solución

$$A = P + Prt$$

$$A - P = Prt \qquad \text{Sume } -P \text{ a ambos lados.}$$

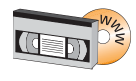
$$\frac{A - P}{Pr} = t \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{Pr}.$$

$$t = \frac{A - P}{Pr} \qquad \text{Aplique la propiedad simétrica de la igualdad.}$$

■

EJEMPLO 5

Resuelva $A = P + Prt$ para P.



Solución

$$A = P + Prt$$

$$A = P(1 + rt) \quad \text{Aplique la propiedad distributiva al lado derecho.}$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{1 + rt}.$$

$$P = \frac{A}{1 + rt} \quad \text{Aplique la propiedad simétrica de la igualdad.}$$

■

EJEMPLO 6

Resuelva $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para b_1 (área de un trapezoide).

Solución

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

$$2A = h(b_1 + b_2) \quad \text{Multiplique ambos lados por 2.}$$

$$2A = hb_1 + hb_2 \quad \text{Aplique la propiedad distributiva al lado derecho.}$$

$$2A - hb_2 = hb_1 \quad \text{Sume } -hb_2 \text{ a ambos lados.}$$

$$\frac{2A - hb_2}{h} = b_1 \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{h}.$$

$$b_1 = \frac{2A - hb_2}{h} \quad \text{Aplique la propiedad simétrica de la igualdad.}$$

■

Para aislar el término que contiene la variable a resolver, se aplicará la propiedad distributiva de distintas formas. En el ejemplo 5 *debe* usar la propiedad distributiva para cambiar de la forma $P + Prt$ a $P(1 + rt)$. Sin embargo, en el ejemplo 6 se usó la propiedad distributiva para cambiar $h(b_1 + b_2)$ a $hb_1 + hb_2$. En ambos problemas la clave es aislar el término que contiene la variable a resolver, de modo que una aplicación adecuada de la propiedad multiplicativa de la igualdad producirá el resultado deseado. Note también el uso de subíndices para identificar las dos bases de un trapezoide. Los subíndices le permiten usar la misma letra b para identificar las bases, pero b_1 representa una base y b_2 la otra.

En ocasiones se enfrentará con ecuaciones como $ax + b = c$, donde x es la variable y a, b y c se conocen como *constantes arbitrarias*. De nuevo puede usar las propiedades de la igualdad para resolver la ecuación para x del modo siguiente:

$$ax + b = c$$

$$ax = c - b \quad \text{Sume } -b \text{ a ambos lados.}$$

$$x = \frac{c - b}{a} \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{a}.$$

En el capítulo 7 se trabajará con ecuaciones como $2x - 5y = 7$, que se llaman ecuaciones de dos variables en x y y. Con frecuencia es necesario cambiar la forma de tales ecuaciones para resolver para una variable en términos de la otra variable. Las propiedades de la igualdad proporcionan la base para hacer esto.

EJEMPLO 7

Resuelva $2x - 5y = 7$ para y en términos de x.

Solución

$$2x - 5y = 7$$

$$-5y = 7 - 2x \quad \text{Sume } -2x \text{ a ambos lados.}$$

$$y = \frac{7 - 2x}{-5} \quad \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{5}.$$

$$y = \frac{2x - 7}{5}$$

Multiplique el numerador y el denominador de la fracción a la derecha por –1. (Este último paso no es absolutamente necesario, pero por lo general se prefiere tener un número positivo como denominador.) ■

Las ecuaciones de dos variables también pueden contener constantes arbitrarias. Por ejemplo, la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ contiene las variables x y y y las constantes arbitrarias a y b.

EJEMPLO 8

Resuelva la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ para x.

Solución

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$ab\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = ab(1) \quad \text{Multiplique ambos lados por } ab.$$

$$bx + ay = ab$$

$$bx = ab - ay \quad \text{Sume } -ay \text{ a ambos lados.}$$

$$x = \frac{ab - ay}{b} \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{b}.$$

■

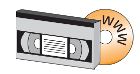
Observaciones: Tradicionalmente, las ecuaciones que contienen más de una variable, como las de los ejemplos 3-8, se llaman **ecuaciones literales**. Como se ilustra, en ocasiones es necesario resolver una ecuación literal para una variable en términos de la(s) otra(s) variable(s).

Fórmulas y resolución de problemas

Con frecuencia se usan fórmulas como guías para establecer una ecuación algebraica adecuada cuando se resuelve un problema verbal. Considere un ejemplo para ilustrar este punto.

PROBLEMA 1

¿Cuánto tardarán \$500 en duplicarse, si se invierte a 8% de interés simple?



Solución

Para que \$500 crezcan a \$1000 (el doble), debe ganar \$500 en interés. Por ende, sea t el número de años que \$500 tardará en ganar \$500 en interés. Ahora puede usar la fórmula $i = Prt$ como guía.

$$i = Prt$$

$$500 = 500(8\%)(t)$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$500 = 500(0.08)(t)$$

$$1 = 0.08t$$

$$100 = 8t$$

$$12\frac{1}{2} = t$$

Tardará $12\frac{1}{2}$ años. ■

En ocasiones se usan fórmulas en el análisis de un problema, mas no como la guía principal para establecer la ecuación. Por ejemplo, los problemas de movimiento uniforme involucran la fórmula $d = rt$, pero la guía principal para establecer una ecuación para tales problemas por lo general es un enunciado acerca de tiempo, rapidez o distancia. Considere un ejemplo para demostrarlo.

PROBLEMA 2

Mercedes comienza a trotar a 5 millas por hora. Media hora después, Karen comienza a trotar sobre la misma ruta a 7 millas por hora. ¿Cuánto tardará Karen en alcanzar a Mercedes?

Solución

Primero bosqueje un diagrama y registre algo de información (figura 2.3).

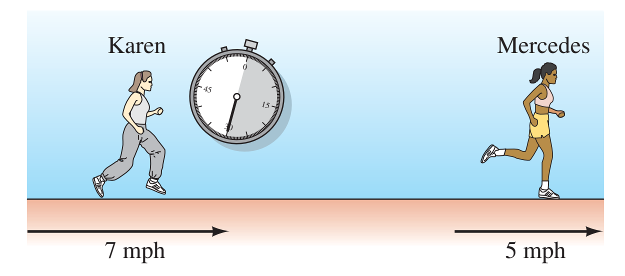


Figura 2.3

Si t representa el tiempo de Karen, entonces $t + \frac{1}{2}$ representa el tiempo de Mercedes. Puede usar el enunciado *la distancia de Karen es igual a la distancia de Mercedes* como guía.

Distancia de Karen — Distancia de Mercedes

$$7t = 5\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$7t = 5t + \frac{5}{2}$$

$$2t = \frac{5}{2}$$

$$t = \frac{5}{4}$$

Karen debe alcanzar a Mercedes en $1\frac{1}{4}$ horas. ■

Observación: Una parte importante de la resolución de problemas es la habilidad para bosquejar una figura significativa que se pueda usar para registrar la información dada y ayudar en el análisis del problema. Los bosquejos de este texto los realizaron artistas profesionales por razones estéticas. Sus bosquejos pueden ser dibujos muy burdos, no importa en tanto que muestren la situación en una forma que le ayude a analizar el problema.

Advierta que en la solución del problema 2 se usó una figura y un diagrama de flecha simple para registrar y organizar la información pertinente al problema. Algunas personas encuentran útil usar una tabla para dicho propósito. En el problema 3 se usará una tabla. Tenga en mente que no se intenta dictar un abordaje particular; usted decide qué le funciona mejor.

PROBLEMA 3

Dos trenes salen de una ciudad al mismo tiempo, uno viaja hacia el este y el otro hacia el oeste. Después de $9\frac{1}{2}$ horas están separados 1292 millas. Si la rapidez del tren que viaja hacia el este es 8 millas por hora más rápida que la rapidez del otro tren, encuentre sus rapideces.

Solución

Si r representa la rapidez del tren que viaja hacia el oeste, entonces $r + 8$ representa la rapidez del tren que viaja hacia el este. Ahora puede registrar los tiempos y rapideces en una tabla y luego usar la fórmula de distancia ($d = rt$) para representar las distancias.

	Rapidez	Tiempo	Distancia ($d = rt$)
Tren hacia el oeste	r	$9\frac{1}{2}$	$\frac{19}{2}r$
Tren hacia el este	$r + 8$	$9\frac{1}{2}$	$\frac{19}{2}(r + 8)$

Puesto que la distancia que recorre el tren hacia el oeste más la distancia que recorre el tren hacia el este es igual a 1292 millas, se puede establecer y resolver la siguiente ecuación.

$$\text{Distancia hacia el este} + \text{Distancia hacia el oeste} = \text{Separación en millas}$$

$$\frac{19r}{2} + \frac{19(r+8)}{2} = 1292$$

$$19r + 19(r+8) = 2584$$

$$19r + 19r + 152 = 2584$$

$$38r = 2432$$

$$r = 64$$

El tren que viaja hacia el oeste avanza con una rapidez de 64 millas por hora, y el tren que viaja hacia el este avanza con una rapidez de $64 + 8 = 72$ millas por hora. ■

Ahora considere un problema que con frecuencia se conoce como problema mixto. No hay fórmulas básicas que se apliquen a todos estos problemas, pero se sugiere que piense en términos de una sustancia pura, lo cual con frecuencia es útil para establecer una guía. También tenga presente que la frase “una solución al 40% de alguna sustancia” significa que la solución contiene 40% de dicha sustancia particular y 60% de algo más mezclado con ella. Por ejemplo, una solución de sal al 40% contiene 40% de sal y el otro 60% es algo más, probablemente agua. Ahora se ilustrará qué se entiende por sugerir que piense en términos de una sustancia pura.

PROBLEMA 4

El Control de Plagas de Bryan almacena una solución al 7% de insecticida para pastos y también una solución al 15%. ¿Cuántos galones de cada una debe mezclar para producir 40 galones que tengan 12% de insecticida?

Solución

La idea clave para resolver tal problema es reconocer la siguiente guía.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de insecticida}\\ \text{en la solución al 7\%}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de insecticida}\\ \text{en la solución al 15\%}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Cantidad de insecticida en}\\ \text{40 galones de solución al 15\%}\end{array}\right)$$

Sean x los galones de solución al 7%. Entonces $40 - x$ representa los galones de solución al 15%. La guía se traduce en la siguiente ecuación.

$$(7\%)(x) + (15\%)(40 - x) = (12\%)(40)$$

Resolver esta ecuación produce

$$0.07x + 0.15(40 - x) = 0.12(40)$$

$$0.07x + 6 - 0.15x = 4.8$$

$$-0.08x + 6 = 4.8$$

$$-0.08x = -1.2$$
$$x = 15$$

Por tanto, 15 galones de solución al 7% y 40 ″ $x = 25$ galones de solución al 15% se necesitan para mezclar y obtener 40 galones de solución al 12%. ■

PROBLEMA 5

¿Cuántos litros de alcohol puro se deben agregar a 20 litros de una solución al 40% para obtener una solución al 60%?

Solución

La idea clave para resolver tal problema es reconocer la siguiente guía.

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de alcohol}\\ \text{puro en la solución}\\ \text{original}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{de alcohol}\\ \text{puro a agregar}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{de alcohol puro}\\ \text{en la solución final}\end{pmatrix}$$

Sea l el número de litros de alcohol puro a agregar, y la guía se traduce en la siguiente ecuación.

$$(40\%)(20) + l = 60\%(20 + l)$$

Resolver esta ecuación produce

$$0.4(20) + l = 0.6(20 + l)$$
$$8 + l = 12 + 0.6l$$
$$0.4l = 4$$
$$l = 10$$

Es necesario agregar 10 litros de alcohol puro. (Recuerde comprobar esta respuesta en el enunciado original del problema.) ■

Conjunto de problemas 2.4

1. Resuelva $i = Prt$ para i, dado que $P = \$300$, $r = 8\%$ y $t = 5$ años.
2. Resuelva $i = Prt$ para i, dado que $P = \$500$, $r = 9\%$ y $t = 3\frac{1}{2}$ años.
3. Resuelva $i = Prt$ para t, dado que $P = \$400$, $r = 11\%$ e $i = \$132$.
4. Resuelva $i = Prt$ para t, dado que $P = \$250$, $r = 12\%$ e $i = \$120$.
5. Resuelva $i = Prt$ para r, dado que $P = \$600$, $t = 2\frac{1}{2}$ años e $i = \$90$. Exprese r como porcentaje.
6. Resuelva $i = Prt$ para r, dado que $P = \$700$, $t = 2$ años e $i = \$126$. Exprese r como porcentaje.
7. Resuelva $i = Prt$ para P, dado que $r = 9\%$, $t = 3$ años e $i = \$216$.
8. Resuelva $i = Prt$ para P, dado que $r = 8\frac{1}{2}\%$, $t = 2$ años e $i = \$204$.
9. Resuelva $A = P + Prt$ para A, dado que $P = \$1000$, $r = 12\%$ y $t = 5$ años.
10. Resuelva $A = P + Prt$ para A, dado que $P = \$850$, $r = 9\frac{1}{2}\%$ y $t = 10$ años.
11. Resuelva $A = P + Prt$ para r, dado que $A = \$1372$, $P = \$700$ y $t = 12$ años. Exprese r como porcentaje.
12. Resuelva $A = P + Prt$ para r, dado que $A = \$516$, $P = \$300$ y $t = 8$ años. Exprese r como porcentaje.

13. Resuelva $A = P + Prt$ para P, dado que $A = \$326$, $r = 7\%$ y $t = 9$ años.

14. Resuelva $A = P + Prt$ para P, dado que $A = \$720$, $r = 8\%$ y $t = 10$ años.

15. Use la fórmula $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ y complete la siguiente tabla.

A	98	104	49	162	$16\frac{1}{2}$	$38\frac{1}{2}$	pie cuadrado
h	14	8	7	9	3	11	pies
b_1	8	12	4	16	4	5	pies
b_2	?	?	?	?	?	?	pies

A = área, h = altura, b_1 = una base, b_2 = otra base

16. Use la fórmula $P = 2l + 2w$ y complete la siguiente tabla. (Tal vez quiera cambiar la forma de la fórmula.)

P	28	18	12	34	68	centímetros
w	6	3	2	7	14	centímetros
l	?	?	?	?	?	centímetros

P = perímetro, w = ancho, l = longitud

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para la variable indicada.

17. $V = Bh$ para h (Volumen de un prisma)

18. $A = lw$ para l (Área de un rectángulo)

19. $V = \pi r^2 h$ para h (Volumen de un cilindro circular)

20. $V = \frac{1}{3}Bh$ para B (Volumen de una pirámide)

21. $C = 2\pi r$ para r (Circunferencia de un círculo)

22. $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ para h (Área superficial de un cilindro circular)

23. $I = \frac{100M}{C}$ para C (Cociente de inteligencia)

24. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para h (Área de un trapezoide)

25. $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C (Celsius a Fahrenheit)

26. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para F (Fahrenheit a Celsius)

Para los problemas 27–36 resuelva cada ecuación para x.

27. $y = mx + b$

28. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

29. $y - y_1 = m(x - x_1)$

30. $a(x + b) = c$

31. $a(x + b) = b(x - c)$

32. $x(a - b) = m(x - c)$

33. $\frac{x - a}{b} = c$

34. $\frac{x}{a} - 1 = b$

35. $\frac{1}{3}x + a = \frac{1}{2}b$

36. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a = b$

Para los problemas 37–46 resuelva cada ecuación para la variable indicada.

37. $2x - 5y = 7$ para x

38. $5x - 6y = 12$ para x

39. $-7x - y = 4$ para y

40. $3x - 2y = -1$ para y

41. $3(x - 2y) = 4$ para x

42. $7(2x + 5y) = 6$ para y

43. $\frac{y - a}{b} = \frac{x + b}{c}$ para x

44. $\frac{x - a}{b} = \frac{y - a}{c}$ para y

45. $(y + 1)(a - 3) = x - 2$ para y

46. $(y - 2)(a + 1) = x$ para y

Resuelva cada uno de los problemas 47-62 al establecer y resolver una ecuación algebraica apropiada.

47. Suponga que la longitud de cierto rectángulo es 2 metros menos que cuatro veces su ancho. El perímetro del rectángulo es de 56 metros. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

48. El perímetro de un triángulo es de 42 pulgadas. El segundo lado mide 1 pulgada más que el doble del primer lado, y el tercer lado es 1 pulgada menor que tres veces el primer lado. Encuentre las longitudes de los tres lados del triángulo.

49. ¿Cuánto tardará en duplicar \$500 a 9% de interés simple?

50. ¿Cuánto tardará en triplicar \$700 a 10% de interés simple?

51. ¿Cuánto tardará en duplicar P dólares a 9% de interés simple?

52. ¿Cuánto tardará en triplicar P dólares a 10% de interés simple?

53. Dos aviones salen de Chicago al mismo tiempo y vuelan en direcciones opuestas. Si uno viaja a 450 millas por hora y el otro a 550 millas por hora, ¿cuánto tiempo les tomará separarse 4000 millas?

54. Observe la figura 2.4. Tyrone sale de la ciudad A en un ciclomotor que avanza hacia la ciudad B a 18 millas por hora. Al mismo tiempo, Tina sale de la ciudad B en una bicicleta que avanza hacia la ciudad A a 14 millas por hora. La distancia entre las dos ciudades es de 112 millas. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que Tyrone y Tina se encuentren?

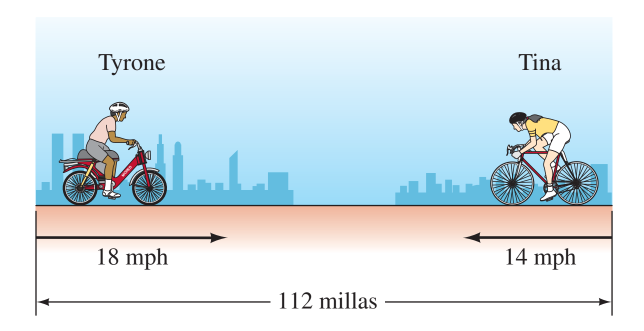


Figura 2.4

55. Juan comienza a caminar a 4 millas por hora. Una hora y media después Cathy comienza a trotar a lo largo de la misma ruta a 6 millas por hora. ¿Cuánto tardará Cathy en alcanzar a Juan?

56. Un automóvil sale de una ciudad a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tardará un segundo automóvil, que viaja a 75 kilómetros por hora, en alcanzar al primero, si sale una hora después?

57. Bret comenzó una carrera de bicicletas de 70 millas a 20 millas por hora. Después de cierto tiempo se sintió un poco cansado y bajó a 12 millas por hora durante el resto del viaje. Todo el recorrido de 70 millas tardó $4\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuánto recorrió Bret cuando redujo su rapidez a 12 millas por hora?

58. ¿Cuántos galones de una solución de sal al 12% se deben mezclar con 6 galones de una solución de sal al 20% para obtener una solución de sal al 15%?

59. Suponga que tiene un suministro de una solución al 30% de alcohol y una solución de alcohol al 70%. ¿Cuántos cuartos de cada uno debe mezclar para producir 20 cuartos que sean 40% alcohol?

60. ¿Cuántas tazas de jugo de uva se deben agregar a 40 tazas de ponche que es 5% jugo de uva, para obtener un ponche que sea 10% jugo de uva?

61. ¿Cuántos mililitros de ácido puro se deben agregar a 150 mililitros de una solución al 30% de ácido, para obtener una solución al 40%?

62. Un radiador de 16 cuartos contiene una solución al 50% de anticongelante. ¿Cuánto se necesita drenar, y sustituir con anticongelante puro, para obtener una solución al 60% de anticongelante?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

63. Algunas personas restan 32 y luego dividen entre 2 para estimar el cambio de una lectura Fahrenheit a una lectura Celsius. ¿Por qué esto da un estimado y cuán buena es la estimación?

64. Uno de sus compañeros de clase analiza el problema 56 del modo siguiente: “El primer automóvil recorrió 60 kilómetros antes de que partiera el segundo automóvil. Dado que el segundo automóvil viaja 15 kilómetros por hora más rápido, tardará $\frac{60}{15} = 4$ horas para que el segundo automóvil rebase al primero”. ¿Cuál es su reacción ante tal análisis del problema?

65. Resuma las nuevas ideas relativas a la resolución de problemas que haya adquirido hasta el momento en este curso.

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 66–73 use su calculadora para ayudar a resolver cada fórmula para la variable indicada.

66. Resuelva $i = Prt$ para i, dado que $P = \$875$, $r = 12\frac{1}{2}\%$ y $r = 4$ años.

67. Resuelva $i = Prt$ para i, dado que $P = \$1125$, $r = 13\frac{1}{4}\%$ y $t = 4$ años.

68. Resuelva $i = Prt$ para t, dado que $i = \$453.25$, $P = \$925$ y $r = 14\%$.

69. Resuelva $i = Prt$ para t, dado que $i = \$243.75$, $P = \$1250$ y $r = 13\%$.

70. Resuelva $i = Prt$ para r, dado que $i = \$356.50$, $P = \$1550$ y $t = 2$ años. Exprese r como porcentaje.

71. Resuelva $i = Prt$ para r, dado que $i = \$159.50$, $P = \$2200$ y $t = 0.5$ de un año. Exprese r como porcentaje.

72. Resuelva $A = P + Prt$ para P, dado que $A = \$1423.50$, $r = 9\frac{1}{2}\%$ y $t = 1$ año.

73. Resuelva $A = P + Prt$ para P, dado que $A = \$2173.75$, $r = 8\frac{3}{4}\%$ y $t = 2$ años.

74. Si tiene acceso a software que incluya hojas de cálculo, retome los problemas 15 y 16. Debe poder ingresar la información dada en hileras. Luego, cuando ingrese una fórmula en una celda bajo la información y arrastre dicha fórmula a través de las columnas, el software debe producir todas las respuestas.

2.5 Desigualdades

En la sección 1.2 se mencionaron los símbolos básicos de desigualdad. Con estos símbolos se pueden hacer varios **enunciados de desigualdad**:

$a < b$ significa a es menor que b.

$a \leq b$ significa a es menor que o igual a b.

$a > b$ significa a es mayor que b.

$a \geq b$ significa a es mayor que o igual a b.

He aquí algunos ejemplos de **enunciados numéricos de desigualdad**:

$7 + 8 > 10$ $\quad -4 + (-6) \geq -10$

$-4 > -6$ $\quad 7 - 9 \leq -2$

$7 - 1 < 20$ $\quad 3 + 4 > 12$

$8(-3) < 5(-3)$ $\quad 7 - 1 < 0$

Note que sólo $3 + 4 > 12$ y $7 - 1 < 0$ son *falsos*; los otros seis son enunciados numéricos *verdaderos*.

Las **desigualdades algebraicas** contienen una o más variables. Los siguientes son ejemplos de desigualdades algebraicas.

$x + 4 > 8$ $\quad 3x + 2y \leq 4$

$3x - 1 < 15$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 7$

$y^2 + 2y - 4 \geq 0$

Una desigualdad algebraica como $x + 4 > 8$ no es ni cierta ni falsa como se plantea, y se le llama **enunciado abierto**. Para cada valor numérico que toma x, la desigualdad algebraica $x + 4 > 8$ se convierte en un enunciado numérico de desigualdad que es verdadero o falso. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $x + 4 > 8$ se convierte en $-3 + 4 > 8$, que es falso. Si $x = 5$, entonces $x + 4 > 8$ se convierte en $5 + 4 > 8$, que es verdadero. **Resolver una desigualdad** es el proceso de encontrar los números que hacen que una desigualdad algebraica sea un enunciado numérico verdadero. A tales números se les llama *soluciones* de la desigualdad; las soluciones *satisfacen* la desigualdad.

El proceso general de resolver desigualdades tiene un cercano paralelismo con el proceso para resolver ecuaciones. Se continúa sustituyendo la desigualdad dada con desigualdades equivalentes, aunque más simples. Por ejemplo,

$$3x + 4 > 10 \quad \textbf{(1)}$$

$$3x > 6 \quad \textbf{(2)}$$

$$x > 2 \quad \textbf{(3)}$$

son todas desigualdades equivalentes; esto es: todas tienen las mismas soluciones. Por inspección se ve que las soluciones para (3) son todos los números mayores que *2*. Por tanto, (1) tiene las mismas soluciones.

El procedimiento exacto para simplificar desigualdades de modo que se determinen las soluciones se basa principalmente en dos propiedades. La primera es la propiedad aditiva de la desigualdad.

Propiedad aditiva de la desigualdad

Para todo número real a, b y c,

$$a > b \quad \text{si y sólo si } a + c > b + c$$

La propiedad aditiva de la desigualdad afirma que se puede sumar cualquier número a ambos lados de una desigualdad para producir una desigualdad equivalente. La propiedad se estableció en términos de $>$, pero existen propiedades análogas para $<$, $\geq$ y $\leq$.

Antes de enunciar la propiedad multiplicativa de la desigualdad, observe algunos ejemplos numéricos.

$2 < 5$	Multiplique ambos lados por 4	$4(2) < 4(5)$	$8 < 20$
$-3 > -7$	Multiplique ambos lados por 2	$2(-3) > 2(-7)$	$-6 > -14$
$-4 < 6$	Multiplique ambos lados por 10	$10(-4) < 10(6)$	$-40 < 60$
$4 < 8$	Multiplique ambos lados por -3	$-3(4) > -3(8)$	$-12 > -24$
$3 > -2$	Multiplique ambos lados por -4	$-4(3) < -4(-2)$	$-12 < 8$
$-4 < -1$	Multiplique ambos lados por -2	$-2(-4) > -2(-1)$	$8 > 2$

Observe en los primeros tres ejemplos que cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por un *número positivo*, se obtiene una desigualdad del *mismo sentido*. Esto significa que si la desigualdad original es *menor que*, entonces la

nueva desigualdad es *menor que*; y si la desigualdad original es *mayor que*, entonces la nueva desigualdad es *mayor que*. Los últimos tres ejemplos ilustran que cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por un *número negativo*, se obtiene una desigualdad *del sentido opuesto*.

La propiedad multiplicativa de la desigualdad se puede enunciar del modo siguiente.

Propiedad multiplicativa de la desigualdad

(a) Para todo número real a, b y c, con $c > 0$,

$a > b$ si y sólo si $ac > bc$

(b) Para todo número real a, b y c, con $c < 0$,

$a > b$ si y sólo si $ac < bc$

Propiedades similares se mantienen si se invierte cada desigualdad o si se sustituye $>$ con $\geq$ y $<$ con $\leq$. Por ejemplo, si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$.

Ahora use las propiedades aditiva y multiplicativa de la desigualdad para ayudarse a resolver algunas desigualdades.

EJEMPLO 1

Resuelva $3x - 4 > 8$

Solución

El conjunto solución es $\{x \mid x > 4\}$. (Recuerde que el conjunto $\{x \mid x > 4\}$ se lee como

$$3x - 4 > 8$$

$$3x - 4 + 4 > 8 + 4 \qquad \text{Sume 4 a ambos lados.}$$

$$3x > 12$$

$$\frac{1}{3}(3x) > \frac{1}{3}(12) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{3}.$$

$$x > 4$$

"el conjunto de toda x tal que x es mayor que 4".) ■

En el ejemplo 1, una vez obtenida la desigualdad simple $x > 4$, el conjunto solución $\{x \mid x > 4\}$ se vuelve obvio. Los conjuntos de soluciones para desigualdades también se expresan en una recta numérica. La figura 2.5 muestra la gráfica del conjunto solución para el ejemplo 1. El paréntesis a la izquierda del 4 indica que 4 *no* es una solución, y la parte roja de la línea hacia la derecha del 4 indica que todos los números mayores que 4 son soluciones.

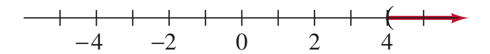


Figura 2.5

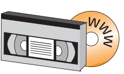
También es conveniente expresar los conjuntos solución de desigualdades con **notación de intervalos**. Por ejemplo, la notación $(4, \infty)$ también se refiere al conjunto de los números reales mayores que 4. Como en la figura 2.5, el paréntesis a la izquierda indica que el 4 no se incluye. El símbolo de infinito, ∞, junto con el paréntesis a la derecha, indican que no hay punto final a la derecha. A continuación se presenta una lista parcial de notaciones de intervalos, junto con los conjuntos de gráficas que representan (figura 2.6). En la siguiente sección se harán adiciones a esta lista.

Conjunto	Gráfica	Notación de intervalo
$\{x \mid x > a\}$	a	(a, ∞)
$\{x \mid x \geq a\}$	a	$[a, \infty)$
$\{x \mid x < b\}$	b	$(-\infty, b)$
$\{x \mid x \leq b\}$	b	$(-\infty, b]$

Figura 2.6

Note el uso de corchetes para indicar la inclusión de puntos finales. A partir de ahora los conjuntos solución de desigualdades se expresarán usando notación de intervalos.

EJEMPLO 2 Resuelva $-2x + 1 > 5$ y grafique las soluciones.



Solución

$$
\begin{aligned}
-2x + 1 &> 5 \\
-2x + 1 + (-1) &> 5 + (-1) && \text{Sume } -1 \text{ a ambos lados.} \\
-2x &> 4 \\
-\frac{1}{2}(-2x) &< -\frac{1}{2}(4) && \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{2}. \\
x &< -2 && \text{Note que el sentido de la desigualdad se invierte.}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $(-\infty, -2)$, que se puede ilustrar en una recta numérica como en la figura 2.7.

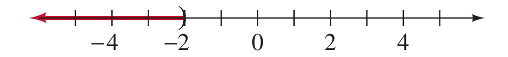


Figura 2.7 ■

Comprobar las soluciones para una desigualdad presenta problemas. Obvio, no es posible comprobar todas las infinitas soluciones para una desigualdad particular.

Sin embargo, al comprobar al menos una solución, en especial cuando se usó la propiedad multiplicativa, se aprecia el error común de olvidar cambiar el sentido de una desigualdad. En el ejemplo 2 se afirma que todos los números menores que –2 satisfarán la desigualdad original. Compruebe uno de tales números, por decir –4.

$$-2x + 1 > 5$$
$$-2(-4) + 1 \overset{?}{>} 5 \quad \text{cuando } x = -4$$
$$8 + 1 \overset{?}{>} 5$$
$$9 > 5$$

Por tanto, –4 satisface la desigualdad original. De haber olvidado cambiar el sentido de la desigualdad cuando ambos lados se multiplicaron por $-\frac{1}{2}$, la respuesta habría sido $x > -2$, y se habría detectado tal error en la comprobación.

Muchas de las mismas técnicas empleadas para resolver ecuaciones, como quitar paréntesis y combinar términos semejantes, sirven para resolver desigualdades. Sin embargo, debe ser extremadamente cuidadoso cuando use la propiedad multiplicativa de la desigualdad. Estudie cada uno de los siguientes ejemplos con mucho cuidado. El formato que se utiliza aquí resalta los principales pasos de una solución.

EJEMPLO 3 Resuelva $-3x + 5x - 2 \geq 8x - 7 - 9x$

Solución

$$-3x + 5x - 2 \geq 8x - 7 - 9x$$
$$2x - 2 \geq -x - 7 \quad \text{Combine términos similares en ambos lados.}$$
$$3x - 2 \geq -7 \quad \text{Sume } x \text{ a ambos lados.}$$
$$3x \geq -5 \quad \text{Sume 2 a ambos lados.}$$
$$\frac{1}{3}(3x) \geq \frac{1}{3}(-5) \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{3}.$$
$$x \geq -\frac{5}{3}$$

El conjunto solución es $\left[-\frac{5}{3}, \infty\right)$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $-5(x - 1) \leq 10$ y grafique las soluciones.

Solución

$$-5(x - 1) \leq 10$$
$$-5x + 5 \leq 10 \quad \text{Aplique la propiedad distributiva a la izquierda.}$$
$$-5x \leq 5 \quad \text{Sume –5 a ambos lados.}$$

$$-\frac{1}{5}(-5x) \geq -\frac{1}{5}(5) \quad \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{5}\text{, lo que invierte la desigualdad.}$$

$$x \geq -1$$

El conjunto solución es $[-1, \infty)$ y se puede graficar como en la figura 2.8.

Figura 2.8 ■

EJEMPLO 5

Resuelva $4(x - 3) > 9(x + 1)$

Solución

$$4(x - 3) > 9(x + 1)$$

$$4x - 12 > 9x + 9 \quad \text{Aplique la propiedad distributiva.}$$

$$-5x - 12 > 9 \quad \text{Sume } -9x \text{ a ambos lados.}$$

$$-5x > 21 \quad \text{Sume 12 a ambos lados.}$$

$$-\frac{1}{5}(-5x) < -\frac{1}{5}(21) \quad \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{5}\text{, lo que invierte la desigualdad.}$$

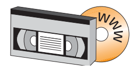
$$x < -\frac{21}{5}$$

El conjunto solución es $\left(-\infty, -\frac{21}{5}\right)$. ■

El siguiente ejemplo resolverá la desigualdad sin indicar la justificación para cada paso. Asegúrese de que puede proporcionar las razones para los pasos.

EJEMPLO 6

Resuelva $3(2x + 1) - 2(2x + 5) < 5(3x - 2)$.



Solución

$$3(2x + 1) - 2(2x + 5) < 5(3x - 2)$$

$$6x + 3 - 4x - 10 < 15x - 10$$

$$2x - 7 < 15x - 10$$

$$-13x - 7 < -10$$

$$-13x < -3$$

$$-\frac{1}{13}(-13x) > -\frac{1}{13}(-3)$$

$$x > \frac{3}{13}$$

El conjunto solución es $\left(\frac{3}{13}, \infty\right)$. ■

Conjunto de problemas 2.5

Para los problemas 1–8 exprese la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje una gráfica del intervalo.

1. $x > 1$
2. $x > -2$
3. $x \geq -1$
4. $x \geq 3$
5. $x < -2$
6. $x < 1$
7. $x \leq 2$
8. $x \leq 0$

Para los problemas 9–16 exprese cada intervalo como una desigualdad usando la variable x. Por ejemplo, puede expresar el intervalo $[5, \infty)$ como $x \geq 5$.

9. $(-\infty, 4)$
10. $(-\infty, -2)$
11. $(-\infty, -7]$
12. $(-\infty, 9]$
13. $(8, \infty)$
14. $(-5, \infty)$
15. $[-7, \infty)$
16. $[10, \infty)$

Para los problemas 17–40 resuelva cada una de las desigualdades y grafique el conjunto solución en una recta numérica.

17. $x - 3 > -2$
18. $x + 2 < 1$
19. $-2x \geq 8$
20. $-3x \leq -9$
21. $5x \leq -10$
22. $4x \geq -4$
23. $2x + 1 < 5$
24. $2x + 2 > 4$
25. $3x - 2 > -5$
26. $5x - 3 < -3$
27. $-7x - 3 \leq 4$
28. $-3x - 1 \geq 8$
29. $2 + 6x > -10$
30. $1 + 6x > -17$
31. $5 - 3x < 11$
32. $4 - 2x < 12$
33. $15 < 1 - 7x$
34. $12 < 2 - 5x$
35. $-10 \leq 2 + 4x$
36. $-9 \leq 1 + 2x$
37. $3(x + 2) > 6$
38. $2(x - 1) < -4$
39. $5x + 2 \geq 4x + 6$
40. $6x - 4 \leq 5x - 4$

Para los problemas 41–70 resuelva cada desigualdad y exprese el conjunto solución usando notación de intervalos.

41. $2x - 1 > 6$
42. $3x - 2 < 12$
43. $-5x - 2 < -14$
44. $5 - 4x > -2$
45. $-3(2x + 1) \geq 12$
46. $-2(3x + 2) \leq 18$
47. $4(3x - 2) \geq -3$
48. $3(4x - 3) \leq -11$
49. $6x - 2 > 4x - 14$
50. $9x + 5 < 6x - 10$
51. $2x - 7 < 6x + 13$
52. $2x - 3 > 7x + 22$
53. $4(x - 3) \leq -2(x + 1)$
54. $3(x - 1) \geq -(x + 4)$
55. $5(x - 4) - 6(x + 2) < 4$
56. $3(x + 2) - 4(x - 1) < 6$
57. $-3(3x + 2) - 2(4x + 1) \geq 0$
58. $-4(2x - 1) - 3(x + 2) \geq 0$
59. $-(x - 3) + 2(x - 1) < 3(x + 4)$
60. $3(x - 1) - (x - 2) > -2(x + 4)$
61. $7(x + 1) - 8(x - 2) < 0$
62. $5(x - 6) - 6(x + 2) < 0$
63. $-5(x - 1) + 3 > 3x - 4 - 4x$
64. $3(x + 2) + 4 < -2x + 14 + x$
65. $3(x - 2) - 5(2x - 1) \geq 0$
66. $4(2x - 1) - 3(3x + 4) \geq 0$
67. $-5(3x + 4) < -2(7x - 1)$
68. $-3(2x + 1) > -2(x + 4)$
69. $-3(x + 2) > 2(x - 6)$
70. $-2(x - 4) < 5(x - 1)$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

71. ¿Las relaciones *menor que* y *mayor que* poseen una propiedad simétrica similar a la propiedad simétrica de la igualdad? Defienda su respuesta.

72. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolvería la desigualdad $-3 > 5 - 2x$.

73. ¿Cómo explicaría a alguien por qué es necesario invertir el símbolo de desigualdad cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por un número negativo?

MÁS INVESTIGACIÓN

74. Resuelva cada una de las siguientes desigualdades.

(a) $5x - 2 > 5x + 3$

(b) $3x - 4 < 3x + 7$

(c) $4(x + 1) < 2(2x + 5)$

(d) $-2(x - 1) > 2(x + 7)$

(e) $3(x - 2) < -3(x + 1)$

(f) $2(x + 1) + 3(x + 2) < 5(x - 3)$

2.6 Más acerca de desigualdades y resolución de problemas

Cuando se estudió la resolución de ecuaciones que implican fracciones, se descubrió que **limpiar la ecuación de todas las fracciones** es una técnica efectiva. Para lograrlo se multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador de todos los denominadores en la ecuación. Este mismo enfoque básico funciona muy bien con desigualdades que implican fracciones, como demuestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelva $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x > \frac{3}{4}$

Solución

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x > \frac{3}{4}$$

$$12\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x\right) > 12\left(\frac{3}{4}\right)$$ Multiplique ambos lados por 12, que es el MCD de 3, 2 y 4.

$$12\left(\frac{2}{3}x\right) - 12\left(\frac{1}{2}x\right) > 12\left(\frac{3}{4}\right)$$ Aplique la propiedad distributiva.

$$8x - 6x > 9$$

$$2x > 9$$

$$x > \frac{9}{2}$$

El conjunto solución es $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{x + 2}{4} + \frac{x - 3}{8} < 1$

Solución

$$\frac{x + 2}{4} + \frac{x - 3}{8} < 1$$

$$8\left(\frac{x + 2}{4} + \frac{x - 3}{8}\right) < 8(1)$$ Multiplique ambos lados por 8, que es el MCD de 4 y 8.

$$8\left(\frac{x+2}{4}\right)+8\left(\frac{x-3}{8}\right)<8(1)$$
$$2(x+2)+(x-3)<8$$
$$2x+4+x-3<8$$
$$3x+1<8$$
$$3x<7$$
$$x<\frac{7}{3}$$

El conjunto solución es $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{5}\geq\frac{x+2}{10}-4$

Solución

$$\frac{x}{2}-\frac{x-1}{5}\geq\frac{x+2}{10}-4$$
$$10\left(\frac{x}{2}-\frac{x-1}{5}\right)\geq 10\left(\frac{x+2}{10}-4\right)$$
$$10\left(\frac{x}{2}\right)-10\left(\frac{x-1}{5}\right)\geq 10\left(\frac{x+2}{10}\right)-10(4)$$
$$5x-2(x-1)\geq x+2-40$$
$$5x-2x+2\geq x-38$$
$$3x+2\geq x-38$$
$$2x+2\geq -38$$
$$2x\geq -40$$
$$x\geq -20$$

El conjunto solución es $[-20, \infty)$. ■

La idea de **limpiar todos los decimales** también funciona con las desigualdades, en forma muy parecida a como sucede con las ecuaciones. Puede multiplicar ambos lados de una desigualdad por una potencia adecuada de 10 y luego proceder a resolver en la forma usual. Los siguientes dos ejemplos ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 4

Resuelva $x\geq 1.6+0.2x$

Solución

$$x\geq 1.6+0.2x$$
$$10(x)\geq 10(1.6+0.2x)$$ Multiplique ambos lados por 10.

$$10x \geq 16 + 2x$$
$$8x \geq 16$$
$$x \geq 2$$

El conjunto solución es $[2, \infty]$. ■

EJEMPLO 5

Resuelva $0.08x + 0.09(x + 100) \geq 43$

Solución

$$0.08x + 0.09(x + 100) \geq 43$$
$$100(0.08x + 0.09(x + 100)) \geq 100(43) \quad \text{Multiplique ambos lados por 100.}$$
$$8x + 9(x + 100) \geq 4300$$
$$8x + 9x + 900 \geq 4300$$
$$17x + 900 \geq 4300$$
$$17x \geq 3400$$
$$x \geq 200$$

El conjunto solución es $[200, \infty)$. ■

Enunciados compuestos

En matemáticas las palabras "y" y "o" se usan para formar **enunciados compuestos**. Los siguientes son ejemplos de enunciados numéricos compuestos que usan "y". A tales enunciados se les llama **conjunciones**. Por convención, una conjunción es verdadera sólo si todas sus partes componentes son verdaderas. Los enunciados 1 y 2 siguientes son verdaderos, pero los enunciados 3, 4 y 5 son falsos.

1. $3 + 4 = 7$ y $-4 < -3$. Verdadero
2. $-3 < -2$ y $-6 > -10$. Verdadero
3. $6 > 5$ y $-4 < -8$. Falso
4. $4 < 2$ y $0 < 10$. Falso
5. $-3 + 2 = 1$ y $5 + 4 = 8$. Falso

A los enunciados compuestos que usan "o" se les llama **disyunciones**. Los siguientes son ejemplos de disyunciones que implican enunciados numéricos.

6. $0.14 > 0.13$ o $0.235 < 0.237$. Verdadero
7. $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ o $-4 + (-3) = 10$. Verdadero
8. $-\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ o $(0.4)(0.3) = 0.12$. Falso
9. $\frac{2}{5} < -\frac{2}{5}$ o $7 + (-9) = 16$. Falso

Una disyunción es verdadera si al menos una de sus partes componentes es verdadera. En otras palabras, las disyunciones son falsas sólo si todas las partes componentes son falsas. Por tanto, los enunciados 6, 7 y 8 son verdaderos, pero el enunciado 9 es falso.

Ahora siga el procedimiento para encontrar soluciones para algunos enunciados compuestos que implican desigualdades algebraicas. Tenga en mente que los acuerdos anteriores para etiquetar conjunciones y disyunciones como verdaderas o falsas forman la base del razonamiento.

EJEMPLO 6

Grafique el conjunto solución para la conjunción $x > -1$ y $x < 3$

Solución

La palabra clave es "y", así que es necesario satisfacer ambas desigualdades. Por ende, todos los números entre −1 y 3 son soluciones, y esto se puede indicar en una recta numérica como en la figura 2.9.

Figura 2.9

Al usar notación de intervalos se representa al intervalo encerrado entre paréntesis en la figura 2.9 como $(-1, 3)$. Al usar notación de construcción de conjuntos, el mismo intervalo se expresa como $\{x|-1 < x < 3\}$ donde el enunciado $-1 < x < 3$ se lee "Uno negativo menor que x y x menor que tres". En otras palabras x está entre −1 y 3. ■

El ejemplo 6 presenta otro concepto que pertenece a conjuntos. El conjunto de todos los elementos comunes a dos conjuntos se llama **intersección** de los dos conjuntos. Por tanto, en el ejemplo 6 aparece la intersección de dos conjuntos $\{x|x > -1\}$ y $\{x|x < 3\}$ del conjunto $\{x| -1 < x < 3\}$. En general, la intersección de dos conjuntos se define del modo siguiente:

Definición 2.1

La **intersección** de dos conjuntos A y B (que se escribe $A \cap B$) es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B. Al usar notación de construcción de conjuntos, se puede escribir

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ y } x \in B\}$$

EJEMPLO 7

Resuelva la conjunción $3x + 1 > -5$ y $2x + 5 > 7$, y grafique este conjunto solución en una recta numérica.

Solución

Primero, simplifique ambas desigualdades.

$$3x + 1 > -5 \quad \text{y} \quad 2x + 5 > 7$$
$$3x > -6 \quad \text{y} \quad 2x > 2$$
$$x > -2 \quad \text{y} \quad x > 1$$

Dado que es una conjunción, se deben satisfacer ambas desigualdades. Por ende, todos los números mayores que 1 son soluciones, y el conjunto solución es $(1, \infty)$. En la figura 2.10 se muestra la gráfica del conjunto solución.

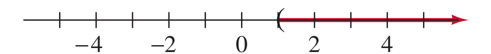


Figura 2.10 ■

Una conjunción como $3x + 1 > -3$ y $3x + 1 < 7$, en la cual la misma expresión algebraica (en este caso $3x + 1$) se contiene en ambas desigualdades, se puede resolver al usar la **forma compacta** $-3 < 3x + 1 < 7$, del modo siguiente:

$$-3 < 3x + 1 < 7$$

$$-4 < 3x < 6 \qquad \text{Sume } -1 \text{ al lado izquierdo, en medio y al lado derecho.}$$

$$-\frac{4}{3} < x < 2 \qquad \text{Multiplique todo por } \frac{1}{3}.$$

El conjunto solución es $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

La palabra *y* liga el concepto de una conjunción con el concepto de intersección de conjuntos. En forma parecida la palabra *o* liga la idea de una disyunción con el concepto de **unión** de conjuntos. La unión de dos conjuntos se define de la manera siguiente:

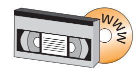
Definición 2.2

La **unión** de dos conjuntos A y B (que se escribe $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B, o en ambos. Al usar notación de construcción de conjunto, se escribe

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$$

E J E M P L O 8

Grafique el conjunto solución para la disyunción $x < -1$ *o* $x > 2$, y exprésela usando notación de intervalos.



Solución

La palabra clave es "o", así que todos los números que satisfacen cualquier desigualdad (o ambas) son soluciones. Por ende, todos los números menores que −1, junto con todos los números mayores que 2, son las soluciones. La gráfica del conjunto solución es la que se muestra en la figura 2.11.

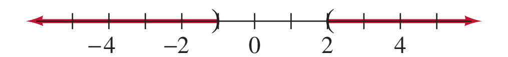


Figura 2.11

Al usar notación de intervalos y el concepto de unión de conjuntos, el conjunto solución se expresa como $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. ■

El ejemplo 8 ilustra que, en términos de vocabulario de conjuntos, el conjunto solución de una disyunción es la unión de los conjuntos solución de las partes componentes de la disyunción. Note que no hay forma compacta para escribir $x < -1$ o $x > 2$ o para cualquier disyunción.

EJEMPLO 9

Resuelva la disyunción $2x - 5 < -11$ o $5x + 1 \geq 6$ y grafique su conjunto solución en una recta numérica.

Solución

Primero simplifique ambas desigualdades.

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5 < -11 & \text{o} & 5x + 1 \geq 6 \\ 2x < -6 & \text{o} & 5x \geq 5 \\ x < -3 & \text{o} & x \geq 1 \end{array}$$

Es una disyunción, y todos los números menores que -3, junto con todos los números mayores que o iguales a 1, la satisfarán. Por ende, el conjunto solución es $(-\infty, -3) \cup [1, \infty)$. Su gráfica se muestra en la figura 2.12.

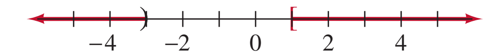


Figura 2.12

En resumen, para resolver un enunciado compuesto que implique una desigualdad, proceda del modo siguiente:

1. Resuelva por separado cada desigualdad en el enunciado compuesto.
2. Si es una conjunción, el conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de cada desigualdad.
3. Si es una disyunción, el conjunto solución es la unión de los conjuntos solución de cada desigualdad.

Las siguientes convenciones acerca del uso de notación de intervalos (figura 2.13) se deben agregar a la lista de la figura 2.6.

Conjunto	Gráfica	Notación de intervalo
$\{x \mid a < x < b\}$	a b	(a, b)
$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b	$[a, b)$
$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b	$(a, b]$
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b	$[a, b]$

Figura 2.13

Resolución de problemas

Esta sección concluirá con algunos problemas verbales que contienen enunciados de desigualdad.

PROBLEMA 1

Sari tiene calificaciones de 94, 84, 86 y 88 en sus primeros cuatro exámenes del semestre. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 90 o mejor para los cinco exámenes?

Solución

Sea s la calificación que Sari necesita en el quinto examen. Puesto que el promedio se calcula al sumar todas las calificaciones y dividir entre el número de calificaciones, se tiene que resolver la siguiente desigualdad.

$$\frac{94 + 84 + 86 + 88 + s}{5} \geq 90$$

Al resolver esta desigualdad se obtiene

$$\frac{352 + s}{5} \geq 90$$

$$5\left(\frac{352 + s}{5}\right) \geq 5(90) \qquad \text{Multiplique ambos lados por 5.}$$

$$352 + s \geq 450$$

$$s \geq 98$$

Sari debe recibir una calificación de 98 o mejor. ■

PROBLEMA 2

Una inversionista tiene $1000 para invertir. Suponga que ella invierte $500 a 8% de interés. ¿A qué tasa debe invertir los otros $500 para que las dos inversiones en conjunto produzcan más de $100 de interés anual?

Solución

Sea r la tasa de interés desconocida. Se puede usar la siguiente guía para establecer una desigualdad.

Interés de inversión a 8% + Interés de inversión a r por ciento > $100

$$(8\%)(\$500) + r(\$500) > \$100$$

Resolver esta desigualdad produce

$$40 + 500r > 100$$

$$500r > 60$$

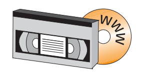
$$r > \frac{60}{500}$$

$$r > 0.12 \qquad \text{Cambie a decimal.}$$

Ella debe invertir los otros $500 a una tasa mayor que 12%. ■

PROBLEMA 3

Si la temperatura durante un periodo de 24 h varió entre 41 y 59ºF, inclusive (esto es, $41 \leq F \leq 59$), ¿cuál fue el rango en grados Celsius?



Solución

Use la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$, para resolver la siguiente desigualdad compuesta.

$$41 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 59$$

Al resolver ésta produce

$$9 \leq \frac{9}{5}C \leq 27 \qquad \text{Sume } -32.$$

$$\frac{5}{9}(9) \leq \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}C\right) \leq \frac{5}{9}(27) \qquad \text{Multiplique por } \frac{5}{9}.$$

$$5 \leq C \leq 15$$

El rango estuvo entre 5 y 15ºC, inclusive. ■

Conjunto de problemas 2.6

Para los problemas 1–18 resuelva cada una de las desigualdades y exprese los conjuntos solución en notación de intervalos.

1. $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x > \frac{44}{15}$

2. $\frac{1}{4}x - \frac{4}{3}x < -13$

3. $x - \frac{5}{6} < \frac{x}{2} + 3$

4. $x + \frac{2}{7} > \frac{x}{2} - 5$

5. $\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{4} \geq \frac{5}{2}$

6. $\frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{5} \leq \frac{3}{5}$

7. $\frac{3-x}{6} + \frac{x+2}{7} \leq 1$

8. $\frac{4-x}{5} + \frac{x+1}{6} \geq 2$

9. $\frac{x+3}{8} - \frac{x+5}{5} \geq \frac{3}{10}$

10. $\frac{x-4}{6} - \frac{x-2}{9} \leq \frac{5}{18}$

11. $\frac{4x-3}{6} - \frac{2x-1}{12} < -2$

12. $\frac{3x+2}{9} - \frac{2x+1}{3} > -1$

13. $0.06x + 0.08(250 - x) \geq 19$

14. $0.08x + 0.09(2x) \geq 130$

15. $0.09x + 0.1(x + 200) > 77$

16. $0.07x + 0.08(x + 100) > 38$

17. $x \geq 3.4 + 0.15x$

18. $x \geq 2.1 + 0.3x$

Para los problemas 19–34 grafique el conjunto solución para cada desigualdad compuesta y exprese los conjuntos solución en notación de intervalos.

19. $x > -1$ y $x < 2$

20. $x > 1$ y $x < 4$

21. $x \leq 2$ y $x > -1$

22. $x \leq 4$ y $x \geq -2$

23. $x > 2$ o $x < -1$

24. $x > 1$ o $x < -4$

25. $x \leq 1$ o $x > 3$

26. $x < -2$ o $x \geq 1$

27. $x > 0$ y $x > -1$

28. $x > -2$ y $x > 2$

29. $x < 0$ y $x > 4$

30. $x > 1$ o $x < 2$

31. $x > -2$ o $x < 3$

32. $x > 3$ y $x < -1$

33. $x > -1$ o $x > 2$

34. $x < -2$ o $x < 1$

Para los problemas 35–44 resuelva cada desigualdad compuesta y grafique los conjuntos solución. Exprese los conjuntos solución en notación de intervalos.

35. $x - 2 > -1$ y $x - 2 < 1$

36. $x + 3 > -2$ y $x + 3 < 2$

37. $x + 2 < -3$ o $x + 2 > 3$

38. $x - 4 < -2$ o $x - 4 > 2$

39. $2x - 1 \geq 5$ y $x > 0$

40. $3x + 2 > 17$ y $x \geq 0$

41. $5x - 2 < 0$ y $3x - 1 > 0$

42. $x + 1 > 0$ y $3x - 4 < 0$

43. $3x + 2 < -1$ o $3x + 2 > 1$

44. $5x - 2 < -2$ o $5x - 2 > 2$

Para los problemas 45–56 resuelva cada desigualdad compuesta mediante la forma compacta. Exprese los conjuntos solución en notación de intervalos.

45. $-3 < 2x + 1 < 5$

46. $-7 < 3x - 1 < 8$

47. $-17 \leq 3x - 2 \leq 10$

48. $-25 \leq 4x + 3 \leq 19$

49. $1 < 4x + 3 < 9$

50. $0 < 2x + 5 < 12$

51. $-6 < 4x - 5 < 6$

52. $-2 < 3x + 4 < 2$

53. $-4 \leq \frac{x - 1}{3} \leq 4$

54. $-1 \leq \frac{x + 2}{4} \leq 1$

55. $-3 < 2 - x < 3$

56. $-4 < 3 - x < 4$

Para los problemas 57–67 resuelva cada problema al establecer y resolver una desigualdad adecuada.

57. Suponga que Lance tiene $500 para invertir. Si invierte $300 a 9% de interés, ¿a qué tasa debe invertir los restantes $200 de modo que las dos inversiones produzcan más de $47 en interés anual?

58. Mona invierte $100 a 8% de interés anual. ¿Cuánto tiene que invertir a 9% para que el interés anual total de las dos inversiones supere $26?

59. La altura promedio de los dos delanteros y del centro de un equipo de básquetbol es 6 pies y 8 pulgadas. ¿Cuál debe ser la altura promedio de los dos guardias para que el promedio del equipo sea menor que 6 pies y 4 pulgadas?

60. Thanh tiene calificaciones de 52, 84, 65 y 74 en sus primeros cuatro exámenes de matemáticas. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 70 o mejor para los cinco exámenes?

61. Marsha tiró líneas de 142 y 170 en sus primeros dos juegos. ¿Cuánto debe tirar en el tercer juego para tener un promedio de al menos 160 para los tres juegos?

62. Candace tiene calificaciones de 95, 82, 93 y 84 en sus primeros cuatro exámenes del semestre. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 90 o mejor para los cinco exámenes?

63. Suponga que Derwin tiró rondas de 82, 84, 78 y 79 en los primeros cuatro días de un torneo de golf. ¿Cuánto debe tirar en el quinto día del torneo para promediar 80 o menos para los cinco días?

64. Las temperaturas para un periodo de 24 horas variaron entre −4ºF y 23ºF, inclusive. ¿Cuál fue el rango en grados Celsius? $\left(\text{Use } F = \frac{9}{5}C + 32.\right)$

65. Las temperaturas de horno para cocinar varios alimentos por lo general varían entre 325 y 425ºF, inclusive. Exprese este rango en grados Celsius. (Redondee las respuestas al grado más cercano.)

66. El cociente de inteligencia de una persona (I) se encuentra al dividir la edad mental (M), según indican pruebas estándar, por la edad cronológica (C) y luego multiplicar esta razón por 100. Puede usar la fórmula $I = \frac{100M}{C}$. Si el rango I de un grupo de niños de 11 años de edad está dado por $80 \leq I \leq 140$, encuentre el rango de la edad mental de este grupo.

67. Retome el problema 66 para un rango I de 70 a 125, inclusive, para un grupo de niños de 9 años de edad.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

68. Explique la diferencia entre una conjunción y una disyunción. Proporcione un ejemplo de cada uno (fuera del campo de las matemáticas).

69. ¿Cómo sabe por inspección que el conjunto solución de la desigualdad $x + 3 > x + 2$ es todo el conjunto de los números reales?

70. Encuentre el conjunto solución para cada uno de los siguientes enunciados compuestos, y en cada caso explique su razonamiento.

(a) $x < 3$ y $5 > 2$

(b) $x < 3$ o $5 > 2$

(c) $x < 3$ y $6 < 4$

(d) $x < 3$ o $6 < 4$

2.7 Ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto

En la sección 1.2 se definió el valor absoluto de un número real como

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de cualquier número real también se interpretó como la distancia entre el número y el cero sobre una recta numérica. Por ejemplo, $|6| = 6$ se traduce como 6 unidades entre 6 y 0. Del mismo modo, $|-8| = 8$ se traduce en 8 unidades entre -8 y 0.

La interpretación del valor absoluto como la distancia sobre una recta numérica proporciona un enfoque directo para resolver varias ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto. Primero, considere algunas ecuaciones.

EJEMPLO 1

Resuelva $|x| = 2$

Solución

Piense en términos de distancia entre el número y el cero, y verá que x debe ser 2 o -2. Esto es, la ecuación $|x| = 2$ es equivalente a

$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $|x + 2| = 5$

Solución

El número $x + 2$ debe ser -5 o 5. Por tanto, $|x + 2| = 5$ es equivalente a

$$x + 2 = -5 \quad \text{o} \quad x + 2 = 5$$

Al resolver cada ecuación de la disyunción se produce

$$x + 2 = -5 \quad \text{o} \quad x + 2 = 5$$
$$x = -7 \quad \text{o} \quad x = 3$$

El conjunto solución es $\{-7, 3\}$.

✔ **Comprobación**

$$|x + 2| = 5 \qquad |x + 2| = 5$$
$$|-7 + 2| \stackrel{?}{=} 5 \qquad |3 + 2| \stackrel{?}{=} 5$$
$$|-5| \stackrel{?}{=} 5 \qquad |5| \stackrel{?}{=} 5$$
$$5 = 5 \qquad 5 = 5$$

■

La siguiente propiedad general debe parecer razonable a partir de la interpretación de distancia del valor absoluto.

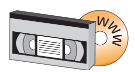
Propiedad 2.1

$|x| = k$ es equivalente a $x = -k$ o $x = k$, donde k es un número positivo.

El ejemplo 3 demuestra el formato para resolver ecuaciones de la forma $|x| = k$.

EJEMPLO 3

Resuelva $|5x + 3| = 7$



Solución

$$|5x + 3| = 7$$
$$5x + 3 = -7 \quad \text{o} \quad 5x + 3 = 7$$
$$5x = -10 \quad \text{o} \quad 5x = 4$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = \frac{4}{5}$$

El conjunto solución es $\left\{-2, \frac{4}{5}\right\}$. ¡Compruebe estas soluciones! ■

La interpretación de distancia para el valor absoluto también proporciona una buena base para resolver algunas desigualdades que implican valor absoluto. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4

Resuelva $|x| < 2$ y grafique el conjunto solución.

Solución

El número x debe ser menor que dos unidades de distancia desde cero. Por tanto, $|x| < 2$ es equivalente a

$$x > -2 \quad \text{y} \quad x < 2$$

El conjunto solución es $(-2, 2)$ y su gráfica se muestra en la figura 2.14.

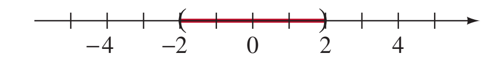


Figura 2.14 ■

EJEMPLO 5

Resuelva $|x+3| < 1$ y grafique las soluciones.

Solución

Mantenga su análisis en términos de distancia sobre una recta numérica. El número $x+3$ debe ser menor que una unidad de distancia desde cero. En consecuencia, $|x+3| < 1$ es equivalente a

$$x+3 > -1 \quad \text{y} \quad x+3 < 1$$

Al resolver esta ecuación se produce

$$x+3 > -1 \quad \text{y} \quad x+3 < 1$$
$$x > -4 \quad \text{y} \quad x < -2$$

El conjunto solución es $(-4, -2)$ y su gráfica se muestra en la figura 2.15.

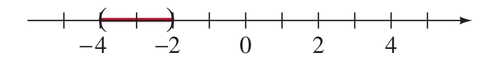


Figura 2.15

Revise nuevamente los ejemplos 4 y 5. La siguiente propiedad general debe parecer razonable.

Propiedad 2.2

$|x| < k$ es equivalente a $x > -k$ y $x < k$, donde k es un número positivo.

Recuerde que una conjunción como $x > -k$ y $x < k$ se puede escribir en la forma compacta $-k < x < k$. La forma compacta proporciona un formato muy conveniente para resolver desigualdades tales como $|3x-1| < 8$ como ilustra el ejemplo 6.

EJEMPLO 6

Resuelva $|3x-1| < 8$ y grafique las soluciones.

Solución

$$|3x-1| < 8$$
$$-8 < 3x-1 < 8$$
$$-7 < 3x < 9 \qquad \text{Sume 1 al lado izquierdo, en medio y al lado derecho.}$$
$$\frac{1}{3}(-7) < \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(9) \qquad \text{Multiplique por } \frac{1}{3}.$$
$$-\frac{7}{3} < x < 3$$

El conjunto solución es $\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$, y su gráfica se muestra en la figura 2.16.

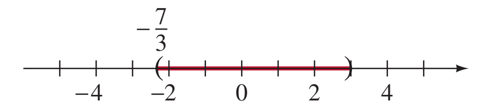


Figura 2.16 ■

La interpretación de distancia también clarifica una propiedad que pertenece a situaciones de *mayor que* de valor absoluto. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7

Resuelva $|x| > 1$ y grafique las soluciones.

Solución

El número x debe estar a más de una unidad de distancia de cero. Por tanto, $|x| > 1$ es equivalente a

$$x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1$$

El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y su gráfica se muestra en la figura 2.17.

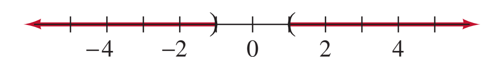


Figura 2.17 ■

EJEMPLO 8

Resuelva $|x - 1| > 3$ y grafique las soluciones.

Solución

El número, $x - 1$, debe estar a más de tres unidades de distancia del cero. Por tanto, $|x - 1| > 3$ es equivalente a

$$x - 1 < -3 \quad \text{o} \quad x - 1 > 3$$

Resolver esta disyunción produce

$$x - 1 < -3 \quad \text{o} \quad x - 1 > 3$$
$$x < -2 \quad \text{o} \quad x > 4$$

El conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$, y su gráfica se muestra en la figura 2.18.

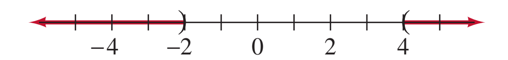


Figura 2.18 ■

Los ejemplos 7 y 8 ilustran la siguiente propiedad general.

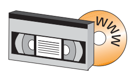
Propiedad 2.3

$|x| > k$ es equivalente a $x < -k$ o $x > k$, donde k es un número positivo.

Por tanto, al resolver desigualdades de la forma $|x| > k$ se puede tomar el formato que se muestra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9

Resuelva $|3x - 1| > 2$ y grafique las soluciones.



Solución

$$|3x - 1| > 2$$

$$3x - 1 < -2 \quad \text{o} \quad 3x - 1 > 2$$

$$3x < -1 \quad \text{o} \quad 3x > 3$$

$$x < -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x > 1$$

El conjunto solución es $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$ y su gráfica se muestra en la figura 2.19.

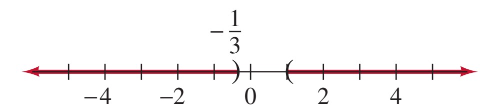


Figura 2.19

Las propiedades 2.1, 2.2 y 2.3 proporcionan la base para resolver varias ecuaciones y desigualdades que involucran valor absoluto. Sin embargo, si en algún momento tiene duda acerca de cuál propiedad aplicar, no olvide la interpretación de distancia. Más aún, note que, en cada una de las propiedades, k es un número positivo. Si k es un número no positivo, puede determinar los conjuntos solución por inspección, como se indica mediante los siguientes ejemplos.

$|x + 3| = 0$ tiene una solución de $x = -3$, porque el número $x + 3$ tiene que ser 0. El conjunto solución de $|x + 3| = 0$ es $\{-3\}$.

$|2x - 5| = -3$ no tiene soluciones, porque el valor absoluto (distancia) no puede ser negativo. El conjunto solución es $\emptyset$, el conjunto vacío.

$|x - 7| < -4$ no tiene soluciones, pues no se puede obtener un valor absoluto menor que −4. El conjunto solución es $\emptyset$.

$|2x - 1| > -1$ se satisface por todos los números reales, porque el valor absoluto de $(2x - 1)$, sin importar cuál número sustituya a x, siempre será mayor que -1. El conjunto solución es el conjunto de todos los números reales, que se puede expresar en notación de intervalos como $(-\infty, \infty)$.

Conjunto de problemas 2.7

Para los problemas 1–14 resuelva cada desigualdad y grafique las soluciones.

1. $|x| < 5$
2. $|x| < 1$
3. $|x| \leq 2$
4. $|x| \leq 4$
5. $|x| > 2$
6. $|x| > 3$
7. $|x - 1| < 2$
8. $|x - 2| < 4$
9. $|x + 2| \leq 4$
10. $|x + 1| \leq 1$
11. $|x + 2| > 1$
12. $|x + 1| > 3$
13. $|x - 3| \geq 2$
14. $|x - 2| \geq 1$

Para los problemas 15–54 resuelva cada ecuación y desigualdad.

15. $|x - 1| = 8$
16. $|x + 2| = 9$
17. $|x - 2| > 6$
18. $|x - 3| > 9$
19. $|x + 3| < 5$
20. $|x + 1| < 8$
21. $|2x - 4| = 6$
22. $|3x - 4| = 14$
23. $|2x - 1| \leq 9$
24. $|3x + 1| \leq 13$
25. $|4x + 2| \geq 12$
26. $|5x - 2| \geq 10$
27. $|3x + 4| = 11$
28. $|5x - 7| = 14$
29. $|4 - 2x| = 6$
30. $|3 - 4x| = 8$
31. $|2 - x| > 4$
32. $|4 - x| > 3$
33. $|1 - 2x| < 2$
34. $|2 - 3x| < 5$
35. $|5x + 9| \leq 16$
36. $|7x - 6| \geq 22$
37. $\left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{2}{3}$
38. $\left|x + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{5}$
39. $|-2x + 7| \leq 13$
40. $|-3x - 4| \leq 15$
41. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| < 2$
42. $\left|\frac{x + 2}{3}\right| < 1$
43. $\left|\frac{2x + 1}{2}\right| > 1$
44. $\left|\frac{3x - 1}{4}\right| > 3$
45. $|2x - 3| + 2 = 5$
46. $|3x - 1| - 1 = 9$
47. $|x + 2| - 6 = -2$
48. $|x - 3| - 4 = -1$
49. $|4x - 3| + 2 = 2$
50. $|5x + 1| + 4 = 4$
51. $|x + 7| - 3 \geq 4$
52. $|x - 2| + 4 \geq 10$
53. $|2x - 1| + 1 \leq 6$
54. $|4x + 3| - 2 \leq 5$

Para los problemas 55–64 resuelva cada ecuación y desigualdad *por inspección*.

55. $|2x + 1| = -4$
56. $|5x - 1| = -2$
57. $|3x - 1| > -2$
58. $|4x + 3| < -4$
59. $|5x - 2| = 0$
60. $|3x - 1| = 0$
61. $|4x - 6| < -1$
62. $|x + 9| > -6$
63. $|x + 4| < 0$
64. $|x + 6| > 0$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

65. Explique cómo resolvería la desigualdad $|2x + 5| > -3$.

66. ¿Por qué 2 es la única solución para $|x - 2| \leq 0$?

67. Explique cómo resolvería la ecuación $|2x - 3| = 0$.

MÁS INVESTIGACIÓN

Considere la ecuación $|x| = |y|$. Esta ecuación será un enunciado verdadero si x es igual a y, o si x es igual al opuesto de y. Use el siguiente formato, $x = y$ o $x = -y$, para resolver las ecuaciones en los problemas 68-73.

Para los problemas 68–73,resuelva cada ecuación.

68. $|3x + 1| = |2x + 3|$

69. $|-2x - 3| = |x + 1|$

70. $|2x - 1| = |x - 3|$

71. $|x - 2| = |x + 6|$

72. $|x + 1| = |x - 4|$

73. $|x + 1| = |x - 1|$

74. Use la definición de valor absoluto para ayudar a probar la propiedad 2.1.

75. Use la definición de valor absoluto para ayudar a probar la propiedad 2.2.

76. Use la definición de valor absoluto para ayudar a probar la propiedad 2.3.

Capítulo 2 Resumen

(2.1) La **resolución de una ecuación algebraica** se refiere al proceso de encontrar el número (o números) que convierten la ecuación algebraica en un enunciado numérico verdadero. A tales números se les llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación que **satisfacen** la ecuación. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. El procedimiento general para resolver una ecuación es continuar sustituyendo la ecuación dada con ecuaciones **equivalentes pero más simples** hasta llegar a una que se pueda resolver por inspección. Dos propiedades de la igualdad juegan un importante papel en el proceso de resolver ecuaciones.

Propiedad aditiva de la igualdad $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$.

Propiedad multiplicativa de la igualdad Para $c \neq 0$, $a = b$ si y sólo si $ac = bc$.

(2.2) Para resolver una ecuación que implique fracciones, primero **limpie la ecuación de todas las fracciones**. Por lo general es más sencillo comenzar por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores en la ecuación (por el mínimo común denominador, MCD).

Tenga en mente las siguientes sugerencias conforme resuelve problemas verbales:

1. Lea cuidadosamente el problema.
2. Bosqueje cualquier figura, diagrama o tabla que pueda serle útil.
3. Elija una variable significativa.
4. Busque una guía.
5. Forme una ecuación o desigualdad.
6. Resuelva la ecuación o desigualdad.
7. Compruebe sus respuestas.

(2.3) Para resolver ecuaciones que contienen decimales, puede limpiar la ecuación de todos los decimales al multiplicar ambos lados por una potencia de 10 adecuada, o bien conservar el problema en forma decimal y realizar los cálculos con decimales.

(2.4) Use ecuaciones para poner reglas en forma simbólica; a estas reglas se les llama **fórmulas**.

Una fórmula como $P = 2l + 2w$ se puede resolver para $l\left(l = \frac{P - 2w}{2}\right)$ o para $w\left(w = \frac{P - 2l}{2}\right)$ al aplicar las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad.

Con frecuencia las fórmulas se usan como **guías** para resolver problemas verbales.

(2.5) La **resolución de una desigualdad algebraica** se refiere al proceso de encontrar los números que convierten a una desigualdad algebraica en un enunciado numérico verdadero. A tales números se les llama **soluciones** y el conjunto de todas las soluciones es el **conjunto solución**.

El procedimiento general para resolver una desigualdad es continuar la sustitución de la desigualdad dada con desigualdades **equivalentes pero más simples**, hasta llegar a una que pueda resolver por inspección. Las siguientes propiedades forman la base para resolver desigualdades algebraicas.

1. $a > b$ si y sólo si $a + c > b + c$. (Propiedad aditiva)
2. **a.** Para $c > 0$, $a > b$ si y sólo si $ac > bc$. (Propiedades multiplicativas)
   b. Para $c < 0$, $a > b$ si y sólo si $ac > bc$.

(2.6) Para resolver enunciados compuestos que impliquen desigualdades, se procede del modo siguiente:

1. Resuelva por separado cada desigualdad en el enunciado compuesto.
2. Si es una **conjunción**, el conjunto solución es la **intersección** de los conjuntos solución de cada desigualdad.
3. Si es una **disyunción**, el conjunto solución es la **unión** de los conjuntos solución de cada desigualdad.

La intersección y la unión de dos conjuntos se definen del modo siguiente.

Intersección $A \cap B = \{x|x \in A \text{ y } x \in B\}$

Unión $A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$

Los siguientes son algunos ejemplos de conjuntos solución que se examinaron en las secciones 2.5 y 2.6 (figura 2.20).

Conjunto solución	Gráfica	Notación de intervalo
$\{x \mid x > 1\}$	–2 0 2	$(1, \infty)$
$\{x \mid x \geq 2\}$	–2 0 2	$[2, \infty)$
$\{x \mid x < 0\}$	–2 0 2	$(-\infty, 0)$
$\{x \mid x \leq -1\}$	–2 0 2	$(-\infty, -1]$
$\{x \mid -2 < x \leq 2\}$	–2 0 2	$(-2, 2]$
$\{x \mid x \leq -1 \text{ o } x > 1\}$	–2 0 2	$(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

Figura 2.20

(2.7) El **valor absoluto** de un número se puede interpretar sobre una recta numérica como la distancia entre dicho número y el cero. Las siguientes propiedades forman la base para resolver ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto.

1. $|x| = k$ es equivalente a $x = -k$ o $x = k$

2. $|x| < k$ es equivalente a $x > -k$ y $x < k$

3. $|x| > k$ es equivalente a $x < -k$ o $x > k$

$\Bigg\}\; k > 0$

Capítulo 2 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1–15 resuelva cada una de las ecuaciones.

1. $5(x - 6) = 3(x + 2)$

2. $2(2x + 1) - (x - 4) = 4(x + 5)$

3. $-(2n - 1) + 3(n + 2) = 7$

4. $2(3n - 4) + 3(2n - 3) = -2(n + 5)$

5. $\dfrac{3t - 2}{4} = \dfrac{2t + 1}{3}$

6. $\dfrac{x + 6}{5} + \dfrac{x - 1}{4} = 2$

7. $1 - \dfrac{2x - 1}{6} = \dfrac{3x}{8}$

8. $\dfrac{2x + 1}{3} + \dfrac{3x - 1}{5} = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{3n - 1}{2} - \dfrac{2n + 3}{7} = 1$

10. $|3x - 1| = 11$

11. $0.06x + 0.08\,(x + 100) = 15$

12. $0.4(t - 6) = 0.3(2t + 5)$

13. $0.1(n + 300) = 0.09n + 32$

14. $0.2(x - 0.5) - 0.3(x + 1) = 0.4$

15. $|2n + 3| = 4$

Para los problemas 16–20 resuelva cada ecuación para x.

16. $ax - b = b + 2$

17. $ax = bx + c$

18. $m(x + a) = p(x + b)$

19. $5x - 7y = 11$

20. $\frac{x - a}{b} = \frac{y + 1}{c}$

Para los problemas 21–24 resuelva cada una de las fórmulas para la variable indicada.

21. $A = \pi r^2 + \pi rs$ para s

22. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para b_2

23. $S_n = \frac{n(a_1 + a_2)}{2}$ para n

24. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ para R

Para los problemas 25–36 resuelva cada una de las desigualdades.

25. $5x - 2 \geq 4x - 7$

26. $3 - 2x < -5$

27. $2(3x - 1) - 3(x - 3) > 0$

28. $3(x + 4) \leq 5(x - 1)$

29. $\frac{5}{6}n - \frac{1}{3}n < \frac{1}{6}$

30. $\frac{n - 4}{5} + \frac{n - 3}{6} > \frac{7}{15}$

31. $s \geq 4.5 + 0.25s$

32. $0.07x + 0.09(500 - x) \geq 43$

33. $|2x - 1| < 11$

34. $|3x + 1| > 10$

35. $-3(2t - 1) - (t + 2) > -6(t - 3)$

36. $\frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{4}(2x + 1) < \frac{5}{6}(x - 2)$

Para los problemas 37–44 grafique las soluciones de cada desigualdad compuesta.

37. $x > -1$ y $x < 1$

38. $x > 2$ o $x \leq -3$

39. $x > 2$ y $x > 3$

40. $x < 2$ o $x > -1$

41. $2x + 1 > 3$ o $2x + 1 < -3$

42. $2 \leq x + 4 \leq 5$

43. $-1 < 4x - 3 \leq 9$

44. $x + 1 > 3$ y $x - 3 < -5$

Resuelva cada uno de los problemas 45-56 al establecer y resolver una ecuación o desigualdad apropiada.

45. El ancho de un rectángulo es 2 metros más que un tercio de la longitud. El perímetro del rectángulo es de 44 metros. Encuentre la longitud y ancho del rectángulo.

46. Un total de $500 se invierten, parte de ellos a 7% de interés y el resto a 8%. Si el interés anual total de ambas inversiones importa $38, ¿cuánto se invirtió a cada tasa?

47. La calificación promedio de Susan para sus primeros tres exámenes de psicología es 84. ¿Cuánto debe obtener en el cuarto examen para que su promedio para los cuatro exámenes sea 85 o mejor?

48. Encuentre tres enteros consecutivos tales que la suma de la mitad del menor y un tercio del mayor sea uno menor que el otro entero.

49. A Pad se le paga tiempo y medio por cada hora que trabaja arriba de 36 horas a la semana. La semana pasada trabajó 42 horas para un total de $472.50. ¿Cuál es su salario por hora normal?

50. Marcela tiene una colección de monedas de 5, 10 y 25 centavos que importan $24.75. El número de monedas de 10 centavos es 10 más que el doble del número de monedas de 5 centavos, y el número de monedas de 25 centavos es 25 más que el número de monedas de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

51. Si el complemento de un ángulo es un décimo el suplemento del ángulo, encuentre la medida del ángulo.

52. Una vendedora tiene algunos suéteres que le cuestan \$38 cada uno. Ella quiere venderlos con una ganancia de 20% sobre su costo. ¿Qué precio debe cobrar por los suéteres?

53. ¿Cuántas pintas de una solución de peróxido de hidrógeno al 1% deben mezclarse con una solución de peróxido de hidrógeno al 4% para obtener 10 pintas de una solución de peróxido de hidrógeno al 2%?

54. Gladys sale de una ciudad y conduce con una rapidez de 40 millas por hora. Dos horas después, Reena sale del mismo lugar y recorre la misma ruta. Ella alcanza a Gladys tras 5 horas y 20 minutos. ¿Cuán rápido viajaba Reena?

55. En $1\frac{1}{4}$ horas más de tiempo, Rita, quien pedalea su bicicleta a 12 millas por hora, recorrió 2 millas más que Sonya, quien avanzaba en su bicicleta a 16 millas por hora. ¿Cuánto recorrió cada una de ellas?

56. ¿Cuántas tazas de jugo de naranja se deben agregar a 50 tazas de ponche, que es jugo de naranja al 10%, para obtener un ponche que sea jugo de naranja al 20%?

Capítulo 2 Examen

Para los problemas 1–10 resuelva cada ecuación.

1. $5x - 2 = 2x - 11$

2. $6(n - 2) - 4(n + 3) = -14$

3. $-3(x + 4) = 3(x - 5)$

4. $3(2x - 1) - 2(x + 5) = -(x - 3)$

5. $\frac{3t - 2}{4} = \frac{5t + 1}{5}$

6. $\frac{5x + 2}{3} - \frac{2x + 4}{6} = -\frac{4}{3}$

7. $|4x - 3| = 9$

8. $\frac{1 - 3x}{4} + \frac{2x + 3}{3} = 1$

9. $2 - \frac{3x - 1}{5} = -4$

10. $0.05x + 0.06(1500 - x) = 83.5$

11. Resuelva $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 2$ para y

12. Resuelva $S = 2\pi r(r + h)$ para h

Para los problemas 13–20 resuelva cada desigualdad y exprese el conjunto solución mediante notación de intervalos.

13. $7x - 4 > 5x - 8$

14. $-3x - 4 \leq x + 12$

15. $2(x - 1) - 3(3x + 1) \geq -6(x - 5)$

16. $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x < 1$

17. $\frac{x - 2}{6} - \frac{x + 3}{9} > -\frac{1}{2}$

18. $0.05x + 0.07(800 - x) \geq 52$

19. $|6x - 4| < 10$

20. $|4x + 5| \geq 6$

Para los problemas 21–25 resuelva cada problema al establecer y resolver una ecuación o desigualdad adecuada.

21. Dela compró un vestido con un descuento de 20% por $57.60. Encuentre el precio original del vestido.

22. La longitud de un rectángulo es 1 centímetro más que tres veces su ancho. Si el perímetro del rectángulo es de 50 centímetros, encuentre la longitud del rectángulo.

23. ¿Cuántas tazas de jugo de uva se deben agregar a 30 tazas de un ponche que es jugo de uva al 8%, para obtener un ponche que sea jugo de uva al 10%?

24. Rex tiene calificaciones de 85, 92, 87, 88 y 91 en los primeros cinco exámenes. ¿Qué calificación debe obtener en el sexto examen para tener un promedio de 90 o mejor para los seis exámenes?

25. Si el complemento de un ángulo es $\frac{2}{11}$ del suplemento del ángulo, encuentre la medida del ángulo.

3

Polinomios

Con la solución de una ecuación cuadrática se determina el ancho de una tira uniforme que se recorta a ambos lados y extremos de una hoja de papel para obtener un área específica para la hoja de papel.

Una tira de ancho uniforme, cortada a ambos lados y extremos de una hoja de papel de 8 por 11 pulgadas debe reducir el tamaño del papel a un área de 40 pulgadas cuadradas. Encuentre el ancho de la tira. Con la ecuación $(11-2x)(8-2x) = 40$, puede determinar que la tira debe tener 1.5 pulgadas de ancho.

El objeto principal de este texto es ayudarle a desarrollar habilidades matemáticas, usar dichas habilidades para resolver ecuaciones y desigualdades, y usar las ecuaciones y desigualdades para resolver problemas verbales. El trabajo en este capítulo se enfocará en una clase de expresiones algebraicas llamadas **polinomios**.

3.1 Polinomios: sumas y diferencias

Recuerde que expresiones algebraicas como $5x$, $-6y^2$, $7xy$, $14a^2b$ y $-17ab^2c^3$ se llaman términos. Un **término** es un producto indicado y puede contener cualquier número de factores. Las variables en un término se llaman **factores literales**, y el factor numérico se llama **coeficiente numérico**. Por tanto, en $7xy$, x y y son factores literales, 7 es el coeficiente numérico y el término está en dos variables (x y y).

Los términos que contienen variables sólo con números enteros positivos como exponentes se llaman **monomios**. Todos los términos mencionados, $5x$, $-6y^2$, $7xy$, $14a^2b$ y $-17ab^2c^3$, son monomios. (Más adelante se trabajará con algunas expresiones algebraicas como $7x^{-1}y^{-1}$ y $6a^{-2}b^{-3}$, que no son monomios.)

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de los factores literales.

$7xy$ es de grado 2.

$14a^2b$ es de grado 3.

$-17ab^2c^3$ es de grado 6.

$5x$ es de grado 1.

$-6y^2$ es de grado 2.

Si el monomio contiene sólo una variable, entonces el exponente de la variable es el grado del monomio. Los últimos dos ejemplos ilustran este punto. Se dice que cualquier término constante distinto de cero es de grado cero.

Un **polinomio** es un monomio o una suma (o diferencia) finita de monomios. Por tanto

$$4x^2, \qquad 3x^2 - 2x - 4, \qquad 7x^4 - 6x^3 + 4x^2 + x - 1,$$

$$3x^2y - 2xy^2, \qquad \frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{3}b^2 \qquad \text{y} \qquad 14$$

son ejemplos de polinomios. Además de llamar **monomio** a un polinomio con un término, los polinomios también se clasifican, cuando tienen dos términos, como **binomios** y cuando tienen tres como **trinomios**.

El **grado de un polinomio** es el grado del término con el grado más alto en el polinomio. Los siguientes ejemplos ilustran algo de esta terminología.

El polinomio $4x^3y^4$ es un monomio con dos variables de grado 7.

El polinomio $4x^2y - 2xy$ es un binomio con dos variables de grado 3.

El polinomio $9x^2 - 7x + 1$ es un trinomio con una variable de grado 2.

Combinación de términos semejantes

Recuerde que los *términos similares*, o *términos semejantes*, son aquellos que tienen los mismos factores literales. En los capítulos anteriores las expresiones algebraicas frecuentemente se simplificaron al combinar términos semejantes, como ilustran los siguientes ejemplos.

$$2x + 3y + 7x + 8y = 2x + 7x + 3y + 8y$$
$$= (2 + 7)x + (3 + 8)y$$
$$= 9x + 11y$$

Los pasos en los recuadros con línea discontinua se realizan mentalmente.

$$4a - 7 - 9a + 10 = 4a + (-7) + (-9a) + 10$$
$$= 4a + (-9a) + (-7) + 10$$
$$= (4 + (-9))a + (-7) + 10$$
$$= -5a + 3$$

Tanto la suma como la resta de polinomios se apoyan básicamente en las mismas ideas. Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva proporcionan la base para reordenar, reagrupar y combinar términos semejantes. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Sume $4x^2 + 5x + 1$ y $7x^2 - 9x + 4$

Solución

Por lo general, para trabajar se usa el formato horizontal. En consecuencia

$$(4x^2 + 5x + 1) + (7x^2 - 9x + 4) = (4x^2 + 7x^2) + (5x - 9x) + (1 + 4)$$
$$= 11x^2 - 4x + 5$$

■

EJEMPLO 2

Sume $5x - 3$, $3x + 2$ y $8x + 6$

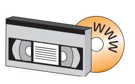
Solución

$$(5x - 3) + (3x + 2) + (8x + 6) = (5x + 3x + 8x) + (-3 + 2 + 6)$$
$$= 16x + 5$$

■

EJEMPLO 3

Encuentre la suma indicada: $(-4x^2y + xy^2) + (7x^2y - 9xy^2) + (5x^2y - 4xy^2)$



Solución

$$(-4x^2y + xy^2) + (7x^2y - 9xy^2) + (5x^2y - 4xy^2)$$
$$= (-4x^2y + 7x^2y + 5x^2y) + (xy^2 - 9xy^2 - 4xy^2)$$
$$= 8x^2y - 12xy^2$$

■

La idea de resta como sumar el opuesto se extiende a los polinomios. Por tanto, la expresión $a - b$ es equivalente a $a + (-b)$. El opuesto de un polinomio se forma al tomar el opuesto de cada término. Por ejemplo, el opuesto de $3x^2 - 7x + 1$ es $-3x^2 + 7x - 1$. Esto se expresa en forma simbólica como

$$-(3x^2 - 7x + 1) = -3x^2 + 7x - 1$$

Ahora considere los siguientes problemas de sustracción.

EJEMPLO 4

Reste $3x^2 + 7x - 1$ de $7x^2 - 2x - 4$

Solución

Use el formato horizontal para obtener

$$\begin{aligned}(7x^2 - 2x - 4) - (3x^2 + 7x - 1) &= (7x^2 - 2x - 4) + (-3x^2 - 7x + 1)\\ &= (7x^2 - 3x^2) + (-2x - 7x) + (-4 + 1)\\ &= 4x^2 - 9x - 3\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5

Reste $-3y^2 + y - 2$ de $4y^2 + 7$

Solución

Puesto que la resta no es una operación conmutativa, asegúrese de realizar la resta en el orden correcto.

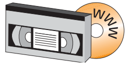
$$\begin{aligned}(4y^2 + 7) - (-3y^2 + y - 2) &= (4y^2 + 7) + (3y^2 - y + 2)\\ &= (4y^2 + 3y^2) + (-y) + (7 + 2)\\ &= 7y^2 - y + 9\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo demuestra el uso del formato vertical para este trabajo.

EJEMPLO 6

Reste $4x^2 - 7xy + 5y^2$ de $3x^2 - 2xy + y^2$



Solución

$$\begin{array}{r}3x^2 - 2xy + y^2\\ \underline{4x^2 - 7xy + 5y^2}\end{array}$$

Note cuál polinomio va abajo y cómo se alinean los términos semejantes.

Ahora puede formar mentalmente el opuesto del polinomio de abajo y sumar.

$$\begin{array}{r}3x^2 - 2xy + y^2\\ \underline{4x^2 - 7xy + 5y^2}\\ -x^2 + 5xy - 4y^2\end{array}$$

El opuesto de $4x^2 - 7xy + 5y^2$ es $-4x^2 + 7xy - 5y^2$.

■

También se puede usar la propiedad distributiva y las propiedades $a = 1(a)$ y $-a = -1(a)$ cuando se sumen y resten polinomios. Los siguientes ejemplos ilustran este enfoque.

EJEMPLO 7

Realice las operaciones indicadas: $(5x - 2) + (2x - 1) - (3x + 4)$

Solución

$$\begin{aligned}(5x - 2) + (2x - 1) - (3x + 4) &= 1(5x - 2) + 1(2x - 1) - 1(3x + 4)\\ &= 1(5x) - 1(2) + 1(2x) - 1(1) - 1(3x) - 1(4)\\ &= 5x - 2 + 2x - 1 - 3x - 4\\ &= 5x + 2x - 3x - 2 - 1 - 4\\ &= 4x - 7\end{aligned}$$

■

Algunos pasos se pueden realizar mentalmente y simplificar el formato, como se muestra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 8

Realice las operaciones indicadas: $(5a^2 - 2b) - (2a^2 + 4) + (-7b - 3)$

Solución

$$\begin{aligned}(5a^2 - 2b) - (2a^2 + 4) + (-7b - 3) &= 5a^2 - 2b - 2a^2 - 4 - 7b - 3\\ &= 3a^2 - 9b - 7\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9

Simplifique $(4t^2 - 7t - 1) - (t^2 + 2t - 6)$

Solución

$$\begin{aligned}(4t^2 - 7t - 1) - (t^2 + 2t - 6) &= 4t^2 - 7t - 1 - t^2 - 2t + 6\\ &= 3t^2 - 9t + 5\end{aligned}$$

■

Recuerde que un polinomio entre paréntesis precedido por un signo negativo se puede escribir sin el paréntesis al sustituir cada término con su opuesto. Por ende, en el ejemplo 9, $-(t^2 + 2t - 6) = -t^2 - 2t + 6$. Finalmente, considere un problema de simplificación que contenga símbolos de agrupamiento dentro de símbolos de agrupamiento.

EJEMPLO 10

Simplifique $7x + [3x - (2x + 7)]$

Solución

$$\begin{aligned}7x + [3x - (2x + 7)] &= 7x + [3x - 2x - 7]\\ &= 7x + [x - 7]\\ &= 7x + x - 7\\ &= 8x - 7\end{aligned}$$

Quite primero los paréntesis más internos.

■

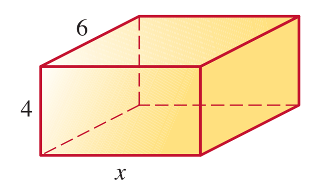
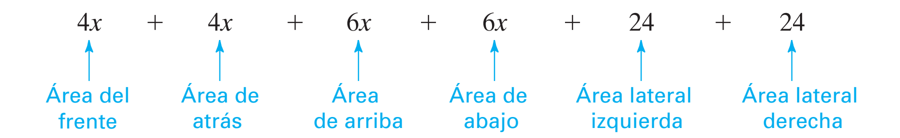


Figura 3.1

En ocasiones se encuentran polinomios en un escenario geométrico. Por ejemplo, puede encontrar un polinomio que represente el área superficial total del sólido rectangular de la figura 3.1 del modo siguiente:



Al simplificar $4x + 4x + 6x + 6x + 24 + 24$ se obtiene el polinomio $20x + 48$, que representa el área superficial total del sólido rectangular. Más aún, al evaluar el polinomio $20x + 48$ para diferentes valores positivos de x, puede determinar el área superficial total de cualquier sólido rectangular para el cual dos dimensiones son 4 y 6. La siguiente tabla contiene algunos sólidos rectangulares específicos.

x	Sólido rectangular de 4 por 6 por x	Área superficial total $(20x + 48)$
2	4 por 6 por 2	$20(2) + 48 = 88$
4	4 por 6 por 4	$20(4) + 48 = 128$
5	4 por 6 por 5	$20(5) + 48 = 148$
7	4 por 6 por 7	$20(7) + 48 = 188$
12	4 por 6 por 12	$20(12) + 48 = 288$

Conjunto de problemas 3.1

Para los problemas 1-10 determine el grado de los polinomios dados.

1. $7xy + 6y$

2. $-5x^2y^2 - 6xy^2 + x$

3. $-x^2y + 2xy^2 - xy$

4. $5x^3y^2 - 6x^3y^3$

5. $5x^2 - 7x - 2$

6. $7x^3 - 2x + 4$

7. $8x^6 + 9$

8. $5y^6 + y^4 - 2y^2 - 8$

9. -12

10. $7x - 2y$

Para los problemas 11-20 sume los polinomios dados.

11. $3x - 7$ y $7x + 4$

12. $9x + 6$ y $5x - 3$

13. $-5t - 4$ y $-6t + 9$

14. $-7t + 14$ y $-3t - 6$

15. $3x^2 - 5x - 1$ y $-4x^2 + 7x - 1$

16. $6x^2 + 8x + 4$ y $-7x^2 - 7x - 10$

17. $12a^2b^2 - 9ab$ y $5a^2b^2 + 4ab$

18. $15a^2b^2 - ab$ y $-20a^2b^2 - 6ab$

19. $2x - 4$, $-7x + 2$ y $-4x + 9$

20. $-x^2 - x - 4$, $2x^2 - 7x + 9$ y $-3x^2 + 6x - 10$

Para los problemas 21-30 reste los polinomios usando el formato horizontal.

21. $5x - 2$ de $3x + 4$

22. $7x + 5$ de $2x - 1$

23. $-4a - 5$ de $6a + 2$

24. $5a + 7$ de $-a - 4$

25. $3x^2 - x + 2$ de $7x^2 + 9x + 8$

26. $5x^2 + 4x - 7$ de $3x^2 + 2x - 9$

27. $2a^2 - 6a - 4$ de $-4a^2 + 6a + 10$

28. $-3a^2 - 6a + 3$ de $3a^2 + 6a - 11$

29. $2x^3 + x^2 - 7x - 2$ de $5x^3 + 2x^2 + 6x - 13$

30. $6x^3 + x^2 + 4$ de $9x^3 - x - 2$

Para los problemas 31-40 reste los polinomios usando el formato vertical.

31. $5x - 2$ de $12x + 6$

32. $3x - 7$ de $2x + 1$

33. $-4x + 7$ de $-7x - 9$

34. $-6x - 2$ de $5x + 6$

35. $2x^2 + x + 6$ de $4x^2 - x - 2$

36. $4x^2 - 3x - 7$ de $-x^2 - 6x + 9$

37. $x^3 + x^2 - x - 1$ de $-2x^3 + 6x^2 - 3x + 8$

38. $2x^3 - x + 6$ de $x^3 + 4x^2 + 1$

39. $-5x^2 + 6x - 12$ de $2x - 1$

40. $2x^2 - 7x - 10$ de $-x^3 - 12$

Para los problemas 41-46 realice las operaciones descritas.

41. Reste $2x^2 - 7x - 1$ de la suma de $x^2 + 9x - 4$ y $-5x^2 - 7x + 10$.

42. Reste $4x^2 + 6x + 9$ de la suma de $-3x^2 - 9x + 6$ y $-2x^2 + 6x - 4$.

43. Reste $-x^2 - 7x - 1$ de la suma de $4x^2 + 3$ y $-7x^2 + 2x$.

44. Reste $-4x^2 + 6x - 3$ de la suma de $-3x + 4$ y $9x^2 - 6$.

45. Reste la suma de $5n^2 - 3n - 2$ y $-7n^2 + n + 2$ de $-12n^2 - n + 9$.

46. Reste la suma de $-6n^2 + 2n - 4$ y $4n^2 - 2n + 4$ de $-n^2 - n + 1$.

Para los problemas 47-56 realice las operaciones indicadas.

47. $(5x + 2) + (7x - 1) + (-4x - 3)$

48. $(-3x + 1) + (6x - 2) + (9x - 4)$

49. $(12x - 9) - (-3x + 4) - (7x + 1)$

50. $(6x + 4) - (4x - 2) - (-x - 1)$

51. $(2x^2 - 7x - 1) + (-4x^2 - x + 6) + (-7x^2 - 4x - 1)$

52. $(5x^2 + x + 4) + (-x^2 + 2x + 4) + (-14x^2 - x + 6)$

53. $(7x^2 - x - 4) - (9x^2 - 10x + 8) + (12x^2 + 4x - 6)$

54. $(-6x^2 + 2x + 5) - (4x^2 + 4x - 1) + (7x^2 + 4)$

55. $(n^2 - 7n - 9) - (-3n + 4) - (2n^2 - 9)$

56. $(6n^2 - 4) - (5n^2 + 9) - (6n + 4)$

Para los problemas 57-70 simplifique al quitar primero los paréntesis interiores y trabaje hacia afuera.

57. $3x - [5x - (x + 6)]$

58. $7x - [2x - (-x - 4)]$

59. $2x^2 - [-3x^2 - (x^2 - 4)]$

60. $4x^2 - [-x^2 - (5x^2 - 6)]$

61. $-2n^2 - [n^2 - (-4n^2 + n + 6)]$

62. $-7n^2 - [3n^2 - (-n^2 - n + 4)]$

63. $[4t^2 - (2t + 1) + 3] - [3t^2 + (2t - 1) - 5]$

64. $-(3n^2 - 2n + 4) - [2n^2 - (n^2 + n + 3)]$

65. $[2n^2 - (2n^2 - n + 5)] + [3n^2 + (n^2 - 2n - 7)]$

66. $3x^2 - [4x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 6)]$

67. $[7xy - (2x - 3xy + y)] - [3x - (x - 10xy - y)]$

68. $[9xy - (4x + xy - y)] - [4y - (2x - xy + 6y)]$

69. $[4x^3 - (2x^2 - x - 1)] - [5x^3 - (x^2 + 2x - 1)]$

70. $[x^3 - (x^2 - x + 1)] - [-x^3 + (7x^2 - x + 10)]$

71. Encuentre un polinomio que represente el perímetro de cada una de las siguientes figuras (figuras 3.2, 3.3 y 3.4).

(a)

3x − 2
Rectángulo
x + 4

Figura 3.2

(b)

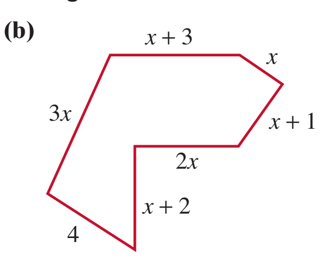


Figura 3.3

(c)

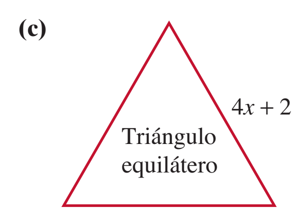


Figura 3.4

72. Encuentre un polinomio que represente el área superficial total del sólido rectangular en la figura 3.5.

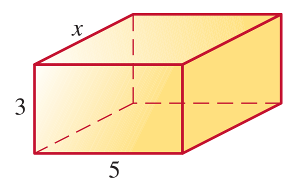


Figura 3.5

Ahora use dicho polinomio para determinar el área superficial total de cada uno de los siguientes sólidos rectangulares.

(a) 3 por 5 por 4 **(b)** 3 por 5 por 7

(c) 3 por 5 por 11 **(d)** 3 por 5 por 13

73. Encuentre un polinomio que represente el área superficial total del cilindro circular derecho en la figura 3.6. Ahora use dicho polinomio para determinar el área superficial total de cada uno de los siguientes cilindros circulares rectos que tengan una base con radio de 4. Use 3.14 para π y exprese las respuestas al décimo más cercano.

(a) $h = 5$ **(b)** $h = 7$

(c) $h = 14$ **(d)** $h = 18$

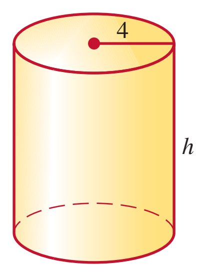


Figura 3.6

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

74. Explique cómo restar el polinomio $-3x^2 + 2x - 4$ de $4x^2 + 6$.

75. ¿La suma de dos binomios siempre es otro binomio? Defienda su respuesta.

76. Explique cómo simplificar la expresión $7x - [3x - (2x - 4) + 2] - x$.

3.2 Productos y cocientes de monomios

Suponga que quiere encontrar el producto de dos monomios tales como $3x^2y$ y $4x^3y^2$. Para proceder, use las propiedades de los números reales y tenga en mente que los exponentes indican multiplicación repetida.

$$\begin{aligned}(3x^2y)(4x^3y^2) &= (3 \cdot x \cdot x \cdot y)(4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y)\\ &= 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y\\ &= 12x^5y^3\end{aligned}$$

Puede usar tal enfoque para encontrar el producto de cualesquiera dos monomios. Sin embargo, existen algunas propiedades básicas de los exponentes que hacen al proceso de multiplicar monomios una tarea mucho más sencilla. Considere cada

una de estas propiedades e ilustre su uso cuando multiplique monomios. Los siguientes ejemplos demuestran la primera propiedad.

$$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$$
$$a^4 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a \cdot a)(a \cdot a) = a^6$$
$$b^3 \cdot b^4 = (b \cdot b \cdot b)(b \cdot b \cdot b \cdot b) = b^7$$

En general,

$$b^n \cdot b^m = \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots b)}_{n \text{ factores de } b}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots b)}_{m \text{ factores de } b}$$
$$= \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots b}_{(n+m) \text{ factores de } b}$$
$$= b^{n+m}$$

La primera propiedad se puede enunciar del modo siguiente:

Propiedad 3.1

Si b es cualquier número real, y n y m son enteros positivos, entonces

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

La propiedad 3.1 dice que para encontrar el producto de dos potencias enteras positivas de la misma base se suman los exponentes y esta suma se usa como el exponente de la base común.

$$x^7 \cdot x^8 = x^{7+8} = x^{15} \qquad y^6 \cdot y^4 = y^{6+4} = y^{10}$$
$$2^3 \cdot 2^8 = 2^{3+8} = 2^{11} \qquad (-3)^4 \cdot (-3)^5 = (-3)^{4+5} = (-3)^9$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5+7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la propiedad 3.1, junto con las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, para formar la base para multiplicar monomios. Los pasos encerrados en los recuadros con línea discontinua se podrían realizar mentalmente.

EJEMPLO 1

$$(3x^2y)(4x^3y^2) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y \cdot y^2$$
$$= 12x^{2+3}y^{1+2}$$
$$= 12x^5y^3$$

■

EJEMPLO 2

$$(-5a^3b^4)(7a^2b^5) = -5 \cdot 7 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b^5$$
$$= -35a^{3+2}b^{4+5}$$
$$= -35a^5b^9$$
■

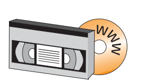
EJEMPLO 3

$$\left(\frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^5y^6\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x^5 \cdot y \cdot y^6$$
$$= \frac{3}{8}x^{1+5}y^{1+6}$$
$$= \frac{3}{8}x^6y^7$$
■

EJEMPLO 4

$$(-ab^2)(-5a^2b) = (-1)(-5)(a)(a^2)(b^2)(b)$$
$$= 5a^{1+2}b^{2+1}$$
$$= 5a^3b^3$$
■

EJEMPLO 5



$$(2x^2y^2)(3x^2y)(4y^3) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y \cdot y^3$$
$$= 24x^{2+2}y^{2+1+3}$$
$$= 24x^4y^6$$
■

Los siguientes ejemplos demuestran otra propiedad útil de los exponentes.

$$(x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^{2+2+2} = x^6$$
$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$$
$$(b^4)^3 = b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 = b^{4+4+4} = b^{12}$$

En general,

$$(b^n)^m = \underbrace{b^n \cdot b^n \cdot b^n \cdot \ldots b^n}_{m \text{ factores de } b^n}$$
$$= b^{\overbrace{n+n+n+\cdots+n}^{\text{sume } m \text{ de estos}}}$$
$$= b^{mn}$$

Esta propiedad se puede enunciar del modo siguiente:

Propiedad 3.2

Si b es cualquier número real, y m y n son enteros positivos, entonces

$$(b^n)^m = b^{mn}$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo se usa la propiedad 3.2 para encontrar "la potencia de una potencia".

$$(x^4)^5 = x^{5(4)} = x^{20} \qquad (y^6)^3 = y^{3(6)} = y^{18}$$

$$(2^3)^7 = 2^{7(3)} = 2^{21}$$

Una tercera propiedad de los exponentes pertenece a elevar un monomio a una potencia. Considere los siguientes ejemplos, que se utilizan para introducir la propiedad.

$$(3x)^2 = (3x)(3x) = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 3^2 \cdot x^2$$

$$(4y^2)^3 = (4y^2)(4y^2)(4y^2) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot y^2 = (4)^3(y^2)^3$$

$$(-2a^3b^4)^2 = (-2a^3b^4)(-2a^3b^4) = (-2)(-2)(a^3)(a^3)(b^4)(b^4)$$

$$= (-2)^2(a^3)^2(b^4)^2$$

En general,

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab) \cdot \ldots (ab)}_{n \text{ factores de } ab}$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a)}_{n \text{ factores de } a}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots b)}_{n \text{ factores de } b}$$

$$= a^n b^n$$

La propiedad 3.3 formalmente se puede enunciar del modo siguiente:

Propiedad 3.3

Si a y b son números reales y n es un entero positivo, entonces

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Las propiedades 3.3 y 3.2 forman la base para elevar un monomio a una potencia, como en los siguientes ejemplos.

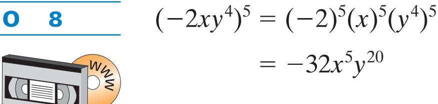
EJEMPLO 6

$$(x^2y^3)^4 = (x^2)^4(y^3)^4 \quad \text{Use } (ab)^n = a^nb^n.$$
$$= x^8y^{12} \quad \text{Use } (b^n)^m = b^{mn}.$$

EJEMPLO 7

$$(3a^5)^3 = (3)^3(a^5)^3$$
$$= 27a^{15}$$

EJEMPLO 8



$$(-2xy^4)^5 = (-2)^5(x)^5(y^4)^5$$
$$= -32x^5y^{20}$$

División de monomios

Para desarrollar un proceso efectivo para dividir entre un monomio, es necesaria todavía otra propiedad de los exponentes. Esta propiedad es una consecuencia directa de la definición de un exponente. Estudie los siguientes ejemplos.

$$\frac{x^4}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x \qquad \frac{x^3}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = 1$$

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^3 \qquad \frac{y^5}{y^5} = \frac{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = 1$$

$$\frac{y^8}{y^4} = \frac{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = y^4$$

La propiedad general se puede enunciar del modo siguiente:

Propiedad 3.4

Si b es cualquier número real distinto de cero, y m y n son enteros positivos, entonces

1. $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, cuando $n > m$

2. $\dfrac{b^n}{b^m} = 1$, cuando $n = m$

Aplicar la propiedad 3.4 a los ejemplos previos produce

$$\frac{x^4}{x^3} = x^{4-3} = x^1 = x \qquad \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3 \qquad \frac{y^5}{y^5} = 1$$

$$\frac{y^8}{y^4} = y^{8-4} = y^4$$

(En un capítulo posterior se estudiará la situación cuando $n < m$.)

La propiedad 3.4, junto con el conocimiento de la división de enteros, proporciona la base para dividir monomios. Los siguientes ejemplos demuestran el proceso.

$$\frac{24x^5}{3x^2} = 8x^{5-2} = 8x^3 \qquad \frac{-36a^{13}}{-12a^5} = 3a^{13-5} = 3a^8$$

$$\frac{-56x^9}{7x^4} = -8x^{9-4} = -8x^5 \qquad \frac{72b^5}{8b^5} = 9 \quad \left(\frac{b^5}{b^5} = 1\right)$$

$$\frac{48y^7}{-12y} = -4y^{7-1} = -4y^6 \qquad \frac{12x^4y^7}{2x^2y^4} = 6x^{4-2}y^{7-4} = 6x^2y^3$$

Conjunto de problemas 3.2

Para los problemas 1-36 encuentre cada producto.

1. $(4x^3)(9x)$

2. $(6x^3)(7x^2)$

3. $(-2x^2)(6x^3)$

4. $(2xy)(-4x^2y)$

5. $(-a^2b)(-4ab^3)$

6. $(-8a^2b^2)(-3ab^3)$

7. $(x^2yz^2)(-3xyz^4)$

8. $(-2xy^2z^2)(-x^2y^3z)$

9. $(5xy)(-6y^3)$

10. $(-7xy)(4x^4)$

11. $(3a^2b)(9a^2b^4)$

12. $(-8a^2b^2)(-12ab^5)$

13. $(m^2n)(-mn^2)$

14. $(-x^3y^2)(xy^3)$

15. $\left(\frac{2}{5}xy^2\right)\left(\frac{3}{4}x^2y^4\right)$

16. $\left(\frac{1}{2}x^2y^6\right)\left(\frac{2}{3}xy\right)$

17. $\left(-\frac{3}{4}ab\right)\left(\frac{1}{5}a^2b^3\right)$

18. $\left(-\frac{2}{7}a^2\right)\left(\frac{3}{5}ab^3\right)$

19. $\left(-\frac{1}{2}xy\right)\left(\frac{1}{3}x^2y^3\right)$

20. $\left(\frac{3}{4}x^4y^5\right)(-x^2y)$

21. $(3x)(-2x^2)(-5x^3)$

22. $(-2x)(-6x^3)(x^2)$

23. $(-6x^2)(3x^3)(x^4)$

24. $(-7x^2)(3x)(4x^3)$

25. $(x^2y)(-3xy^2)(x^3y^3)$

26. $(xy^2)(-5xy)(x^2y^4)$

27. $(-3y^2)(-2y^2)(-4y^5)$

28. $(-y^3)(-6y)(-8y^4)$

29. $(4ab)(-2a^2b)(7a)$

30. $(3b)(-2ab^2)(7a)$

31. $(-ab)(-3ab)(-6ab)$

32. $(-3a^2b)(-ab^2)(-7a)$

33. $\left(\frac{2}{3}xy\right)(-3x^2y)(5x^4y^5)$

34. $\left(\frac{3}{4}x\right)(-4x^2y^2)(9y^3)$

35. $(12y)(-5x)\left(-\frac{5}{6}x^4y\right)$

36. $(-12x)(3y)\left(-\frac{3}{4}xy^6\right)$

Para los problemas 37-58 eleve cada monomio a la potencia indicada.

37. $(3xy^2)^3$

38. $(4x^2y^3)^3$

39. $(-2x^2y)^5$

40. $(-3xy^4)^3$

41. $(-x^4y^5)^4$

42. $(-x^5y^2)^4$

43. $(ab^2c^3)^6$

44. $(a^2b^3c^5)^5$

45. $(2a^2b^3)^6$

46. $(2a^3b^2)^6$

47. $(9xy^4)^2$

48. $(8x^2y^5)^2$

49. $(-3ab^3)^4$

50. $(-2a^2b^4)^4$

51. $-(2ab)^4$

52. $-(3ab)^4$

53. $-(xy^2z^3)^6$

54. $-(xy^2z^3)^8$

55. $(-5a^2b^2c)^3$

56. $(-4abc^4)^3$

57. $(-xy^4z^2)^7$

58. $(-x^2y^4z^5)^5$

Para los problemas 59-74 encuentre cada cociente.

59. $\frac{9x^4y^5}{3xy^2}$

60. $\frac{12x^2y^7}{6x^2y^3}$

61. $\frac{25x^5y^6}{-5x^2y^4}$

62. $\frac{56x^6y^4}{-7x^2y^3}$

63. $\dfrac{-54ab^2c^3}{-6abc}$

64. $\dfrac{-48a^3bc^5}{-6a^2c^4}$

65. $\dfrac{-18x^2y^2z^6}{xyz^2}$

66. $\dfrac{-32x^4y^5z^8}{x^2yz^3}$

67. $\dfrac{a^3b^4c^7}{-abc^5}$

68. $\dfrac{-a^4b^5c}{a^2b^4c}$

69. $\dfrac{-72x^2y^4}{-8x^2y^4}$

70. $\dfrac{-96x^4y^5}{12x^4y^4}$

71. $\dfrac{14ab^3}{-14ab}$

72. $\dfrac{-12abc^2}{12bc}$

73. $\dfrac{-36x^3y^5}{2y^5}$

74. $\dfrac{-48xyz^2}{2xz}$

Para los problemas 75-90 encuentre cada producto. Suponga que las variables en los exponentes representan enteros positivos. Por ejemplo,

$$(x^{2n})(x^{3n}) = x^{2n+3n} = x^{5n}$$

75. $(2x^n)(3x^{2n})$

76. $(3x^{2n})(x^{3n-1})$

77. $(a^{2n-1})(a^{3n+4})$

78. $(a^{5n-1})(a^{5n+1})$

79. $(x^{3n-2})(x^{n+2})$

80. $(x^{n-1})(x^{4n+3})$

81. $(a^{5n-2})(a^3)$

82. $(x^{3n-4})(x^4)$

83. $(2x^n)(-5x^n)$

84. $(4x^{2n-1})(-3x^{n+1})$

85. $(-3a^2)(-4a^{n+2})$

86. $(-5x^{n-1})(-6x^{2n+4})$

87. $(x^n)(2x^{2n})(3x^2)$

88. $(2x^n)(3x^{3n-1})(-4x^{2n+5})$

89. $(3x^{n-1})(x^{n+1})(4x^{2-n})$

90. $(-5x^{n+2})(x^{n-2})(4x^{3-2n})$

91. Encuentre un polinomio que represente el área superficial total del sólido rectangular en la figura 3.7. Encuentre también un polinomio que represente el volumen.

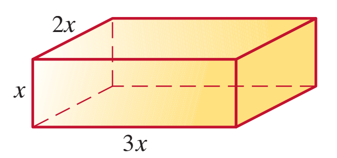


Figura 3.7

92. Encuentre un polinomio que represente el área superficial total del sólido rectangular en la figura 3.8. También encuentre un polinomio que represente el volumen.

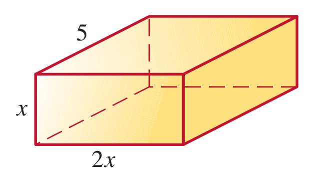


Figura 3.8

93. Encuentre un polinomio que represente el área de la región sombreada en la figura 3.9. La longitud de un radio del círculo más grande es r unidades, y la longitud de un radio del círculo más pequeño es 6 unidades.

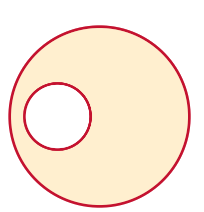


Figura 3.9

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

94. ¿Cómo convencería a alguien de que $x^6 \div x^2$ es x^4 y no x^3?

95. Su amiga simplifica $2^3 \cdot 2^2$ del modo siguiente:

$2^3 \cdot 2^2 = 4^{3+2} = 4^5 = 1024$

¿Qué hizo de manera incorrecta y cómo la ayudaría?

3.3 Multiplicación de polinomios

La propiedad distributiva por lo general se enuncia como $a(b + c) = ab + ac$; sin embargo, se le puede extender del modo siguiente:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

$$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae \qquad \text{etcétera.}$$

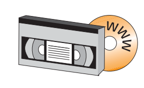
Se aplican las propiedades conmutativa y asociativa, las propiedades de los exponentes y la propiedad distributiva en conjunto para encontrar el producto de un monomio y un polinomio. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} 3x^2(2x^2 + 5x + 3) &= 3x^2(2x^2) + 3x^2(5x) + 3x^2(3) \\ &= 6x^4 + 15x^3 + 9x^2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2



$$\begin{aligned} -2xy(3x^3 - 4x^2y - 5xy^2 + y^3) &= -2xy(3x^3) - (-2xy)(4x^2y) \\ &\quad -(-2xy)(5xy^2) + (-2xy)(y^3) \\ &= -6x^4y + 8x^3y^2 + 10x^2y^3 - 2xy^4 \end{aligned}$$

■

Ahora considere el producto de dos polinomios, de los cuales ninguno es un monomio. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3

$$\begin{aligned} (x + 2)(y + 5) &= x(y + 5) + 2(y + 5) \\ &= x(y) + x(5) + 2(y) + 2(5) \\ &= xy + 5x + 2y + 10 \end{aligned}$$

■

Advierta que cada término del primer polinomio se multiplica por cada término del segundo polinomio.

EJEMPLO 4

$$\begin{aligned} (x - 3)(y + z + 3) &= x(y + z + 3) - 3(y + z + 3) \\ &= xy + xz + 3x - 3y - 3z - 9 \end{aligned}$$

■

Multiplicar polinomios con frecuencia produce términos similares que se pueden combinar para simplificar el polinomio resultante.

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} (x + 5)(x + 7) &= x(x + 7) + 5(x + 7) \\ &= x^2 + 7x + 5x + 35 \\ &= x^2 + 12x + 35 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

$$(x-2)(x^2-3x+4) = x(x^2-3x+4) - 2(x^2-3x+4)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4x - 2x^2 + 6x - 8$$
$$= x^3 - 5x^2 + 10x - 8$$

En el ejemplo 6 se afirma que

$$(x-2)(x^2-3x+4) = x^3 - 5x^2 + 10x - 8$$

para todo número real. Además, repasando nuestro trabajo, ¿cómo se verifica tal afirmación? Es obvio que no es posible intentar todos los números reales, pero intentar al menos un número proporciona una comprobación parcial. Intente el número 4.

$$(x-2)(x^2-3x+4) = (4-2)(4^2-3(4)+4)$$
$$= 2(16-12+4)$$
$$= 2(8)$$
$$= 16$$
$$x^3 - 5x^2 + 10x - 8 = 4^3 - 5(4)^2 + 10(4) - 8$$
$$= 64 - 80 + 40 - 8$$
$$= 16$$

EJEMPLO 7

$$(3x-2y)(x^2+xy-y^2) = 3x(x^2+xy-y^2) - 2y(x^2+xy-y^2)$$
$$= 3x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2y^3$$
$$= 3x^3 + x^2y - 5xy^2 + 2y^3$$

Es útil poder encontrar el producto de dos binomios sin mostrar todos los pasos intermedios. Esto es bastante fácil de hacer con el *patrón abreviado de tres pasos*, que se demuestra en las figuras 3.10 y 3.11 de los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8

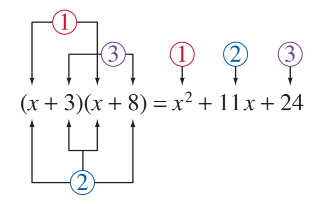


Figura 3.10

Paso ①. Multiplique $x \cdot x$.

Paso ②. Multiplique $3 \cdot x$ y $8 \cdot x$ y combine.

Paso ③. Multiplique $3 \cdot 8$.

EJEMPLO 9

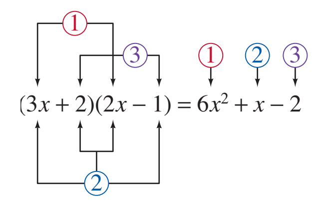


Figura 3.11

Ahora vea si puede usar el patrón para encontrar los siguientes productos.

$(x + 2)(x + 6) = ?$

$(x - 3)(x + 5) = ?$

$(2x + 5)(3x + 7) = ?$

$(3x - 1)(4x - 3) = ?$

Sus respuestas deben ser $x^2 + 8x + 12$, $x^2 + 2x - 15$, $6x^2 + 29x + 35$ y $12x^2 - 13x + 3$. Tenga en mente que este patrón abreviado sólo se aplica para encontrar el producto de dos binomios.

Es posible usar exponentes para indicar multiplicación repetida de polinomios. Por ejemplo, $(x + 3)^2$ significa $(x + 3)\,(x + 3)$ y $(x + 4)^3$ significa $(x + 4)$ $(x + 4) \cdot (x + 4)$. Para elevar al cuadrado un binomio, simplemente escríbalo como el producto de dos binomios iguales y aplique el patrón abreviado. Por tanto,

$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$

$(x - 6)^2 = (x - 6)(x - 6) = x^2 - 12x + 36$ y

$(3x - 4)^2 = (3x - 4)(3x - 4) = 9x^2 - 24x + 16$

Cuando eleve binomios al cuadrado, tenga cuidado de no olvidar el término intermedio. Es decir, $(x + 3)^2 \neq x^2 + 3^2$, en lugar de $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Cuando se multiplican binomios hay algunos patrones especiales que debe reconocer. Puede usar estos patrones para encontrar productos, y más adelante se usarán algunos de ellos cuando se factoricen polinomios.

PATRÓN

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$

Cuadrado del primer término del binomio + Doble producto de los dos términos del binomio + Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(5a + 7b)^2 = 25a^2 + 70ab + 49b^2$

PATRÓN

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Cuadrado del primer término del binomio − Doble producto de los dos términos del binomio + Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$$(x-8)^2 = x^2 - 16x + 64$$
$$(3x-4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$
$$(4a-9b)^2 = 16a^2 - 72ab + 81b^2$$

■

PATRÓN

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado del primer término del binomio − Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$$(x+7)(x-7) = x^2 - 49$$
$$(2x+y)(2x-y) = 4x^2 - y^2$$
$$(3a-2b)(3a+2b) = 9a^2 - 4b^2$$

■

Ahora suponga que se quiere elevar al cubo un binomio. Un abordaje es el siguiente:

$$\begin{aligned}(x+4)^3 &= (x+4)(x+4)(x+4)\\ &= (x+4)(x^2+8x+16)\\ &= x(x^2+8x+16) + 4(x^2+8x+16)\\ &= x^3 + 8x^2 + 16x + 4x^2 + 32x + 64\\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$

Otro abordaje es elevar al cubo un binomio general y luego usar el patrón resultante.

PATRÓN

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Use el patrón $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ para elevar al cubo el binomio $x + 4$.

$$(x + 4)^3 = x^3 + 3x^2(4) + 3x(4)^2 + 4^3$$
$$= x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$ ■

Puesto que $a - b = a + (-b)$ se puede desarrollar fácilmente un patrón para elevar al cubo $a - b$.

PATRÓN

$$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3$$
$$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ahora use el patrón $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ para elevar al cubo el binomio $3x - 2y$.

$$(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3$$
$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$ ■

Finalmente, es necesario tener en cuenta que si los patrones se olvidan o no se aplican, entonces se pueden invertir para aplicar la propiedad distributiva.

$$(2x - 1)(x^2 - 4x + 6) = 2x(x^2 - 4x + 6) - 1(x^2 - 4x + 6)$$
$$= 2x^3 - 8x^2 + 12x - x^2 + 4x - 6$$
$$= 2x^3 - 9x^2 + 16x - 6$$

De regreso a la conexión geométrica

Como era de esperar, existen interpretaciones geométricas para muchos de los conceptos algebraicos que se presentan en esta sección. En el siguiente conjunto de problemas se le dará la oportunidad de realizar algunas conexiones entre álgebra y geometría. Esta sección concluye con un problema que permite usar algo de álgebra y geometría.

EJEMPLO 10

Una pieza rectangular de estaño tiene 16 pulgadas de largo y 12 pulgadas de ancho, como se muestra en la figura 3.12. De cada esquina se corta un trozo cuadrado de x pulgadas. Luego las aletas se doblan para formar una caja abierta. Encuentre polinomios que representen el volumen y el área superficial exterior de la caja.

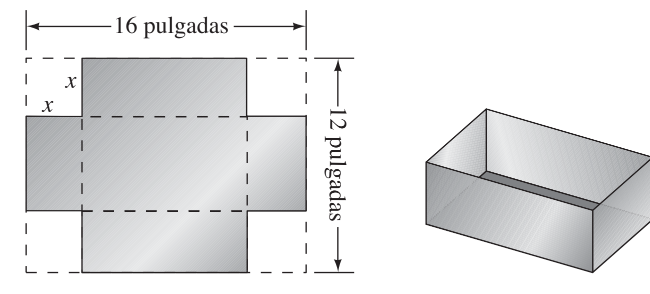
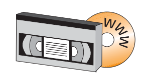


Figura 3.12



Solución

La longitud de la caja será $16 - 2x$, el ancho $12 - 2x$ y la altura x. Con la fórmula de volumen, $V = lwh$, el polinomio $(16 - 2x)(12 - 2x)(x)$, que se simplifica a $4x^3 - 56x^2 + 192x$, representa el volumen.

El área superficial exterior de la caja es el área de la pieza original de estaño menos las cuatro esquinas que se cortaron. Por tanto, el polinomio $16(12) - 4x^2$, o $192 - 4x^2$, representa el área superficial exterior de la caja. ■

Observaciones: Recuerde que en la sección 3.1 se encontró el área superficial total de un sólido rectangular al sumar las áreas de los lados y las partes superior e inferior. Use este enfoque en la caja abierta del ejemplo 10 para comprobar la respuesta de $192 - 4x^2$. Tenga en mente que la caja no tiene parte superior.

Conjunto de problemas 3.3

Para los problemas 1-74 encuentre cada producto indicado. Recuerde la simplificación para multiplicar binomios y los otros patrones especiales que se estudiaron en esta sección.

1. $2xy(5xy^2 + 3x^2y^3)$

2. $3x^2y(6y^2 - 5x^2y^4)$

3. $-3a^2b(4ab^2 - 5a^3)$

4. $-7ab^2(2b^3 - 3a^2)$

5. $8a^3b^4(3ab - 2ab^2 + 4a^2b^2)$

6. $9a^3b(2a - 3b + 7ab)$

7. $-x^2y(6xy^2 + 3x^2y^3 - x^3y)$

8. $-ab^2(5a + 3b - 6a^2b^3)$

9. $(a + 2b)(x + y)$

10. $(t - s)(x + y)$

11. $(a - 3b)(c + 4d)$

12. $(a - 4b)(c - d)$

13. $(x + 6)(x + 10)$

14. $(x + 2)(x + 10)$

15. $(y - 5)(y + 11)$

16. $(y - 3)(y + 9)$

17. $(n + 2)(n - 7)$

18. $(n + 3)(n - 12)$

19. $(x + 6)(x - 6)$

20. $(t + 8)(t - 8)$

21. $(x - 6)^2$

22. $(x - 2)^2$

23. $(x - 6)(x - 8)$

24. $(x - 3)(x - 13)$

25. $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

26. $(x - 1)(x + 4)(x - 6)$

27. $(x - 3)(x + 3)(x - 1)$

28. $(x - 5)(x + 5)(x - 8)$

29. $(t + 9)^2$

30. $(t + 13)^2$

31. $(y - 7)^2$

32. $(y - 4)^2$

33. $(4x + 5)(x + 7)$

34. $(6x + 5)(x + 3)$

35. $(3y - 1)(3y + 1)$

36. $(5y - 2)(5y + 2)$

37. $(7x - 2)(2x + 1)$

38. $(6x - 1)(3x + 2)$

39. $(1 + t)(5 - 2t)$

40. $(3 - t)(2 + 4t)$

41. $(3t + 7)^2$

42. $(4t + 6)^2$

43. $(2 - 5x)(2 + 5x)$

44. $(6 - 3x)(6 + 3x)$

45. $(7x - 4)^2$

46. $(5x - 7)^2$

47. $(6x + 7)(3x - 10)$

48. $(4x - 7)(7x + 4)$

49. $(2x - 5y)(x + 3y)$

50. $(x - 4y)(3x + 7y)$

51. $(5x - 2a)(5x + 2a)$

52. $(9x - 2y)(9x + 2y)$

53. $(t + 3)(t^2 - 3t - 5)$

54. $(t - 2)(t^2 + 7t + 2)$

55. $(x - 4)(x^2 + 5x - 4)$

56. $(x + 6)(2x^2 - x - 7)$

57. $(2x - 3)(x^2 + 6x + 10)$

58. $(3x + 4)(2x^2 - 2x - 6)$

59. $(4x - 1)(3x^2 - x + 6)$

60. $(5x - 2)(6x^2 + 2x - 1)$

61. $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 3x + 4)$

62. $(x^2 - x + 6)(x^2 - 5x - 8)$

63. $(2x^2 + 3x - 4)(x^2 - 2x - 1)$

64. $(3x^2 - 2x + 1)(2x^2 + x - 2)$

65. $(x + 2)^3$

66. $(x + 1)^3$

67. $(x - 4)^3$

68. $(x - 5)^3$

69. $(2x + 3)^3$

70. $(3x + 1)^3$

71. $(4x - 1)^3$

72. $(3x - 2)^3$

73. $(5x + 2)^3$

74. $(4x - 5)^3$

Para los problemas 75-84 encuentre los productos indicados. Suponga que todas las variables que aparecen como exponentes representan enteros positivos.

75. $(x^n - 4)(x^n + 4)$

76. $(x^{3a} - 1)(x^{3a} + 1)$

77. $(x^a + 6)(x^a - 2)$

78. $(x^a + 4)(x^a - 9)$

79. $(2x^n + 5)(3x^n - 7)$

80. $(3x^n + 5)(4x^n - 9)$

81. $(x^{2a} - 7)(x^{2a} - 3)$

82. $(x^{2a} + 6)(x^{2a} - 4)$

83. $(2x^n + 5)^2$

84. $(3x^n - 7)^2$

85. Explique cómo se puede usar la figura 3.13 para demostrar geométricamente que $(x + 2)(x + 6) = x^2 + 8x + 12$.

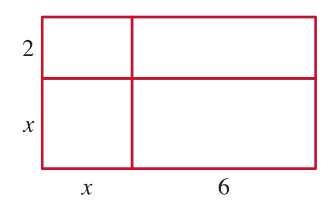


Figura 3.13

86. Encuentre un polinomio que represente la suma de las áreas de los dos rectángulos que se muestran en la figura 3.14.

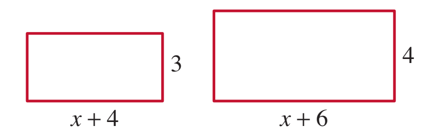


Figura 3.14

87. Encuentre un polinomio que represente el área de la región sombreada en la figura 3.15.

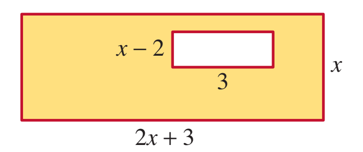


Figura 3.15

88. Explique cómo se puede usar la figura 3.16 para demostrar geométricamente que $(x + 7)(x - 3) = x^2 + 4x - 21$.

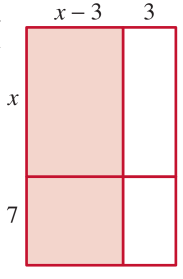


Figura 3.16

89. Una pieza cuadrada de cartulina tiene 16 pulgadas por lado. De cada esquina se corta una pieza cuadrada de x pulgadas. Luego las aletas se doblan para formar una caja abierta. Encuentre polinomios que representen el volumen y el área superficial exterior de la caja.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

90. ¿Cómo simplificaría $(2^3 + 2^2)^2$? Explique su razonamiento.

91. Describa el proceso de multiplicar dos polinomios.

92. Determine el número de términos en el producto de $(x + y)$ y $(a + b + c + d)$, sin realizar la multiplicación. Explique cómo llegó a su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

93. Se usaron los siguientes dos patrones de multiplicación:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Al multiplicar se pueden extender estos patrones del modo siguiente:

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^4 + b^5$

Sobre la base de estos resultados, vea si puede determinar un patrón que le permita completar cada uno de los siguientes sin usar el largo proceso de multiplicación.

(a) $(a + b)^6$ **(b)** $(a + b)^7$

(c) $(a + b)^8$ **(d)** $(a + b)^9$

94. Encuentre cada uno de los siguientes productos indicados. Estos patrones se usarán de nuevo en la sección 3.5.

(a) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ **(b)** $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

(c) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ **(d)** $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

(e) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

(f) $(3x + 5)(9x^2 - 15x + 25)$

95. Algunos de los patrones producto se pueden usar para realizar cálculos aritméticos mentales. Por ejemplo, use el patrón $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para calcular mentalmente 31^2. Su proceso de pensamiento sería "$31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 2(30)(1) + 1^2 = 961$". Calcule mentalmente cada uno de los siguientes números y luego compruebe sus respuestas.

(a) 21^2 **(b)** 41^2 **(c)** 71^2

(d) 32^2 **(e)** 52^2 **(f)** 82^2

96. Use el patrón $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ para calcular mentalmente cada uno de los siguientes números y luego compruebe sus respuestas.

(a) 19^2 **(b)** 29^2 **(c)** 49^2

(d) 79^2 **(e)** 38^2 **(f)** 58^2

97. Todo número entero positivo con un dígito en unidades de 5 se puede representar mediante la expresión $10x + 5$, donde x es un número entero positivo. Por ejemplo, $35 = 10(3) + 5$ y $145 = 10(14) + 5$. Ahora observe el siguiente patrón cuando se eleva al cuadrado tal número.

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25$$
$$= \boxed{100x(x + 1) + 25}$$

El patrón dentro del recuadro con línea discontinua se puede enunciar como "sumar 25 al producto de x, $x + 1$ y 100". Por tanto, para calcular mentalmente 35^2, puede pensar "$35^2 = 3(4)(100) + 25 = 1225$". Calcule mentalmente cada uno de los siguientes números y luego compruebe sus respuestas.

(a) 15^2 **(b)** 25^2 **(c)** 45^2

(d) 55^2 **(e)** 65^2 **(f)** 75^2

(g) 85^2 **(h)** 95^2 **(i)** 105^2

3.4 Factorización: uso de la propiedad distributiva

Recuerde que 2 y 3 son *factores* de 6 porque el producto de 2 y 3 es 6. Del mismo modo, en un producto indicado como $7ab$, 7, a y b se llaman factores del producto. Si un entero positivo mayor que 1 no tiene factores que sean enteros positivos distintos a él mismo y a 1, entonces se llama **número primo**. Por ende, los números primos menores que 20 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Un entero positivo mayor que 1 que no es número primo, se llama **número compuesto**. Los números compuestos

menores que 20 son 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 y 18. Todo número compuesto es el producto de números primos. Considere los siguientes ejemplos.

$$4 = 2 \cdot 2 \qquad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 121 = 11 \cdot 11$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

La forma de producto indicado que contiene sólo factores primos se llama **forma de factorización prima** de un número. Por tanto, la forma de factorización prima de 63 es $3 \cdot 3 \cdot 7$. También se dice que el número se **factorizó completamente** cuando está en la forma de factorización prima.

En general, la factorización es el inverso de la multiplicación. Anteriormente se usó la propiedad distributiva para encontrar el producto de un monomio y un polinomio, como en los siguientes ejemplos.

$$3(x + 2) = 3(x) + 3(2) = 3x + 6$$
$$5(2x - 1) = 5(2x) - 5(1) = 10x - 5$$
$$x(x^2 + 6x - 4) = x(x^2) + x(6x) - x(4) = x^3 + 6x^2 - 4x$$

También debe usar la propiedad distributiva [en la forma $ab + ac = a(b + c)$] para invertir el proceso; esto es, factorizar un polinomio dado. Considere los siguientes ejemplos. (Los pasos en los recuadros con línea discontinua se pueden realizar mentalmente.)

$$3x + 6 = \boxed{3(x) + 3(2)} = 3(x + 2),$$
$$10x - 5 = \boxed{5(2x) - 5(1)} = 5(2x - 1),$$
$$x^3 + 6x^2 - 4x = \boxed{x(x^2) + x(6x) - x(4)} = x(x^2 + 6x - 4)$$

Note que en cada ejemplo un polinomio dado se factorizó en el producto de un monomio y un polinomio. Obviamente, los polinomios se podrían factorizar en varias formas. Considere algunas factorizaciones de $3x^2 + 12x$.

$$3x^2 + 12x = 3x(x + 4) \quad \text{o} \quad 3x^2 + 12x = 3(x^2 + 4x) \quad \text{o}$$
$$3x^2 + 12x = x(3x + 12) \quad \text{o} \quad 3x^2 + 12x = \frac{1}{2}(6x^2 + 24x)$$

Sin embargo, se está interesado principalmente en la primera de las formas de factorización anteriores, que se conoce como **forma completamente factorizada**. Un polinomio con coeficientes enteros es una forma completamente factorizada si

1. Se expresa como un producto de polinomios con *coeficientes enteros*, y

2. Ningún polinomio, distinto a un monomio, dentro de la forma factorizada se puede factorizar aún más en polinomios con coeficientes enteros.

¿Ve por qué sólo la primera de las formas factorizadas de $3x^2 + 12x$ se dice que está en forma completamente factorizada? En las otras tres formas el polinomio dentro

de los paréntesis se puede factorizar todavía más. Más aún, en la última forma, $\frac{1}{2}(6x^2 + 24x)$, se viola la condición de usar sólo coeficientes enteros.

El proceso de factorización que se estudia en esta sección, $ab + ac = a(b + c)$, con frecuencia se conoce como **factorización del factor monomial común más alto**. La idea clave en este proceso es reconocer el factor monomial que es común a todos los términos. Por ejemplo, observe que cada término del polinomio $2x^3 + 4x^2 + 6x$ tiene un factor de $2x$. Por tanto, se escribe

$$2x^3 + 4x^2 + 6x = 2x(\qquad)$$

y dentro de paréntesis se inserta el factor polinomial adecuado. Los términos del factor polinomial se determinan al dividir cada término del polinomio original por el factor de $2x$. La forma final completamente factorizada es

$$2x^3 + 4x^2 + 6x = 2x(x^2 + 2x + 3)$$

Los siguientes ejemplos demuestran aún más este proceso de factorización del factor monomial común más alto.

$$12x^3 + 16x^2 = 4x^2(3x + 4) \qquad 6x^2y^3 + 27xy^4 = 3xy^3(2x + 9y)$$

$$8ab - 18b = 2b(4a - 9) \qquad 8y^3 + 4y^2 = 4y^2(2y + 1)$$

$$30x^3 + 42x^4 - 24x^5 = 6x^3(5 + 7x - 4x^2)$$

Note que, en cada ejemplo, el factor monomial común en sí mismo no está en forma completamente factorizada. Por ejemplo, $4x^2(3x + 4)$ no se escribe como $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot (3x + 4)$.

En ocasiones puede haber un factor binomial común en lugar de un factor monomial común. Por ejemplo, cada uno de los dos términos de la expresión $x(y + 2) + z(y + 2)$ tiene un factor binomial $(y + 2)$. Por ende, se puede factorizar $(y + 2)$ de cada término, y el resultado es

$$x(y + 2) + z(y + 2) = (y + 2)(x + z)$$

Considere algunos ejemplos más que implican un factor binomial común.

$$a^2(b + 1) + 2(b + 1) = (b + 1)(a^2 + 2)$$

$$x(2y - 1) - y(2y - 1) = (2y - 1)(x - y)$$

$$x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$$

Es posible que el polinomio original no muestre factor monomial o binomial evidente, que es el caso con $ab + 3a + bc + 3c$. Sin embargo, al factorizar a de los primeros dos términos y c de los últimos dos términos se obtiene

$$ab + 3a + bc + 3c = a(b + 3) + c(b + 3)$$

Ahora es obvio un factor binomial común de $(b + 3)$ y se procede como antes.

$$a(b + 3) + c(b + 3) = (b + 3)(a + c)$$

A este proceso de factorización se le conoce como **factorización por agrupamiento**. Considere algunos ejemplos de este tipo.

$$ab^2 - 4b^2 + 3a - 12 = b^2(a - 4) + 3(a - 4)$$ Factorice b^2 de los dos primeros términos y 3 de los dos últimos términos.

$$= (a - 4)(b^2 + 3)$$ Factorice los binomios comunes de ambos términos.

$$x^2 - x + 5x - 5 = x(x - 1) + 5(x - 1)$$ Factorice x de los dos primeros términos y 5 de los dos últimos términos.

$$= (x - 1)(x + 5)$$ Factorice los binomios comunes de ambos términos.

$$x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2)$$ Factorice x de los dos primeros términos y -3 de los dos últimos términos.

$$= (x + 2)(x - 3)$$ Factorice los binomios comunes de ambos términos.

Tal vez sea necesario reordenar algunos términos antes de aplicar la propiedad distributiva. Los términos que contengan factores comunes necesitan agruparse juntos, y esto se puede realizar en más de una forma. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

$$\begin{aligned} 4a^2 - bc^2 - a^2b + 4c^2 &= 4a^2 - a^2b + 4c^2 - bc^2 \\ &= a^2(4 - b) + c^2(4 - b) \\ &= (4 - b)(a^2 + c^2) \qquad \text{o} \\ 4a^2 - bc^2 - a^2b + 4c^2 &= 4a^2 + 4c^2 - bc^2 - a^2b \\ &= 4(a^2 + c^2) - b(c^2 + a^2) \\ &= 4(a^2 + c^2) - b(a^2 + c^2) \\ &= (a^2 + c^2)(4 - b) \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones y problemas

Una razón de por qué la factorización es una importante habilidad algebraica es que amplía las técnicas para resolver ecuaciones. Cada vez que se examine una técnica de factorización, se le usará entonces para ayudar a resolver ciertos tipos de ecuaciones.

Es necesaria otra propiedad de igualdad antes de considerar algunas ecuaciones en las que es útil la técnica de factor común más alto. Suponga que el producto de dos números es cero. ¿Se puede concluir que al menos uno de estos números debe ser cero? Sí. A continuación se enuncia una propiedad que formaliza esta idea. La propiedad 3.5, junto con el patrón de factor común más alto, proporciona otra técnica para resolver ecuaciones.

Propiedad 3.5

Sean a y b números reales. Entonces

$$ab = 0 \quad \text{si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

EJEMPLO 1

Resuelva $x^2 + 6x = 0$

Solución

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0 \quad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$

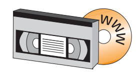
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0 \quad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -6$$

En consecuencia, tanto 0 como −6 satisfarán la ecuación original, y el conjunto solución es $\{-6, 0\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $a^2 = 11a$



Solución

$$a^2 = 11a$$

$$a^2 - 11a = 0 \quad \text{Sume } -11a \text{ a ambos lados.}$$

$$a(a - 11) = 0 \quad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$

$$a = 0 \quad \text{o} \quad a - 11 = 0 \quad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

$$a = 0 \quad \text{o} \quad a = 11$$

El conjunto solución es $\{0, 11\}$. ■

Observaciones: Note que en el ejemplo 2 *no* se dividieron ambos lados de la ecuación entre a. Esto haría que se perdiera la solución de 0.

EJEMPLO 3

Resuelva $3n^2 - 5n = 0$

Solución

$$3n^2 - 5n = 0$$

$$n(3n - 5) = 0$$

$$n = 0 \quad \text{o} \quad 3n - 5 = 0$$

$$n = 0 \quad \text{o} \quad 3n = 5$$

$$n = 0 \quad \text{o} \quad n = \frac{5}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 4

Resuelva $3ax^2 + bx = 0$ para x.

Solución

$$3ax^2 + bx = 0$$

$$x(3ax + b) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3ax + b = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3ax = -b$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -\frac{b}{3a}$$

El conjunto solución es $\left\{0, -\frac{b}{3a}\right\}$. ■

Muchos de los problemas que se resuelven en las siguientes secciones tienen un escenario geométrico. Algunas figuras geométricas básicas, junto con fórmulas adecuadas, se mencionan al final de este libro. Tal vez necesite consultarlas para refrescar su memoria.

PROBLEMA 1

El área de un cuadrado es tres veces su perímetro. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

Solución

Sea s la longitud de un lado del cuadrado (figura 3.17). El área se representa mediante s^2 y el perímetro por $4s$. Por tanto,

$$s^2 = 3(4s) \qquad \text{El área será tres veces el perímetro.}$$

$$s^2 = 12s$$

$$s^2 - 12s = 0$$

$$s(s - 12) = 0$$

$$s = 0 \quad \text{o} \quad s = 12$$

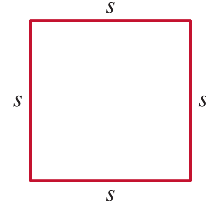
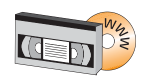


Figura 3.17

Puesto que 0 no es una solución razonable debe ser un cuadrado de 12 por 12. (¡Asegúrese de comprobar esta respuesta en el enunciado original del problema!) ■

PROBLEMA 2

Suponga que el volumen de un cilindro circular recto es numéricamente igual al área superficial total del cilindro. Si la altura del cilindro es igual a la longitud de un radio de la base, encuentre la altura.



Solución

Puesto que $r = h$, la fórmula para volumen $V = \pi r^2 h$ se convierte en $V = \pi r^3$, y la fórmula para el área superficial total $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ se convierte en $S = 2\pi r^2 + 2\pi r^2$, o $S = 4\pi r^2$. Por tanto, se puede establecer y resolver la siguiente ecuación.

$$\pi r^3 = 4\pi r^2$$

$$\pi r^3 - 4\pi r^2 = 0$$

$$\pi r^2(r - 4) = 0$$

$$\pi r^2 = 0 \quad \text{o} \quad r - 4 = 0$$

$$r = 0 \quad \text{o} \quad r = 4$$

Cero no es una respuesta razonable, por tanto, la altura debe tener 4 unidades. ■

Conjunto de problemas 3.4

Para los problemas 1-10 clasifique cada número como primo o compuesto.

1. 63 **2.** 81

3. 59 **4.** 83

5. 51 **6.** 69

7. 91 **8.** 119

9. 71 **10.** 101

Para los problemas 11-20 factorice cada uno de los números compuestos en el producto de números primos. Por ejemplo, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

11. 28 **12.** 39

13. 44 **14.** 49

15. 56 **16.** 64

17. 72 **18.** 84

19. 87 **20.** 91

Para los problemas 21-46 factorice completamente.

21. $6x + 3y$ **22.** $12x + 8y$

23. $6x^2 + 14x$ **24.** $15x^2 + 6x$

25. $28y^2 - 4y$ **26.** $42y^2 - 6y$

27. $20xy - 15x$ **28.** $27xy - 36y$

29. $7x^3 + 10x^2$ **30.** $12x^3 - 10x^2$

31. $18a^2b + 27ab^2$ **32.** $24a^3b^2 + 36a^2b$

33. $12x^3y^4 - 39x^4y^3$ **34.** $15x^4y^2 - 45x^5y^4$

35. $8x^4 + 12x^3 - 24x^2$ **36.** $6x^5 - 18x^3 + 24x$

37. $5x + 7x^2 + 9x^4$ **38.** $9x^2 - 17x^4 + 21x^5$

39. $15x^2y^3 + 20xy^2 + 35x^3y^4$ **40.** $8x^5y^3 - 6x^4y^5 + 12x^2y^3$

41. $x(y + 2) + 3(y + 2)$ **42.** $x(y - 1) + 5(y - 1)$

43. $3x(2a + b) - 2y(2a + b)$ **44.** $5x(a - b) + y(a - b)$

45. $x(x + 2) + 5(x + 2)$ **46.** $x(x - 1) - 3(x - 1)$

Para los problemas 47-64 factorice mediante agrupamiento.

47. $ax + 4x + ay + 4y$ **48.** $ax - 2x + ay - 2y$

49. $ax - 2bx + ay - 2by$ **50.** $2ax - bx + 2ay - by$

51. $3ax - 3bx - ay + by$ **52.** $5ax - 5bx - 2ay + 2by$

53. $2ax + 2x + ay + y$ **54.** $3bx + 3x + by + y$

55. $ax^2 - x^2 + 2a - 2$ **56.** $ax^2 - 2x^2 + 3a - 6$

57. $2ac + 3bd + 2bc + 3ad$ **58.** $2bx + cy + cx + 2by$

59. $ax - by + bx - ay$ **60.** $2a^2 - 3bc - 2ab + 3ac$

61. $x^2 + 9x + 6x + 54$ **62.** $x^2 - 2x + 5x - 10$

63. $2x^2 + 8x + x + 4$ **64.** $3x^2 + 18x - 2x - 12$

Para los problemas 65-80 resuelva cada una de las ecuaciones.

65. $x^2 + 7x = 0$ **66.** $x^2 + 9x = 0$

67. $x^2 - x = 0$ **68.** $x^2 - 14x = 0$

69. $a^2 = 5a$ **70.** $b^2 = -7b$

71. $-2y = 4y^2$

72. $-6x = 2x^2$

73. $3x^2 + 7x = 0$

74. $-4x^2 + 9x = 0$

75. $4x^2 = 5x$

76. $3x = 11x^2$

77. $x - 4x^2 = 0$

78. $x - 6x^2 = 0$

79. $12a = -a^2$

80. $-5a = -a^2$

Para los problemas 81-86 resuelva cada ecuación para la variable indicada.

81. $5bx^2 - 3ax = 0$ para x

82. $ax^2 + bx = 0$ para x

83. $2by^2 = -3ay$ para y

84. $3ay^2 = by$ para y

85. $y^2 - ay + 2by - 2ab = 0$ para y

86. $x^2 + ax + bx + ab = 0$ para x

Para los problemas 87-96, establezca una ecuación y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

87. El cuadrado de un número es igual a siete veces el número. Encuentre el número.

88. Suponga que el área de un cuadrado es seis veces su perímetro. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

89. El área de una región circular es numéricamente igual a tres veces la circunferencia del círculo. Encuentre la longitud de un radio del círculo.

90. Encuentre la longitud de un radio de un círculo tal que la circunferencia del círculo sea numéricamente igual al área del círculo.

91. Suponga que el área de un círculo es numéricamente igual al perímetro de un cuadrado y que la longitud de un radio del círculo es igual a la longitud de un lado del cuadrado. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado. Exprese su respuesta en términos de π.

92. Encuentre la longitud de un radio de una esfera tal que el área superficial de la esfera sea numéricamente igual al volumen de la esfera.

93. Suponga que el área de un estacionamiento cuadrado es el doble del área de un solar rectangular adyacente. Si el solar rectangular tiene 50 pies de ancho y su longitud es la misma que la longitud de un lado del estacionamiento cuadrado, encuentre las dimensiones del cuadrado y del rectángulo.

94. El área de un cuadrado es un cuarto el área de un triángulo. Un lado del triángulo tiene 16 pulgadas de largo y la altura a dicho lado es la misma longitud que un lado del cuadrado. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

95. Suponga que el volumen de una esfera es numéricamente igual al doble del área superficial de la esfera. Encuentre la longitud de un radio de la esfera.

96. Suponga que un radio de una esfera es igual en longitud a un radio de un círculo. Si el volumen de la esfera es numéricamente igual a cuatro veces el área del círculo, encuentre la longitud de un radio para la esfera y el círculo.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

97. ¿$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 7$ es un número primo o compuesto? Defienda su respuesta.

98. Suponga que su amigo factoriza $36x^2y + 48xy^2$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 36x^2y + 48xy^2 &= (4xy)(9x + 12y) \\ &= (4xy)(3)(3x + 4y) \\ &= 12xy(3x + 4y) \end{aligned}$$

¿Este abordaje es correcto? ¿Tendría alguna sugerencia que ofrecer a su amigo?

99. Uno de sus compañeros de clase resuelve la ecuación $3ax + bx = 0$ para x del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 3ax + bx &= 0 \\ 3ax &= -bx \\ x &= \frac{-bx}{3a} \end{aligned}$$

¿Cómo sabe que la solución es incorrecta? ¿Cómo lo ayudaría a obtener la solución correcta?

MÁS INVESTIGACIÓN

100. El área superficial total de un cilindro circular recto está dada por la fórmula $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r representa el radio de una base y h representa la altura del cilindro. Para propósitos de cálculo, puede ser más conveniente cambiar la forma del lado derecho de la fórmula al factorizarla.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$= 2\pi r(r + h)$$

Use $A = 2\pi r(r + h)$ para encontrar el área superficial total de cada uno de los siguientes cilindros. Además, use $\frac{22}{7}$ como una aproximación para π.

(a) $r = 7$ centímetros y $h = 12$ centímetros

(b) $r = 14$ metros y $h = 20$ metros

(c) $r = 3$ pies y $h = 4$ pies

(d) $r = 5$ yardas y $h = 9$ yardas

Para los problema 101-106 factorice cada expresión. Suponga que todas las variables que aparecen como exponentes representan enteros positivos.

101. $2x^{2a} - 3x^a$

102. $6x^{2a} + 8x^a$

103. $y^{3m} + 5y^{2m}$

104. $3y^{5m} - y^{4m} - y^{3m}$

105. $2x^{6a} - 3x^{5a} + 7x^{4a}$

106. $6x^{3a} - 10x^{2a}$

3.5 Factorización: diferencia de dos cuadrados y suma o diferencia de dos cubos

En la sección 3.3 se examinaron algunos patrones de multiplicación especiales. Uno de estos patrones fue

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Este mismo patrón, visto como un patrón de factorización, se conoce como diferencia de cuadrados.

Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Aplicar el patrón es bastante sencillo, como lo demuestran los siguientes ejemplos. De nuevo, los pasos en los recuadros con línea discontinua por lo general se realizan mentalmente.

$$x^2 - 16 = \boxed{(x)^2 - (4)^2} = (x + 4)(x - 4)$$
$$4x^2 - 25 = \boxed{(2x)^2 - (5)^2} = (2x + 5)(2x - 5)$$
$$16x^2 - 9y^2 = \boxed{(4x)^2 - (3y)^2} = (4x + 3y)(4x - 3y)$$
$$1 - a^2 = \boxed{(1)^2 - (a)^2} = (1 + a)(1 - a)$$

La multiplicación es conmutativa, de modo que el orden de escritura de los factores no es importante. Por ejemplo, $(x + 4)(x - 4)$ también se puede escribir como $(x - 4)(x + 4)$.

Debe tener cuidado de no suponer un patrón de factorización análogo para la *suma* de dos cuadrados; *no existe*. Por ejemplo, $x^2 + 4 \neq (x + 2)(x + 2)$, porque $(x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$. Se dice que un polinomio como $x^2 + 4$ es un **polinomio primo** o que no es factorizable con el uso de enteros.

En ocasiones el patrón de diferencia de cuadrados se aplica más de una vez, como lo ilustran los siguientes ejemplos.

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$16x^4 - 81y^4 = (4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) = (4x^2 + 9y^2)(2x + 3y)(2x - 3y)$$

También puede ser que los cuadrados sean distintos a cuadrados monomios simples, como en los siguientes tres ejemplos.

$$(x + 3)^2 - y^2 = ((x + 3) + y)((x + 3) - y) = (x + 3 + y)(x + 3 - y)$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - (2y + 1)^2 &= (2x + (2y + 1))(2x - (2y + 1)) \\ &= (2x + 2y + 1)(2x - 2y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - (x + 4)^2 &= ((x - 1) + (x + 4))((x - 1) - (x + 4)) \\ &= (x - 1 + x + 4)(x - 1 - x - 4) \\ &= (2x + 3)(-5) \end{aligned}$$

Es posible aplicar al mismo problema tanto la técnica de factorización de un factor monomial común, como el patrón de la diferencia de cuadrados. En general, es mejor buscar primero un factor monomial común. Considere los siguientes ejemplos.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 50 &= 2(x^2 - 25) \\ &= 2(x + 5)(x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36 &= 9(x^2 - 4) \\ &= 9(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48y^3 - 27y &= 3y(16y^2 - 9) \\ &= 3y(4y + 3)(4y - 3) \end{aligned}$$

Precaución El polinomio $9x^2 - 36$ se puede factorizar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36 &= (3x + 6)(3x - 6) \\ &= 3(x + 2)(3)(x - 2) \\ &= 9(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando se toma este enfoque, parece haber una tendencia a detenerse en el paso $(3x + 6)(3x - 6)$. Por tanto, recuerde la sugerencia de *buscar primero un factor monomial común*.

Los siguientes ejemplos deben ayudarle a resumir todas las técnicas de factorización consideradas hasta el momento.

$$7x^2 + 28 = 7(x^2 + 4)$$

$$4x^2y - 14xy^2 = 2xy(2x - 7y)$$

$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

$18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$

$y^2 + 9$ no es factorizable usando enteros.

$5x + 13y$ no es factorizable usando enteros.

$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

Suma y diferencia de dos cubos

Como se puntualizó, no existe un patrón de suma de cuadrados análogo al patrón de factorización de diferencia de cuadrados. Esto es: un polinomio como $x^2 + 9$ no es factorizable usando enteros, sin embargo, sí existe un patrón tanto para la suma como para la diferencia de dos cubos. Estos patrones son los siguientes:

Suma y diferencia de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Advierta cómo se aplican estos patrones en los siguientes cuatro ejemplos.

$x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

$8a^3 + 125b^3 = (2a)^3 + (5b)^3 = (2a + 5b)(4a^2 - 10ab + 25b^2)$

$x^3 - 1 = (x)^3 - (1)^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$27y^3 - 64x^3 = (3y)^3 - (4x)^3 = (3y - 4x)(9y^2 + 12xy + 16x^2)$

Resolución de ecuaciones y problemas

Recuerde que cada vez que se asimila una nueva técnica de factorización, también se vuelve más capaz para resolver ecuaciones. Considere cómo puede usar el patrón de factorización de diferencia de cuadrados para ayudar a resolver ciertos tipos de ecuaciones.

EJEMPLO 1

Resuelva $x^2 = 16$

Solución

$$x^2 = 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 4$$

El conjunto solución es $\{-4, 4\}$. (¡Asegúrese de comprobar estas soluciones en la ecuación original!) ■

EJEMPLO 2

Resuelva $9x^2 = 64$

Solución

$$9x^2 = 64$$
$$9x^2 - 64 = 0$$
$$(3x + 8)(3x - 8) = 0$$
$$3x + 8 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 8 = 0$$
$$3x = -8 \quad \text{o} \quad 3x = 8$$
$$x = -\frac{8}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{8}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $7x^2 - 7 = 0$

Solución

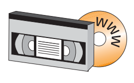
$$7x^2 - 7 = 0$$
$$7(x^2 - 1) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{7}.$$
$$(x + 1)(x - 1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 1$$

El conjunto solución es $\{-1, 1\}$. ■

En los ejemplos anteriores se usó la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Esta propiedad se puede extender a cualquier número de factores cuyo producto sea cero. Por ende, para tres factores, la propiedad se podría enunciar $abc = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ o $c = 0$. Los siguientes dos ejemplos ilustran esta idea.

EJEMPLO 4

Resuelva $x^4 - 16 = 0$



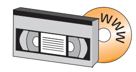
Solución

$$x^4 - 16 = 0$$
$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$
$$(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x^2 = -4 \quad \text{o} \quad x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto solución es {−2, 2}. (Puesto que ningún número real, cuando se eleva al cuadrado, producirá −4, la ecuación $x^2 = -4$ no producirá soluciones adicionales en números reales.) ■

EJEMPLO 5 Resuelva $x^3 - 49x = 0$



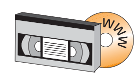
Solución

$$x^3 - 49x = 0$$
$$x(x^2 - 49) = 0$$
$$x(x + 7)(x - 7) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 7 = 0 \quad \text{o} \quad x - 7 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -7 \quad \text{o} \quad x = 7$$

El conjunto solución es {−7, 0, 7}. ■

Mientras más sepa acerca de resolver ecuaciones, mejor podrá resolver problemas verbales.

PROBLEMA 1 El área combinada de dos cuadrados es 40 centímetros cuadrados. Cada lado de un cuadrado es tres veces el largo de un lado del otro cuadrado. Encuentre las dimensiones de cada uno de los cuadrados.



Solución

Sea s la longitud de un lado del cuadrado más pequeño. Entonces, $3s$ representa la longitud de un lado del cuadrado más grande (figura 3.18).

$$s^2 + (3s)^2 = 40$$
$$s^2 + 9s^2 = 40$$
$$10s^2 = 40$$
$$s^2 = 4$$
$$s^2 - 4 = 0$$
$$(s + 2)(s - 2) = 0$$
$$s + 2 = 0 \quad \text{o} \quad s - 2 = 0$$
$$s = -2 \quad \text{o} \quad s = 2$$

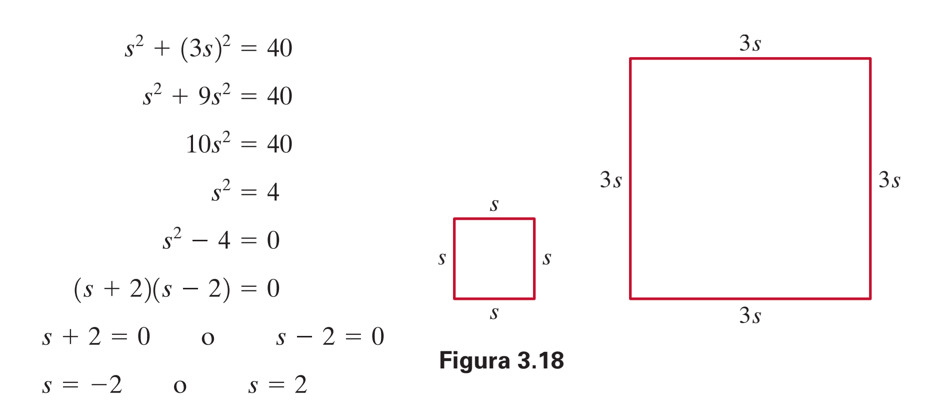


Figura 3.18

Puesto que s representa la longitud de un lado de un cuadrado, la solución −2 tiene que desecharse. Por ende, la longitud de un lado del cuadrado pequeño es 2 centímetros y el cuadrado grande tiene lados de longitud 3(2) = 6 centímetros. ■

Conjunto de problemas 3.5

Para los problemas 1-20 use el patrón de diferencia de cuadrados para factorizar cada uno de los siguientes.

1. $x^2 - 1$

2. $x^2 - 9$

3. $16x^2 - 25$

4. $4x^2 - 49$

5. $9x^2 - 25y^2$

6. $x^2 - 64y^2$

7. $25x^2y^2 - 36$

8. $x^2y^2 - a^2b^2$

9. $4x^2 - y^4$

10. $x^6 - 9y^2$

11. $1 - 144n^2$

12. $25 - 49n^2$

13. $(x + 2)^2 - y^2$

14. $(3x + 5)^2 - y^2$

15. $4x^2 - (y + 1)^2$

16. $x^2 - (y - 5)^2$

17. $9a^2 - (2b + 3)^2$

18. $16s^2 - (3t + 1)^2$

19. $(x + 2)^2 - (x + 7)^2$

20. $(x - 1)^2 - (x - 8)^2$

Para los problemas 21-44 factorice por completo cada uno de los siguientes polinomios. Indique cualquiera que no sea factorizable usando enteros. No olvide buscar primero un factor monomial común.

21. $9x^2 - 36$

22. $8x^2 - 72$

23. $5x^2 + 5$

24. $7x^2 + 28$

25. $8y^2 - 32$

26. $5y^2 - 80$

27. $a^3b - 9ab$

28. $x^3y^2 - xy^2$

29. $16x^2 + 25$

30. $x^4 - 16$

31. $n^4 - 81$

32. $4x^2 + 9$

33. $3x^3 + 27x$

34. $20x^3 + 45x$

35. $4x^3y - 64xy^3$

36. $12x^3 - 27xy^2$

37. $6x - 6x^3$

38. $1 - 16x^4$

39. $1 - x^4y^4$

40. $20x - 5x^3$

41. $4x^2 - 64y^2$

42. $9x^2 - 81y^2$

43. $3x^4 - 48$

44. $2x^5 - 162x$

Para los problemas 45-56 use el patrón de suma de cubos o el de diferencia de cubos para factorizar cada una de las siguientes.

45. $a^3 - 64$

46. $a^3 - 27$

47. $x^3 + 1$

48. $x^3 + 8$

49. $27x^3 + 64y^3$

50. $8x^3 + 27y^3$

51. $1 - 27a^3$

52. $1 - 8x^3$

53. $x^3y^3 - 1$

54. $125x^3 + 27y^3$

55. $x^6 - y^6$

56. $x^6 + y^6$

Para los problemas 57-70 encuentre todas las soluciones en números reales para cada ecuación.

57. $x^2 - 25 = 0$

58. $x^2 - 1 = 0$

59. $9x^2 - 49 = 0$

60. $4y^2 = 25$

61. $8x^2 - 32 = 0$

62. $3x^2 - 108 = 0$

63. $3x^3 = 3x$

64. $4x^3 = 64x$

65. $20 - 5x^2 = 0$

66. $54 - 6x^2 = 0$

67. $x^4 - 81 = 0$

68. $x^5 - x = 0$

69. $6x^3 + 24x = 0$

70. $4x^3 + 12x = 0$

Para los problemas 71-80 establezca una ecuación y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

71. El cubo de un número es igual a nueve veces el mismo número. Encuentre el número.

72. El cubo de un número es igual al cuadrado del mismo número. Encuentre el número.

73. El área combinada de dos círculos es 80π centímetros cuadrados. La longitud del radio de un círculo es el doble de la longitud del radio del otro círculo. Encuentre la longitud del radio de cada círculo.

74. El área combinada de dos cuadrados es 26 metros cuadrados. Los lados del cuadrado más grande son cinco veces el largo de los lados del cuadrado más pequeño. Encuentre las dimensiones de cada uno de los cuadrados.

75. Un rectángulo tiene el doble de largo que de ancho y su área es de 50 metros cuadrados. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

76. Suponga que la longitud de un rectángulo es uno y un tercio tan largo como su ancho. El área del rectángulo es de 48 centímetros cuadrados. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

77. El área superficial total de un cilindro circular recto es de 54π pulgadas cuadradas. Si la altura del cilindro es el doble de la longitud del radio, encuentre la altura del cilindro.

78. El área superficial total de un cono circular recto es 108π pies cuadrados. Si la altura inclinada del cono es el doble de la longitud del radio de la base, encuentre la longitud del radio.

79. La suma de las áreas de un círculo y un cuadrado es $(16\pi + 64)$ yardas cuadradas. Si un lado del cuadrado es el doble de la longitud del radio del círculo, encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

80. La longitud de una altura de un triángulo es un tercio la longitud del lado al cual se dibuja. Si el área del triángulo es de 6 centímetros cuadrados, encuentre la longitud de dicha altura.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

81. Explique cómo resolvería la ecuación $4x^3 = 64x$.

82. ¿Cuál es el error en el siguiente proceso de factorización?

$$25x^2 - 100 = (5x + 10)(5x - 10)$$

¿Cómo lo corregiría?

83. Considere la siguiente solución:

$$6x^2 - 24 = 0$$
$$6(x^2 - 4) = 0$$
$$6(x + 2)(x - 2) = 0$$
$$6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$6 = 0 \quad \text{o} \quad x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$.

¿La solución es correcta? ¿Tiene alguna sugerencia que ofrecer a la persona que usó este abordaje?

3.6 Factorización de trinomios

Uno de los tipos de factorización más comunes utilizados en álgebra es la expresión de un trinomio como producto de dos binomios. Para desarrollar una técnica de factorización, observe primero algunas ideas de multiplicación. Considere el producto $(x + a)(x + b)$ y use la propiedad distributiva para mostrar cómo se forma cada término del trinomio resultante.

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x(x) + x(b) + a(x) + a(b)\\ &= x^2 + (a + b)x + ab\end{aligned}$$

Note que el coeficiente del término medio es la suma de a y b y que el último término es el producto de a y b. Estas dos relaciones se pueden usar para factorizar trinomios. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Factorice $x^2 + 8x + 12$

Solución

Es necesario completar lo siguiente con dos enteros cuya suma sea 8 y su producto sea 12.

$$x^2 + 8x + 12 = (x + ____)(x + ____)$$

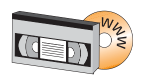
Los posibles pares de factores de 12 son 1(12), 2(6) y 3(4). Puesto que $6 + 2 = 8$, puede completar la factorización del modo siguiente:

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x + 2)$$

Para comprobar la respuesta encuentre el producto de $(x + 6)$ y $(x + 2)$. ■

EJEMPLO 2

Factorice $x^2 - 10x + 24$



Solución

Se necesitan dos enteros cuyo producto sea 24 y su suma sea −10. Use una pequeña tabla para organizar su pensamiento.

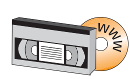
Factores	Producto de los factores	Suma de los factores
(−1)(−24)	24	−25
(−2)(−12)	24	−14
(−3)(−8)	24	−11
(−4)(−6)	24	−10

La última línea contiene los números que se requieren. Por ende

$$x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6)$$ ■

EJEMPLO 3

Factorice $x^2 + 7x - 30$



Solución

Se necesitan dos enteros cuyo producto sea −30 y su suma sea 7.

Factores	Producto de los factores	Suma de los factores
(−1)(30)	−30	29
(1)(−30)	−30	−29
(2)(−15)	−30	−13
(−2)(15)	−30	13
(−3)(10)	−30	7

No necesita buscar más.

Los números que se necesitan son −3 y 10, y se puede completar la factorización.

$$x^2 + 7x - 30 = (x + 10)(x - 3)$$ ■

EJEMPLO 4

Factorice $x^2 + 7x + 16$

Solución

Se necesitan dos enteros cuyo producto sea 16 y su suma sea 7.

Factores	Producto de los factores	Suma de los factores
(1)(16)	16	17
(2)(8)	16	10
(4)(4)	16	8

Se agotaron todos los posibles pares de factores de 16 y ninguno de los pares tiene una suma de 7, de modo que se concluye que $x^2 + 7x + 16$ *no es factorizable usando enteros*. ■

Las tablas en los ejemplos 2, 3 y 4 se usaron para ilustrar una forma de organizar sus pensamientos para tales problemas. Por lo general, deberá factorizar mentalmente tales problemas, sin tomarse tiempo para formular una tabla. Sin embargo, observe que en el ejemplo 4 la tabla ayudó para estar completamente seguros de que se intentaron todas las posibilidades. Ya sea que use o no una tabla, tenga en mente que las ideas clave son las relaciones producto y suma.

EJEMPLO 5

Factorice $n^2 - n - 72$

Solución

Note que el coeficiente del término medio es -1. Por tanto se buscan dos enteros cuyo producto sea -72 y dado que su suma es -1, el valor absoluto del número negativo debe ser 1 mayor que el número positivo. Los números son -9 y 8, y se puede completar la factorización.

$$n^2 - n - 72 = (n - 9)(n + 8)$$ ■

EJEMPLO 6

Factorice $t^2 + 2t - 168$

Solución

Se necesitan dos enteros cuyo producto sea -168 y su suma sea 2. Dado que el valor absoluto del término constante es más bien grande puede ayudar el buscarlos en forma factorizada prima.

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Ahora se pueden formar mentalmente dos números con el uso de todos estos factores en diferentes combinaciones. Al usar dos números 2 y un 3 en un número y el otro 2 y el 7 en el segundo número produce $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ y $2 \cdot 7 = 14$. El coeficiente del término medio del trinomio es 2, así que se deben usar 14 y -12. Por tanto se obtiene

$$t^2 + 2t - 168 = (t + 14)(t - 12)$$ ■

Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Se factorizaron trinomios de la forma $x^2 + bx + c$; esto es: trinomios donde el coeficiente del término cuadrado es 1. Ahora considere factorizar trinomios donde el coeficiente del término cuadrado no es 1. Primero se ilustra una técnica de ensayo y error que funciona bastante bien para ciertos tipos de trinomios. Esta técnica se basa en el conocimiento de la multiplicación de binomios.

EJEMPLO 7

Factorice $2x^2 + 11x + 5$

Solución

Al observar el primer término, $2x^2$, y los signos positivos de los otros dos términos, se sabe que los binomios son de la forma

$$(x + ____)(2x + ____)$$

Puesto que los factores del último término, 5, son 1 y 5, sólo se tienen las siguientes dos posibilidades para intentar.

$$(x + 1)(2x + 5) \quad \text{o} \quad (x + 5)(2x + 1)$$

Al comprobar el término medio formado en cada uno de estos productos, se encuentra que la segunda posibilidad produce el término medio correcto de $11x$. Por tanto,

$$2x^2 + 11x + 5 = (x + 5)(2x + 1)$$

■

EJEMPLO 8

Factorice $10x^2 - 17x + 3$

Solución

Primero, observe que $10x^2$ se puede escribir como $x \cdot 10x$ o $2x \cdot 5x$. Segundo, dado que el término medio del trinomio es negativo y el último término es positivo, se sabe que los binomios son de la forma

$$(x - ____)(10x - ____) \quad \text{o} \quad (2x - ____)(5x - ____)$$

Los factores del último término, 3, son 1 y 3, así que existen las siguientes posibilidades.

$$(x - 1)(10x - 3) \quad (2x - 1)(5x - 3)$$
$$(x - 3)(10x - 1) \quad (2x - 3)(5x - 1)$$

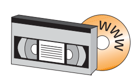
Al comprobar el término medio formado en cada uno de estos productos se encuentra que el producto $(2x - 3)(5x - 1)$ produce el término medio deseado de $-17x$. En consecuencia,

$$10x^2 - 17x + 3 = (2x - 3)(5x - 1)$$

■

EJEMPLO 9

Factorice $4x^2 + 6x + 9$



Solución

El primer término, $4x^2$, y los signos positivos de los términos medio y último indican que los binomios son de la forma

$$(x + ____)(4x + ____) \quad \text{o} \quad (2x + ____)(2x + ____).$$

Puesto que los factores de 9 son 1 y 9 o 3 y 3, se tienen las siguientes posibilidades para intentar.

$(x + 1)(4x + 9) \qquad (2x + 1)(2x + 9)$

$(x + 9)(4x + 1) \qquad (2x + 3)(2x + 3)$

$(x + 3)(4x + 3)$

Cuando se intentan todas estas posibilidades se encuentra que ninguno de ellos produce un término medio de $6x$. Por tanto, $4x^2 + 6x + 9$ no es factorizable usando enteros. ■

Ahora es obvio que factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ puede ser tedioso. La idea clave es organizar el trabajo de modo que considere todas las posibilidades. Se sugiere un posible formato en los tres ejemplos previos. Conforme practica tales problemas puede encontrar un formato propio. Cualquiera que funcione mejor para usted es el abordaje correcto.

Hay otra técnica, más sistemática, que tal vez quiera usar con ciertos trinomios. Es una extensión de la técnica empleada al comienzo de esta sección. Para ver la base de esta técnica observe el siguiente producto:

$$\begin{aligned}(px + r)(qx + s) &= px(qx) + px(s) + r(qx) + r(s) \\ &= (pq)x^2 + (ps + rq)x + rs\end{aligned}$$

Note que el producto del coeficiente del término x^2 y el término constante es $pqrs$. Del mismo modo, el producto de los dos coeficientes de x, ps y rq, también es $pqrs$. Por tanto, cuando se factoriza el trinomio $(pq)x^2 + (ps + rq)x + rs$, los dos coeficientes de x deben tener una suma de $(ps) + (rq)$ y un producto de $pqrs$. Vea cómo funciona esto en algunos ejemplos.

EJEMPLO 10 Factorice $6x^2 - 11x - 10$

Solución

Primero multiplique el coeficiente del término x^2, 6, y el término constante, -10.

$(6)(-10) = -60$

Ahora encuentre dos enteros cuya suma sea -11 y cuyo producto sea -60. Los enteros 4 y -15 satisfacen estas condiciones.

Reescriba el problema original y exprese el término medio como una suma de términos con estos factores de -60 como sus coeficientes.

$6x^2 - 11x - 10 = 6x^2 + 4x - 15x - 10$

Después de escribir nuevamente el problema puede factorizar por agrupamiento; esto es: factorizar $2x$ de los primeros dos términos y -5 de los últimos dos términos.

$6x^2 + 4x - 15x - 10 = 2x(3x + 2) - 5(3x + 2)$

Ahora es obvio un factor binomial común de $(3x + 2)$, y se puede proceder del modo siguiente:

$2x(3x + 2) - 5(3x + 2) = (3x + 2)(2x - 5)$

Por ende, $6x^2 - 11x - 10 = (3x + 2)(2x - 5)$. ■

EJEMPLO 11

Factorice $4x^2 - 29x + 30$

Solución

Primero multiplique el coeficiente del término x^2, 4, y el término constante, 30.

$$(4)(30) = 120$$

Ahora encuentre dos enteros cuya suma sea -29 y cuyo producto sea 120. Los enteros -24 y -5 satisfacen estas condiciones.

Reescriba el problema original y exprese el término medio como una suma de términos con estos factores de 120 como sus coeficientes.

$$4x^2 - 29x + 30 = 4x^2 - 24x - 5x + 30$$

Después de reescribir el problema puede factorizar por agrupamiento; esto es: factorizar $4x$ de los primeros dos términos y -5 de los últimos dos términos.

$$4x^2 - 29x - 5x + 30 = 4x(x - 6) - 5(x - 6)$$

Ahora es obvio un factor binomial común de $(x - 6)$, y se puede proceder del modo siguiente:

$$4x(x - 6) - 5(x - 6) = (x - 6)(4x - 5)$$

Por ende, $4x^2 - 29x + 30 = (x - 6)(4x - 5)$. ■

La técnica que se presenta en los ejemplos 10 y 11 tiene pasos concretos a seguir. Los ejemplos del 7 al 9 se factorizaron mediante técnica de ensayo y error. Ambas técnicas tienen sus fortalezas y debilidades. Cuál técnica usar depende de la complejidad del problema y de sus preferencias personales. Mientras más trabaje con ambas técnicas, más cómodo se sentirá al usarlas.

Resumen de técnicas de factorización

Antes de resumir el trabajo con las técnicas de factorización observe dos patrones de factorización más especiales. En la sección 3.3 se usaron los siguientes dos patrones para elevar al cuadrado binomios.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Estos patrones también se pueden usar con propósitos de factorización.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{y} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Los trinomios en los lados izquierdos se llaman **trinomios cuadrados perfectos**; son resultado de elevar al cuadrado un binomio. Siempre se pueden factorizar trinomios cuadrados perfectos usando las técnicas usuales para factorizar trinomios. Sin embargo, se reconocen fácilmente por la naturaleza de sus términos. Por ejemplo, $4x^2 + 12x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto porque
Del mismo modo, $9x^2 - 30x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto porque

1. El primer término es un cuadrado perfecto. $(2x)^2$
2. El último término es un cuadrado perfecto. $(3)^2$
3. El término medio es el doble del producto de las cantidades a elevar al cuadrado en los términos primero y último. $2(2x)(3)$

Una vez que tiene un trinomio cuadrado perfecto, los factores se siguen inmedia-

1. El primer término es un cuadrado perfecto. $(3x)^2$
2. El último término es un cuadrado perfecto. $(5)^2$
3. El término medio es el negativo del doble producto de las cantidades a elevar al cuadrado en los términos primero y último. $-2(3x)(5)$

tamente de los dos patrones básicos. Por ende

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2 \qquad 9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$$

He aquí algunos ejemplos adicionales de trinomios cuadrados perfectos y sus formas factorizadas.

Como se indicó, factorizar es una importante habilidad algebraica. Aprendió

$$x^2 + 14x + 49 = (x)^2 + 2(x)(7) + (7) = (x + 7)^2$$

$$n^2 - 16n + 64 = (n)^2 - 2(n)(8) + (8)^2 = (n - 8)^2$$

$$36a^2 + 60ab + 25b^2 = (6a)^2 + 2(6a)(5b) + (5b)^2 = (6a + 5b)^2$$

$$16x^2 - 8xy + y^2 = (4x)^2 - 2(4x)(y) + (y)^2 = (4x - y)^2$$

Acaso querrá hacer este paso mentalmente, después de sentirse cómodo con el proceso.

algunas técnicas de factorización básicas, una a la vez, pero debe aplicar cualquiera (o cualesquiera) que sea(n) adecuada(s). Revise las técnicas y considere una variedad de ejemplos que demuestren su uso.

En este capítulo se estudiaron:

1. La factorización mediante el uso de la propiedad distributiva para factorizar un factor monomial (o binomial) común.
2. La factorización mediante la aplicación del patrón de diferencia de cuadrados.
3. La factorización mediante la aplicación del patrón de suma de dos cubos o diferencia de dos cubos.
4. La factorización de trinomios en el producto de dos binomios. (El patrón de trinomio cuadrado perfecto es un caso especial de esta técnica.)

Como guía general, siempre busque primero un factor monomial común y luego proceda con las otras técnicas. Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos y asegúrese de que concuerdan con los factores indicados.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 20x + 48 &= 2(x^2 + 10x + 24) \\ &= 2(x + 4)(x + 6) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 16a^2 - 64 &= 16(a^2 - 4) \\ &= 16(a + 2)(a - 2) \end{aligned}$$

$3x^3y^3 + 27xy = 3xy(x^2y^2 + 9)$

$x^2 + 3x - 21$ no es factorizable usando enteros

$30n^2 - 31n + 5 = (5n - 1)(6n - 5)$

$t^4 + 3t^2 + 2 = (t^2 + 2)(t^2 + 1)$

$2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8) = 2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Conjunto de problemas 3.6

Para los problemas 1-56 factorice completamente cada uno de los polinomios e indique cualquiera que no sea factorizable usando enteros.

1. $x^2 + 9x + 20$

2. $x^2 + 11x + 24$

3. $x^2 - 11x + 28$

4. $x^2 - 8x + 12$

5. $a^2 + 5a - 36$

6. $a^2 + 6a - 40$

7. $y^2 + 20y + 84$

8. $y^2 + 21y + 98$

9. $x^2 - 5x - 14$

10. $x^2 - 3x - 54$

11. $x^2 + 9x + 12$

12. $35 - 2x - x^2$

13. $6 + 5x - x^2$

14. $x^2 + 8x - 24$

15. $x^2 + 15xy + 36y^2$

16. $x^2 - 14xy + 40y^2$

17. $a^2 - ab - 56b^2$

18. $a^2 + 2ab - 63b^2$

19. $15x^2 + 23x + 6$

20. $9x^2 + 30x + 16$

21. $12x^2 - x - 6$

22. $20x^2 - 11x - 3$

23. $4a^2 + 3a - 27$

24. $12a^2 + 4a - 5$

25. $3n^2 - 7n - 20$

26. $4n^2 + 7n - 15$

27. $3x^2 + 10x + 4$

28. $4n^2 - 19n + 21$

29. $10n^2 - 29n - 21$

30. $4x^2 - x + 6$

31. $8x^2 + 26x - 45$

32. $6x^2 + 13x - 33$

33. $6 - 35x - 6x^2$

34. $4 - 4x - 15x^2$

35. $20y^2 + 31y - 9$

36. $8y^2 + 22y - 21$

37. $24n^2 - 2n - 5$

38. $3n^2 - 16n - 35$

39. $5n^2 + 33n + 18$

40. $7n^2 + 31n + 12$

41. $x^2 + 25x + 150$

42. $x^2 + 21x + 108$

43. $n^2 - 36n + 320$

44. $n^2 - 26n + 168$

45. $t^2 + 3t - 180$

46. $t^2 - 2t - 143$

47. $t^4 - 5t^2 + 6$

48. $t^4 + 10t^2 + 24$

49. $10x^4 + 3x^2 - 4$

50. $3x^4 + 7x^2 - 6$

51. $x^4 - 9x^2 + 8$

52. $x^4 - x^2 - 12$

53. $18n^4 + 25n^2 - 3$

54. $4n^4 + 3n^2 - 27$

55. $x^4 - 17x^2 + 16$

56. $x^4 - 13x^2 + 36$

Los problemas 57-94 le ayudarán a conjuntar todas las técnicas de factorización de este capítulo. Factorice completamente cada polinomio e indique cualquiera que no sea factorizable usando enteros.

57. $2t^2 - 8$

58. $14w^2 - 29w - 15$

59. $12x^2 + 7xy - 10y^2$

60. $8x^2 + 2xy - y^2$

61. $18n^3 + 39n^2 - 15n$

62. $n^2 + 18n + 77$

63. $n^2 - 17n + 60$

64. $(x + 5)^2 - y^2$

65. $36a^2 - 12a + 1$

66. $2n^2 - n - 5$

67. $6x^2 + 54$

68. $x^5 - x$

69. $3x^2 + x - 5$

70. $5x^2 + 42x - 27$

71. $x^2 - (y - 7)^2$

72. $2n^3 + 6n^2 + 10n$

73. $1 - 16x^4$

74. $9a^2 - 30a + 25$

75. $4n^2 + 25n + 36$

76. $x^3 - 9x$

77. $n^3 - 49n$

78. $4x^2 + 16$

79. $x^2 - 7x - 8$

80. $x^2 + 3x - 54$

81. $3x^4 - 81x$

82. $x^3 + 125$

83. $x^4 + 6x^2 + 9$

84. $18x^2 - 12x + 2$

85. $x^4 - 5x^2 - 36$

86. $6x^4 - 5x^2 - 21$

87. $6w^2 - 11w - 35$

88. $10x^3 + 15x^2 + 20x$

89. $25n^2 + 64$

90. $4x^2 - 37x + 40$

91. $2n^3 + 14n^2 - 20n$

92. $25t^2 - 100$

93. $2xy + 6x + y + 3$

94. $3xy + 15x - 2y - 10$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

95. ¿Cómo puede determinar que $x^2 + 5x + 12$ no es factorizable usando enteros?

96. Explique su proceso de pensamiento cuando factorice $30x^2 + 13x - 56$.

97. Considere el siguiente abordaje para factorizar

$12x^2 + 54x + 60$.

$$\begin{aligned} 12x^2 + 54x + 60 &= (3x + 6)(4x + 10) \\ &= 3(x + 2)(2)(2x + 5) \\ &= 6(x + 2)(2x + 5) \end{aligned}$$

¿Este proceso de factorización es correcto? ¿Tiene alguna sugerencia para la persona que use este abordaje?

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 98-103 factorice cada trinomio y suponga que todas la variables que aparecen como exponentes representan enteros positivos.

98. $x^{2a} + 2x^a - 24$

99. $x^{2a} + 10x^a + 21$

100. $6x^{2a} - 7x^a + 2$

101. $4x^{2a} + 20x^a + 25$

102. $12x^{2n} + 7x^n - 12$

103. $20x^{2n} + 21x^n - 5$

Considere el siguiente abordaje para factorizar $(x - 2)^2 + 3(x - 2) - 10$.

$$\begin{aligned} &(x - 2)^2 + 3(x - 2) - 10 \\ &= y^2 + 3y - 10 && \text{Sustituya } x - 2 \text{ con } y. \\ &= (y + 5)(y - 2) && \text{Factorice.} \\ &= (x - 2 + 5)(x - 2 - 2) && \text{Sustituya } y \text{ con } x - 2. \\ &= (x + 3)(x - 4) \end{aligned}$$

Use este abordaje para factorizar los problemas 104-109.

104. $(x - 3)^2 + 10(x - 3) + 24$

105. $(x + 1)^2 - 8(x + 1) + 15$

106. $(2x + 1)^2 + 3(2x + 1) - 28$

107. $(3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 36$

108. $6(x - 4)^2 + 7(x - 4) - 3$

109. $15(x + 2)^2 - 13(x + 2) + 2$

3.7 Resolución de ecuaciones y problemas

Las técnicas para factorizar trinomios que se presentaron en las secciones anteriores proporcionan mayor capacidad para resolver ecuaciones. Esto es: la propiedad "$ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$" continúa jugando un importante papel conforme resuelve ecuaciones que contienen trinomios factorizables. Considere algunos ejemplos.

E J E M P L O 1

Resuelva $x^2 - 11x - 12 = 0$

Solución

$$x^2 - 11x - 12 = 0$$
$$(x - 12)(x + 1) = 0$$
$$x - 12 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = -1$$

El conjunto solución es $\{-1, 12\}$. ■

E J E M P L O 2

Resuelva $20x^2 + 7x - 3 = 0$

Solución

$$20x^2 + 7x - 3 = 0$$
$$(4x - 1)(5x + 3) = 0$$
$$4x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 5x + 3 = 0$$
$$4x = 1 \quad \text{o} \quad 5x = -3$$
$$x = \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad x = -\frac{3}{5}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{5}, \frac{1}{4}\right\}$. ■

E J E M P L O 3

Resuelva $-2n^2 - 10n + 12 = 0$

Solución

$$-2n^2 - 10n + 12 = 0$$
$$-2(n^2 + 5n - 6) = 0$$
$$n^2 + 5n - 6 = 0 \qquad \text{Multiplique ambos lados por } -\frac{1}{2}.$$
$$(n + 6)(n - 1) = 0$$
$$n + 6 = 0 \quad \text{o} \quad n - 1 = 0$$
$$n = -6 \quad \text{o} \quad n = 1$$

El conjunto solución es $\{-6, 1\}$. ■

E J E M P L O 4

Resuelva $16x^2 - 56x + 49 = 0$

Solución

$$16x^2 - 56x + 49 = 0$$
$$(4x - 7)^2 = 0$$

$$(4x - 7)(4x - 7) = 0$$

$$4x - 7 = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 7 = 0$$

$$4x = 7 \quad \text{o} \quad 4x = 7$$

$$x = \frac{7}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{7}{4}$$

La única solución es $\frac{7}{4}$; por ende, el conjunto solución es $\left\{\frac{7}{4}\right\}$. ■

EJEMPLO 5

Resuelva $9a(a + 1) = 4$

Solución

$$9a(a + 1) = 4$$

$$9a^2 + 9a = 4$$

$$9a^2 + 9a - 4 = 0$$

$$(3a + 4)(3a - 1) = 0$$

$$3a + 4 = 0 \quad \text{o} \quad 3a - 1 = 0$$

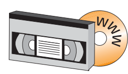
$$3a = -4 \quad \text{o} \quad 3a = 1$$

$$a = -\frac{4}{3} \quad \text{o} \quad a = \frac{1}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 6

Resuelva $(x - 1)(x + 9) = 11$



Solución

$$(x - 1)(x + 9) = 11$$

$$x^2 + 8x - 9 = 11$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$(x + 10)(x - 2) = 0$$

$$x + 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -10 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto solución es $\{-10, 2\}$. ■

Resolución de problemas

Como es de esperar, el aumento en su capacidad para resolver ecuaciones ensancha su base para resolver problemas. Ahora está listo para enfrentar algunos problemas usando ecuaciones de los tipos que se presentaron en esta sección.

PROBLEMA 1

Una habitación contiene 78 sillas. El número de sillas por hilera es uno más que el doble del número de hileras. Encuentre el número de hileras y el número de sillas por hilera.

Solución

Sea r el número de hileras. Entonces $2r + 1$ representa el número de sillas por hilera.

$$r(2r + 1) = 78$$ El número de hileras por el número de sillas por hilera produce el número total de sillas.

$$2r^2 + r = 78$$

$$2r^2 + r - 78 = 0$$

$$(2r + 13)(r - 6) = 0$$

$$2r + 13 = 0 \quad \text{o} \quad r - 6 = 0$$

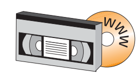
$$2r = -13 \quad \text{o} \quad r = 6$$

$$r = -\frac{13}{2} \quad \text{o} \quad r = 6$$

La solución $-\frac{13}{2}$ debe desecharse, así que hay 6 hileras y $2r + 1$ o $2(6) + 1 = 13$ sillas por hilera. ■

PROBLEMA 2

Una tira de ancho uniforme, cortada a ambos lados y ambos extremos de una hoja de papel de 8 por 11 pulgadas, reduce el tamaño del papel a un área de 40 pulgadas cuadradas. Encuentre el ancho de la tira.



Solución

Sea x el ancho de la tira, como se indica en la figura 3.19.

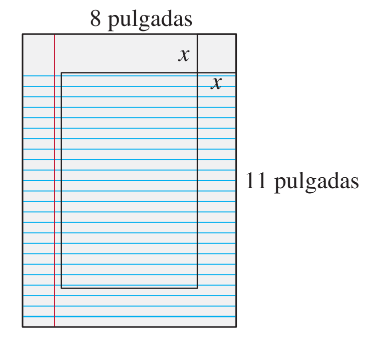


Figura 3.19

La longitud del papel después de cortar las tiras de ancho x de ambos extremos y ambos lados será $11 - 2x$, y el ancho del rectángulo recientemente formado

será $8 - 2x$. Puesto que el área ($A = lw$) será de 40 pulgadas de ancho se puede establecer y resolver la siguiente ecuación.

$$(11 - 2x)(8 - 2x) = 40$$
$$88 - 38x + 4x^2 = 40$$
$$4x^2 - 38x + 48 = 0$$
$$2x^2 - 19x + 24 = 0$$
$$(2x - 3)(x - 8) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 8 = 0$$
$$2x = 3 \quad \text{o} \quad x = 8$$
$$x = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x = 8$$

La solución de 8 debe desecharse porque el ancho de la hoja original sólo es de 8 pulgadas. Por tanto, la tira a cortar de los cuatro lados debe tener $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. (¡Compruebe su respuesta!) ■

El teorema de Pitágoras, un importante teorema que pertenece a los triángulos rectángulos, en ocasiones puede servir como una guía para resolver problemas que traten con triángulos rectángulos (vea la figura 3.20). El teorema de Pitágoras afirma que "en cualquier triángulo rectángulos, el cuadrado del lado más largo (llamado hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (llamados catetos)". Use esta relación para ayudarse a resolver un problema.

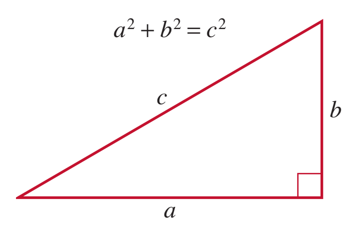


Figura 3.20

PROBLEMA 3

Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 2 centímetros más que el doble de largo del otro cateto. La hipotenusa es 1 centímetro más larga que el más largo de los dos catetos. Encuentre las longitudes de los tres lados del triángulo recto.

Solución

Sea l la longitud del cateto más corto. Entonces $2l + 2$ representa la longitud del otro cateto, y $2l + 3$ representa la longitud de la hipotenusa. Use el teorema de Pitágoras como guía para establecer y resolver la siguiente ecuación.

$$l^2 + (2l + 2)^2 = (2l + 3)^2$$
$$l^2 + 4l^2 + 8l + 4 = 4l^2 + 12l + 9$$
$$l^2 - 4l - 5 = 0$$
$$(l - 5)(l + 1) = 0$$

$$l - 5 = 0 \quad \text{o} \quad l + 1 = 0$$
$$l = 5 \quad \text{o} \quad l = -1$$

La solución negativa se debe desechar, así que la longitud de un cateto es de 5 centímetros; el otro cateto tiene $2(5) + 2 = 12$ centímetros de largo, y la hipotenusa tiene $2(5) + 3 = 13$ centímetros de largo. ■

Conjunto de problemas 3.7

Para los problemas 1-54 resuelva cada ecuación. Necesitará usar las técnicas de factorización que se estudiaron a lo largo de este capítulo.

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$

2. $x^2 + 7x + 10 = 0$

3. $x^2 + 18x + 72 = 0$

4. $n^2 + 20n + 91 = 0$

5. $n^2 - 13n + 36 = 0$

6. $n^2 - 10n + 16 = 0$

7. $x^2 + 4x - 12 = 0$

8. $x^2 + 7x - 30 = 0$

9. $w^2 - 4w = 5$

10. $s^2 - 4s = 21$

11. $n^2 + 25n + 156 = 0$

12. $n(n - 24) = -128$

13. $3t^2 + 14t - 5 = 0$

14. $4t^2 - 19t - 30 = 0$

15. $6x^2 + 25x + 14 = 0$

16. $25x^2 + 30x + 8 = 0$

17. $3t(t - 4) = 0$

18. $1 - x^2 = 0$

19. $-6n^2 + 13n - 2 = 0$

20. $(x + 1)^2 - 4 = 0$

21. $2n^3 = 72n$

22. $a(a - 1) = 2$

23. $(x - 5)(x + 3) = 9$

24. $3w^3 - 24w^2 + 36w = 0$

25. $16 - x^2 = 0$

26. $16t^2 - 72t + 81 = 0$

27. $n^2 + 7n - 44 = 0$

28. $2x^3 = 50x$

29. $3x^2 = 75$

30. $x^2 + x - 2 = 0$

31. $15x^2 + 34x + 15 = 0$

32. $20x^2 + 41x + 20 = 0$

33. $8n^2 - 47n - 6 = 0$

34. $7x^2 + 62x - 9 = 0$

35. $28n^2 - 47n + 15 = 0$

36. $24n^2 - 38n + 15 = 0$

37. $35n^2 - 18n - 8 = 0$

38. $8n^2 - 6n - 5 = 0$

39. $-3x^2 - 19x + 14 = 0$

40. $5x^2 = 43x - 24$

41. $n(n + 2) = 360$

42. $n(n + 1) = 182$

43. $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

44. $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$

45. $3x^2 - 46x - 32 = 0$

46. $x^4 - 9x^2 = 0$

47. $2x^2 + x - 3 = 0$

48. $x^3 + 5x^2 - 36x = 0$

49. $12x^3 + 46x^2 + 40x = 0$

50. $5x(3x - 2) = 0$

51. $(3x - 1)^2 - 16 = 0$

52. $(x + 8)(x - 6) = -24$

53. $4a(a + 1) = 3$

54. $-18n^2 - 15n + 7 = 0$

Para los problemas 55-70 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

55. Encuentre dos enteros consecutivos cuyo producto sea 72.

56. Encuentre dos números enteros pares positivos cuyo producto sea 224.

57. Encuentre dos enteros cuyo producto sea 105, tal que uno de los enteros sea uno más que el doble del otro entero.

58. Encuentre dos enteros cuyo producto sea 104, tal que uno de los enteros sea tres menos que el doble del otro entero.

59. El perímetro de un rectángulo es de 32 pulgadas y el área es de 60 pulgadas cuadradas. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

60. Suponga que la longitud de cierto rectángulo es dos centímetros más que tres veces su ancho. Si el área del rectángulo es de 56 centímetros cuadrados encuentre su longitud y ancho.

61. La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos es 85. Encuentre los enteros.

62. La suma de las áreas de dos círculos es 65π pies cuadrados. La longitud del radio del círculo más grande es 1 pie menos que el doble de la longitud del radio del círculo más pequeño. Encuentre la longitud del radio de cada círculo.

63. El área combinada de un cuadrado y un rectángulo es de 64 centímetros cuadrados. El ancho del rectángulo es 2 centímetros más que la longitud de un lado del cuadrado, y la longitud del rectángulo es 2 centímetros más que su ancho. Encuentre las dimensiones del cuadrado y del rectángulo.

64. Los Ortega tienen un huerto de manzanos que contiene 90 árboles. El número de árboles en cada hilera es 3 más que el doble del número de hileras. Encuentre el número de hileras y el número de árboles por hilera.

65. Las longitudes de los tres lados de un triángulo recto se representan mediante números enteros positivos consecutivos. Encuentre las longitudes de los tres lados.

66. El área del piso de la habitación rectangular que se muestra en la figura 3.21 es de 175 pies cuadrados. La longitud de la habitación es $1\frac{1}{2}$ pies más largo que el ancho. Encuentre la longitud de la habitación.

Área = 175 pies cuadrados

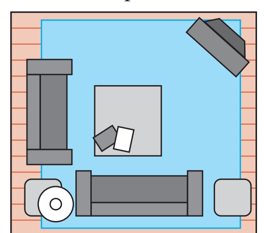


Figura 3.21

67. Suponga que la longitud de un cateto de un triángulo recto es 3 pulgadas más que la longitud del otro cateto. Si la longitud de la hipotenusa es de 15 pulgadas, encuentre las longitudes de los dos catetos.

68. Las longitudes de los tres lados de un triángulo recto se representan mediante números enteros positivos pares consecutivos. Encuentre las longitudes de los tres lados.

69. El área de una hoja de papel triangular mide 28 pulgadas cuadradas. Un lado del triángulo mide 2 pulgadas más que tres veces la longitud de la altura a dicho lado. Encuentre la longitud de dicho lado y la altura del lado.

70. Una tira de ancho uniforme se sombrea a lo largo de ambos lados y ambos extremos de un cartel rectangular que mide 12 por 16 pulgadas (vea la figura 3.22). ¿Cuán ancha es la tira sombreada si la mitad del cartel está sombreada?

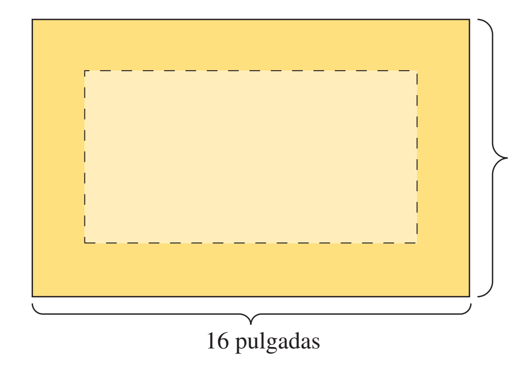


Figura 3.22

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

71. Discuta el papel que juega la factorización en la resolución de ecuaciones.

72. Explique cómo resolvería la ecuación $(x + 6)(x - 4) = 0$ y también cómo resolvería $(x + 6)(x - 4) = -16$.

73. Explique cómo resolvería la ecuación $3(x - 1)(x + 2) = 0$ y también cómo resolvería la ecuación $x(x - 1)(x + 2) = 0$.

74. Considere las siguientes dos soluciones para la ecuación $(x + 3)(x - 4) = (x + 3)(2x - 1)$.

Solución A

$$(x + 3)(x - 4) = (x + 3)(2x - 1)$$
$$(x + 3)(x - 4) - (x + 3)(2x - 1) = 0$$
$$(x + 3)[x - 4 - (2x - 1)] = 0$$
$$(x + 3)(x - 4 - 2x + 1) = 0$$
$$(x + 3)(-x - 3) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad -x - 3 = 0$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad -x = 3$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -3$$

El conjunto solución es $\{-3\}$.

Solución B

$$(x + 3)(x - 4) = (x + 3)(2x - 1)$$
$$x^2 - x - 12 = 2x^2 + 5x - 3$$
$$0 = x^2 + 6x + 9$$
$$0 = (x + 3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

¿Ambos métodos son correctos? ¿Cuál método usaría y por qué?

Capítulo 3 Resumen

(3.1) Un **término** es un producto indicado y puede contener cualquier número de factores. Las variables implicadas en un término se llaman **factores literales**, y el factor numérico se llama **coeficiente numérico**. Los términos que contienen variables sólo con enteros no negativos como exponentes se llaman **monomios**. El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de los factores literales.

Un **polinomio** es un monomio o una suma (o diferencia) finita de monomios. Los polinomios se clasifican del modo siguiente:

Polinomio con un término ⟶ Monomio

Polinomio con dos términos ⟶ Binomio

Polinomio con tres términos ⟶ Trinomio

Los **términos similares**, o **términos semejantes**, tienen los mismos factores literales. Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva proporcionan la base para reordenar, reagrupar y combinar términos semejantes.

(3.2) Las siguientes propiedades proporcionan la base para multiplicar y dividir monomios.

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

2. $(b^n)^m = b^{mn}$

3. $(ab)^n = a^n b^n$

4. **(a)** $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}, \quad si\ n > m$

(b) $\dfrac{b^n}{b^m} = 1, \quad si\ n = m$

(3.3) Las propiedades conmutativa y asociativa, las propiedades de los exponentes y la propiedad distributiva funcionan en conjunto para formar una base para multiplicar polinomios. Los siguientes se pueden usar como patrones de multiplicación.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(3.4) Si un entero positivo mayor que 1 no tiene factores que sean enteros positivos distintos a él mismo y a 1, entonces se llama **número primo**. Un entero positivo mayor que 1 que no es un número primo se llama **número compuesto**.

La forma de producto indicado que contiene sólo factores primos se llama **forma de factorización prima** de un número.

Una expresión como $ax + bx + ay + by$ se puede factorizar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

A esto se le llama **factorización por agrupamiento**.

La propiedad distributiva en la forma $ab + ac = a(b + c)$ es la base para **factorizar el factor monomial común más alto**.

Expresar los polinomios en forma factorizada, y luego aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, proporciona otra técnica para resolver ecuaciones.

(3.5) El patrón de factorización

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

se llama **diferencia de cuadrados**.

El patrón de factorización de diferencia de cuadrados, junto con la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, proporciona otra técnica para resolver ecuaciones. Los patrones de factorización

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad \text{y}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

se llaman **suma y diferencia de cubos**.

(3.6) Expresar un trinomio (para el cual el coeficiente del término cuadrado es 1) como producto de dos binomios se basa en la relación

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

El coeficiente del término medio es la suma de a y b, y el último término es el producto de a y b.

Si el coeficiente del término al cuadrado de un trinomio no es igual a 1, entonces se sostiene la siguiente relación.

$$(px + r)(qx + s) = (pq)x^2 + (ps + rq)x + rs$$

Los dos coeficientes de x, ps y rq, deben tener una suma de $(ps) + (rq)$ y un producto de $pqrs$. Por tanto, para factorizar algo como $6x^2 + 7x - 3$ es necesario encontrar dos enteros cuyo producto sea $6(-3) = -18$ y cuya suma sea 7. Los enteros son 9 y -2, y se puede factorizar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 7x - 3 &= 6x^2 + 9x - 2x - 3 \\ &= 3x(2x + 3) - 1(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(3x - 1) \end{aligned}$$

Un **trinomio cuadrado perfecto** es el resultado de elevar al cuadrado un binomio. Existen dos patrones básicos para factorizar trinomios cuadrados perfectos.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

(3.7) Las técnicas de factorización que se estudiaron en este capítulo, junto con la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, proporcionan la base para ampliar el repertorio de procesos para resolver ecuaciones.

La habilidad para resolver más tipos de ecuaciones aumenta sus capacidades para resolver problemas.

Capítulo 3 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-23 realice las operaciones indicadas y simplifique cada una de las siguientes.

1. $(3x - 2) + (4x - 6) + (-2x + 5)$

2. $(8x^2 + 9x - 3) - (5x^2 - 3x - 1)$

3. $(6x^2 - 2x - 1) + (4x^2 + 2x + 5) - (-2x^2 + x - 1)$

4. $(-5x^2y^3)(4x^3y^4)$

5. $(-2a^2)(3ab^2)(a^2b^3)$

6. $5a^2(3a^2 - 2a - 1)$

7. $(4x - 3y)(6x + 5y)$

8. $(x + 4)(3x^2 - 5x - 1)$

9. $(4x^2y^3)^4$

10. $(3x - 2y)^2$

11. $(-2x^2y^3z)^3$

12. $\dfrac{-39x^3y^4}{3xy^3}$

13. $[3x - (2x - 3y + 1)] - [2y - (x - 1)]$

14. $(x^2 - 2x - 5)(x^2 + 3x - 7)$

15. $(7 - 3x)(3 + 5x)$

16. $-(3ab)(2a^2b^3)^2$

17. $\left(\dfrac{1}{2}ab\right)(8a^3b^2)(-2a^3)$

18. $(7x - 9)(x + 4)$

19. $(3x + 2)(2x^2 - 5x + 1)$

20. $(3x^{n+1})(2x^{3n-1})$

21. $(2x + 5y)^2$

22. $(x - 2)^3$

23. $(2x + 5)^3$

Para los problemas 24-45 factorice cada polinomio completamente. Indique cualquiera que no se factorice usando enteros.

24. $x^2 + 3x - 28$

25. $2t^2 - 18$

26. $4n^2 + 9$

27. $12n^2 - 7n + 1$

28. $x^6 - x^2$

29. $x^3 - 6x^2 - 72x$

30. $6a^3b + 4a^2b^2 - 2a^2bc$

31. $x^2 - (y - 1)^2$

32. $8x^2 + 12$

33. $12x^2 + x - 35$

34. $16n^2 - 40n + 25$

35. $4n^2 - 8n$

36. $3w^3 + 18w^2 - 24w$

37. $20x^2 + 3xy - 2y^2$

38. $16a^2 - 64a$

39. $3x^3 - 15x^2 - 18x$

40. $n^2 - 8n - 128$

41. $t^4 - 22t^2 - 75$

42. $35x^2 - 11x - 6$

43. $15 - 14x + 3x^2$

44. $64n^3 - 27$

45. $16x^3 + 250$

Para los problemas 46-65 resuelva cada ecuación.

46. $4x^2 - 36 = 0$

47. $x^2 + 5x - 6 = 0$

48. $49n^2 - 28n + 4 = 0$

49. $(3x - 1)(5x + 2) = 0$

50. $(3x - 4)^2 - 25 = 0$

51. $6a^3 = 54a$

52. $x^5 = x$

53. $-n^2 + 2n + 63 = 0$

54. $7n(7n + 2) = 8$

55. $30w^2 - w - 20 = 0$

56. $5x^4 - 19x^2 - 4 = 0$

57. $9n^2 - 30n + 25 = 0$

58. $n(2n + 4) = 96$

59. $7x^2 + 33x - 10 = 0$

60. $(x + 1)(x + 2) = 42$

61. $x^2 + 12x - x - 12 = 0$

62. $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$

63. $30 - 19x - 5x^2 = 0$

64. $3t^3 - 27t^2 + 24t = 0$

65. $-4n^2 - 39n + 10 = 0$

Para los problemas 66-75 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

66. Encuentre tres enteros consecutivos tales que el producto del menor y el mayor sea uno menos que 9 veces el entero intermedio.

67. Encuentre dos enteros cuya suma sea 2 y cuyo producto sea −48.

68. Encuentre dos números enteros positivos impares consecutivos cuyo producto sea 195.

69. Dos automóviles salen de una intersección al mismo tiempo, uno con dirección norte y el otro con dirección este. Cierto tiempo después están separados 20 millas, y el automóvil que viaja hacia el este recorrió 4 millas más que el otro. ¿Cuánto ha recorrido cada automóvil?

70. El perímetro de un rectángulo tiene 32 metros y su área es de 48 metros cuadrados. Encuentre la longitud y ancho del rectángulo.

71. Una habitación contiene 144 sillas. El número de sillas por hilera es dos menos que el doble del número de hileras. Encuentre el número de hileras y el número de sillas por hilera.

72. El área de un triángulo es de 39 pies cuadrados. La longitud de un lado es 1 pie más que el doble de la altura a dicho lado. Encuentre la longitud de dicho lado y la altura al lado.

73. Una alberca con forma rectangular, de 20 por 30 pies, tiene un corredor de ancho uniforme alrededor de la alberca (vea la figura 3.23). El área del corredor es de 336 pies cuadrados. Encuentre el ancho del corredor.

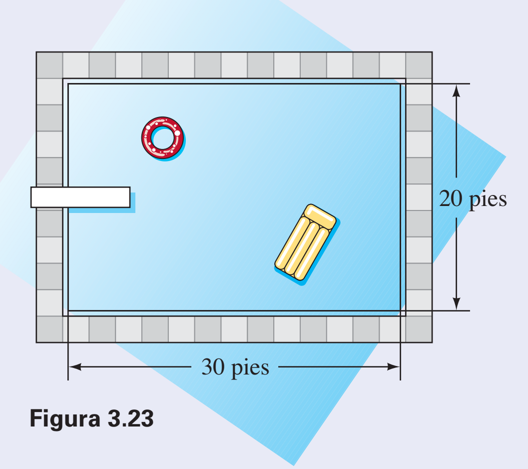


Figura 3.23

74. La suma de las áreas de dos cuadrados da 89 centímetros cuadrados. La longitud de un lado del cuadrado más grande es 3 centímetros más que la longitud de un lado del cuadrado más pequeño. Encuentre las dimensiones de cada cuadrado.

75. El área superficial total de un cilindro circular recto es de 32π pulgadas cuadradas. Si la altura del cilindro es tres veces la longitud del radio encuentre la altura del cilindro.

Capítulo 3 Examen

Para los problemas 1-8 realice las operaciones indicadas y simplifique cada expresión.

1. $(-3x - 1) + (9x - 2) - (4x + 8)$
2. $(-6xy^2)(8x^3y^2)$
3. $(-3x^2y^4)^3$
4. $(5x - 7)(4x + 9)$
5. $(3n - 2)(2n - 3)$
6. $(x - 4y)^3$
7. $(x + 6)(2x^2 - x - 5)$
8. $\dfrac{-70x^4y^3}{5xy^2}$

Para los problemas 9-14 factorice cada expresión completamente.

9. $6x^2 + 19x - 20$
10. $12x^2 - 3$
11. $64 + t^3$
12. $30x + 4x^2 - 16x^3$
13. $x^2 - xy + 4x - 4y$
14. $24n^2 + 55n - 24$

Para los problemas 15-22 resuelva cada ecuación.

15. $x^2 + 8x - 48 = 0$
16. $4n^2 = n$
17. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
18. $(n - 2)(n + 7) = -18$
19. $3x^3 + 21x^2 - 54x = 0$
20. $12 + 13x - 35x^2 = 0$
21. $n(3n - 5) = 2$
22. $9x^2 - 36 = 0$

Para los problemas 23-25 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

23. El perímetro de un rectángulo es de 30 pulgadas, y su área es de 54 pulgadas cuadradas. Encuentre la longitud del lado más largo del rectángulo.
24. Una habitación contiene 105 sillas ordenadas en hileras. El número de hileras es uno más que el doble del número de sillas por hilera. Encuentre el número de hileras.
25. El área combinada de un cuadrado y de un rectángulo da 57 pies cuadrados. El ancho del rectángulo tiene 3 pies más que la longitud de un lado del cuadrado, y la longitud del rectángulo es 5 pies más que la longitud de un lado del cuadrado. Encuentre la longitud del rectángulo.

Capítulos 1-3 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-10 evalúe cada expresión algebraica para los valores dados de las variables. No olvide que en algunos casos puede ser útil simplificar la expresión algebraica antes de evaluarla.

1. $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -2$ y $y = -4$

2. $-n^2 + 2n - 4$ para $n = -3$

3. $2x^2 - 5x + 6$ para $x = 3$

4. $3(2x - 1) - 2(x + 4) - 4(2x - 7)$ para $x = -1$

5. $-(2n - 1) + 5(2n - 3) - 6(3n + 4)$ para $n = 4$

6. $2(a - 4) - (a - 1) + (3a - 6)$ para $a = -5$

7. $(3x^2 - 4x - 7) - (4x^2 - 7x + 8)$ para $x = -4$

8. $-2(3x - 5y) - 4(x + 2y) + 3(-2x - 3y)$ para $x = 2$ y $y = -3$

9. $5(-x^2 - x + 3) - (2x^2 - x + 6) - 2(x^2 + 4x - 6)$ para $x = 2$

10. $3(x^2 - 4xy + 2y^2) - 2(x^2 - 6xy - y^2)$ para $x = -5$ y $y = -2$

Para los problemas 11-18 realice las operaciones indicadas y exprese sus respuestas en la forma más simple.

11. $4(3x - 2) - 2(4x - 1) - (2x + 5)$

12. $(-6ab^2)(2ab)(-3b^3)$

13. $(5x - 7)(6x + 1)$

14. $(-2x - 3)(x + 4)$

15. $(-4a^2b^3)^3$

16. $(x + 2)(5x - 6)(x - 2)$

17. $(x - 3)(x^2 - x - 4)$

18. $(x^2 + x + 4)(2x^2 - 3x - 7)$

Para los problemas 19-38 factorice completamente cada una de las expresiones algebraicas.

19. $7x^2 - 7$

20. $4a^2 - 4ab + b^2$

21. $3x^2 - 17x - 56$

22. $1 - x^3$

23. $xy - 5x + 2y - 10$

24. $3x^2 - 24x + 48$

25. $4n^4 - n^2 - 3$

26. $32x^4 + 108x$

27. $4x^2 + 36$

28. $6x^2 + 5x - 4$

29. $9x^2 - 30x + 25$

30. $2x^2 + 6xy + x + 3y$

31. $8a^3 + 27b^3$

32. $x^4 - 16$

33. $10m^4n^2 - 2m^3n^3 - 4m^2n^4$

34. $5x(2y + 7z) - 12(2y + 7z)$

35. $3x^2 - x - 10$

36. $25 - 4a^2$

37. $36x^2 + 60x + 25$

38. $64y^3 + 1$

Para los problemas 39-42 resuelva cada ecuación para la variable indicada.

39. $5x - 2y = 6$ para x

40. $3x + 4y = 12$ para y

41. $V = 2\pi rh + 2\pi r^2$ para h

42. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ para R_1

43. Resuelva $A = P + Prt$ para r, dado que $A = \$4997$, $P = \$3800$ y $t = 3$ años.

44. Resuelva $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para C, dado que F = 5º.

Para los problemas 45-62 resuelva cada una de las ecuaciones.

45. $(x - 2)(x + 5) = 8$

46. $(5n - 2)(3n + 7) = 0$

47. $-2(n - 1) + 3(2n + 1) = -11$

48. $x^2 + 7x - 18 = 0$

49. $8x^2 - 8 = 0$

50. $\frac{3}{4}(x - 2) - \frac{2}{5}(2x - 3) = \frac{1}{5}$

51. $0.1(x - 0.1) - 0.4(x + 2) = -5.31$

52. $\frac{2x - 1}{2} - \frac{5x + 2}{3} = 3$

53. $|3n - 2| = 7$

54. $|2x - 1| = |x + 4|$

55. $0.08(x + 200) = 0.07x + 20$

56. $2x^2 - 12x - 80 = 0$

57. $x^3 = 16x$

58. $x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$

59. $-12n^2 + 5n + 2 = 0$

60. $3y(y + 1) = 90$

61. $2x^3 + 6x^2 - 20x = 0$

62. $(3n - 1)(2n + 3) = (n + 4)(6n - 5)$

Para los problemas 63-70 resuelva cada una de las desigualdades.

63. $-5(3n + 4) < -2(7n - 1)$

64. $7(x + 1) - 8(x - 2) < 0$

65. $|2x - 1| > 7$

66. $|3x + 7| < 14$

67. $0.09x + 0.1(x + 200) > 77$

68. $\frac{2x - 1}{4} - \frac{x - 2}{6} \leq \frac{3}{8}$

69. $-(x - 1) + 2(3x - 1) \geq 2(x + 4) - (x - 1)$

70. $\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{3}{7}(2x - 1) < \frac{3}{14}$

Para los problemas 71-84 resuelva cada problema al establecer y resolver una ecuación o desigualdad adecuada.

71. Encuentre tres enteros impares consecutivos tales que tres veces el primero menos el segundo es uno más que el tercero.

72. Inés tiene una colección de 48 monedas que consisten de monedas de 5, 10 y 25 centavos. El número de monedas de 10 centavos es uno menos que el doble de monedas de 5 centavos, y el número de monedas de 25 centavos es diez veces mayor que el número de monedas de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada denominación hay en la colección?

73. La suma de las edades actuales de Joey y su madre da 46 años. En 4 años Joey tendrá 3 años menos que la mitad de la edad de su madre en ese momento. Encuentre las edades actuales de Joey y de su madre.

74. La diferencia de las medidas de dos ángulos suplementarios es de 56º. Encuentre la medida de cada ángulo.

75. Norma invirtió cierta cantidad de dinero a 8% de interés y $200 más que dicha cantidad a 9%. Su interés anual total fue de $86. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

76. Sánchez tiene una colección de monedas de 1, 5 y 10 centavos que importan $9.35. Él tiene cinco veces más monedas de 5 centavos que monedas de 1 centavo, y el doble de monedas de 10 centavos que de 1 centavo. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

77. Sandy arranca con su bicicleta a 8 millas por hora. Cincuenta minutos más tarde, Billie avanza a lo largo de la misma ruta a 12 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará Billie en alcanzar a Sandy?

78. ¿Cuántos mililitros de ácido puro se deben agregar a 150 mililitros de una solución de ácido al 30% para obtener una solución al 40%?

79. Un vendedor tiene cierta alfombra que le cuesta $18.00 la yarda cuadrada. Si vende la yarda cuadrada por $30, ¿cuál es su tasa de ganancia con base en el precio de venta?

80. Brad tiene calificaciones de 88, 92, 93 y 89 en sus primeros cuatro exámenes de álgebra. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para alcanzar un promedio mejor que 90 para los cinco exámenes?

81. Suponga que el área de un cuadrado es la mitad del área de un triángulo. Un lado del triángulo mide 16 pulgadas de largo y la altura de dicho lado es la misma longitud que un lado del cuadrado. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

82. Un rectángulo tiene el doble de largo que de ancho, y su área es de 98 metros cuadrados. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

83. Una habitación contiene 96 sillas. El número de sillas por hilera es cuatro más que el número de hileras. Encuentre el número de hileras y el número de sillas por hilera.

84. Un cateto de un triángulo recto es 3 pies más largo que el otro cateto. La hipotenusa mide 3 pies más que el cateto más largo. Encuentre las longitudes de los tres lados del triángulo recto.

4

Expresiones racionales

Con frecuencia las computadoras trabajan en conjunto para compilar grandes tareas de procesamiento. Los números racionales se usan para expresar la tasa de rapidez de procesamiento de una computadora.

Pat tarda 12 horas en completar una tarea. Después de trabajar en esta tarea durante 3 horas, Liam se une a su hermano y juntos terminan la tarea en 5 horas. ¿Cuánto tardaría Liam en hacer la tarea? Puede usar la **ecuación fraccionaria** $\frac{5}{12} + \frac{5}{h} = \frac{3}{4}$ para determinar que Liam podría hacer toda la tarea en 15 horas.

Las expresiones racionales son al álgebra lo que los números racionales son a la aritmética. La mayor parte del trabajo que se realizará con expresiones racionales en este capítulo es equivalente al trabajo que anteriormente realizó con fracciones aritméticas. Las mismas propiedades básicas que se usan para explicar la reducción, suma, resta, multiplicación y división de fracciones aritméticas servirán como base para el trabajo con expresiones racionales. Las técnicas de factorización que estudió en el capítulo 3 también jugarán un importante papel. Al final de este capítulo trabajará con algunas ecuaciones fraccionarias que contienen expresiones racionales.

4.1 Simplificación de expresiones racionales

En el capítulo 1 se revisaron las operaciones básicas con números racionales en un escenario informal. En esta revisión se dependió principalmente de su conocimiento de la aritmética. En este momento se quiere ser un poco más formal con la revisión, de modo que es posible usar el trabajo con números racionales como una base para operar con expresiones racionales. Más adelante se definirá una expresión racional.

Recordará que cualquier número que se pueda escribir en la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y $b \neq 0$ se llama número racional. Los siguientes son ejemplos de números racionales.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{15}{7} \qquad \frac{-5}{6} \qquad \frac{7}{-8} \qquad \frac{-12}{-17}$$

Números tales como 6, $-4, 0, 4\frac{1}{2}, 0.7$ y 0.21 también son racionales, porque se expresan como el cociente indicado de dos enteros. Por ejemplo,

$$6 = \frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} \text{ etcétera} \qquad 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$-4 = \frac{4}{-1} = \frac{-4}{1} = \frac{8}{-2} \text{ etcétera} \qquad 0.7 = \frac{7}{10}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} \text{ etcétera} \qquad 0.21 = \frac{21}{100}$$

Puesto que un número racional es el cociente de dos enteros, el trabajo previo con división de enteros ayuda a comprender las diversas formas de los números racionales. Si los signos del numerador y del denominador son diferentes, entonces el número racional es negativo. Si los signos del numerador y del denominador son iguales, entonces el número racional es positivo. Los siguientes ejemplos y la propiedad 4.1 muestran las formas equivalentes de números racionales. Por lo general, es preferible expresar el denominador de un número racional como un entero positivo.

$$\frac{8}{-2} = \frac{-8}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \qquad \frac{12}{3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Observe las siguientes propiedades generales.

Propiedad 4.1

1. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$
2. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$

Por tanto, un número racional como $\frac{-2}{5}$ también se puede escribir como $\frac{2}{-5}$ o $-\frac{2}{5}$.

Use la siguiente propiedad, que con frecuencia se conoce como **principio fundamental de las fracciones**, para reducir fracciones a términos menores o expresar las fracciones en forma más simple o forma reducida.

Propiedad 4.2

Si b y k son enteros distintos de cero y a es cualquier entero, entonces

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$$

Aplique las propiedades 4.1 y 4.2 a los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Reduzca $\frac{18}{24}$ a términos menores.

Solución

$$\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$ ■

EJEMPLO 2

Cambie $\frac{40}{48}$ a una forma más simple.

Solución

$$\frac{\overset{5}{\cancel{40}}}{\underset{6}{\cancel{48}}} = \frac{5}{6}$$

Un factor común de 8 se dividió entre el numerador y el denominador. ■

EJEMPLO 3

Exprese $\frac{-36}{63}$ en forma reducida.

Solución

$$\frac{-36}{63} = -\frac{36}{63} = -\frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} = -\frac{4}{7}$$ ■

EJEMPLO 4

Reduzca $\frac{72}{-90}$ a una forma más simple.

Solución

$$\frac{72}{-90} = -\frac{72}{90} = -\frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = -\frac{4}{5}$$ ■

Advierta la diferente terminología que se usó en los ejemplos 1-4. Sin importar la terminología, tenga en mente que el número no cambia, pero la forma de la representación numérica del número sí. En el ejemplo 1, $\frac{18}{24}$ y $\frac{3}{4}$ son fracciones equivalentes; nombran al mismo número. Note también el uso de factores primos en el ejemplo 4.

Expresiones racionales

Una **expresión racional** es el cociente indicado de dos polinomios. Los siguientes son ejemplos de expresiones racionales.

$$\frac{3x^2}{5} \qquad \frac{x-2}{x+3} \qquad \frac{x^2+5x-1}{x^2-9} \qquad \frac{xy^2+x^2y}{xy} \qquad \frac{a^3-3a^2-5a-1}{a^4+a^3+6}$$

Puesto que se debe evitar la división entre cero, ningún valor que cree un denominador de cero se puede asignar a las variables. Por ende, la expresión racional, $\frac{x-2}{x+3}$ es significativa para todos los valores de x, excepto $x = -3$. En lugar de realizar restricciones para cada expresión individual, simplemente se supondrá que todos los denominadores representan números reales distintos de cero.

La propiedad 4.2 $\left(\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}\right)$ sirve como base para simplificar expresiones racionales, así lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 5

Simplifique $\frac{15xy}{25y}$

Solución

$$\frac{15xy}{25y} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{y}} = \frac{3x}{5}$$ ■

EJEMPLO 6

Simplifique $\frac{-9}{18x^2y}$

Solución

$$\frac{-9}{18x^2y} = -\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{18}}x^2y} = -\frac{1}{2x^2y}$$

Un factor común de 9 se dividió entre numerador y denominador. ■

EJEMPLO 7

Simplifique $\frac{-28a^2b^2}{-63a^2b^3}$

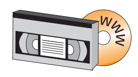
Solución

$$\frac{-28a^2b^2}{-63a^2b^3} = \frac{4 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{b^2}}{9 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{a^2} \cdot \underset{b}{\cancel{b^3}}} = \frac{4}{9b}$$ ■

Las técnicas de factorización del capítulo 3 se pueden usar para factorizar numeradores y/o denominadores, de modo que es posible aplicar la propiedad $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$. Los ejemplos 8-12 clarifican este proceso.

EJEMPLO 8

Simplifique $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}$



Solución

$$\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16} = \frac{x(\cancel{x + 4})}{(x - 4)(\cancel{x + 4})} = \frac{x}{x - 4}$$ ■

EJEMPLO 9

Simplifique $\frac{4a^2 + 12a + 9}{2a + 3}$

Solución

$$\frac{4a^2 + 12a + 9}{2a + 3} = \frac{(\cancel{2a + 3})(2a + 3)}{1(\cancel{2a + 3})} = \frac{2a + 3}{1} = 2a + 3$$ ■

EJEMPLO 10

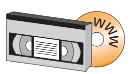
Simplifique $\frac{5n^2 + 6n - 8}{10n^2 - 3n - 4}$

Solución

$$\frac{5n^2 + 6n - 8}{10n^2 - 3n - 4} = \frac{(\cancel{5n - 4})(n + 2)}{(\cancel{5n - 4})(2n + 1)} = \frac{n + 2}{2n + 1}$$ ■

EJEMPLO 11

Simplifique $\frac{6x^3y - 6xy}{x^3 + 5x^2 + 4x}$



Solución

$$\frac{6x^3y - 6xy}{x^3 + 5x^2 + 4x} = \frac{6xy(x^2 - 1)}{x(x^2 + 5x + 4)} = \frac{6\cancel{x}y(\cancel{x + 1})(x - 1)}{\cancel{x}(\cancel{x + 1})(x + 4)} = \frac{6y(x - 1)}{x + 4}$$ ■

Observe que, en el ejemplo 11, se dejó el numerador de la fracción final en forma factorizada. Esto se hace con frecuencia si están implicadas expresiones distintas a monomios. O $\frac{6y(x - 1)}{x + 4}$ o $\frac{6xy - 6y}{x + 4}$ es una respuesta aceptable.

Recuerde que el cociente de cualquier número real distinto de cero y su opuesto es −1. Por ejemplo, $\frac{6}{-6} = -1$ y $\frac{-8}{8} = -1$. Del mismo modo, el cociente indicado de cualquier polinomio y su opuesto es igual a −1; esto es,

$$\frac{a}{-a} = -1 \quad \text{porque } a \text{ y } -a \text{ son opuestos}$$

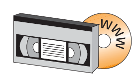
$$\frac{a-b}{b-a} = -1 \quad \text{porque } a-b \text{ y } b-a \text{ son opuestos}$$

$$\frac{x^2-4}{4-x^2} = -1 \quad \text{porque } x^2-4 \text{ y } 4-x^2 \text{ son opuestos}$$

El ejemplo 12 muestra cómo usar esta idea cuando se simplifican expresiones racionales.

EJEMPLO 12

Simplifique $\dfrac{6a^2 - 7a + 2}{10a - 15a^2}$



Solución

$$\frac{6a^2 - 7a + 2}{10a - 15a^2} = \frac{(2a-1)(3a-2)}{5a(2-3a)}$$

$$= (-1)\left(\frac{2a-1}{5a}\right)$$

$$= -\frac{2a-1}{5a} \quad \text{o} \quad \frac{1-2a}{5a}$$

$\frac{3a-2}{2-3a} = -1$

Conjunto de problemas 4.1

Para los problemas 1-8 exprese cada número racional en forma reducida.

1. $\frac{27}{36}$
2. $\frac{14}{21}$
3. $\frac{45}{54}$
4. $\frac{-14}{42}$
5. $\frac{24}{-60}$
6. $\frac{45}{-75}$
7. $\frac{-16}{-56}$
8. $\frac{-30}{-42}$

Para los problemas 9-50 simplifique cada expresión racional.

9. $\frac{12xy}{42y}$
10. $\frac{21xy}{35x}$
11. $\frac{18a^2}{45ab}$
12. $\frac{48ab}{84b^2}$
13. $\frac{-14y^3}{56xy^2}$
14. $\frac{-14x^2y^3}{63xy^2}$
15. $\frac{54c^2d}{-78cd^2}$
16. $\frac{60x^3z}{-64xyz^2}$
17. $\frac{-40x^3y}{-24xy^4}$
18. $\frac{-30x^2y^2z^2}{-35xz^3}$
19. $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
20. $\frac{xy+y^2}{x^2-y^2}$
21. $\frac{18x+12}{12x-6}$
22. $\frac{20x+50}{15x-30}$
23. $\frac{a^2+7a+10}{a^2-7a-18}$
24. $\frac{a^2+4a-32}{3a^2+26a+16}$

25. $\dfrac{2n^2 + n - 21}{10n^2 + 33n - 7}$

26. $\dfrac{4n^2 - 15n - 4}{7n^2 - 30n + 8}$

27. $\dfrac{5x^2 + 7}{10x}$

28. $\dfrac{12x^2 + 11x - 15}{20x^2 - 23x + 6}$

29. $\dfrac{6x^2 + x - 15}{8x^2 - 10x - 3}$

30. $\dfrac{4x^2 + 8x}{x^3 + 8}$

31. $\dfrac{3x^2 - 12x}{x^3 - 64}$

32. $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{6x^2 - 37x - 35}$

33. $\dfrac{3x^2 + 17x - 6}{9x^2 - 6x + 1}$

34. $\dfrac{9y^2 - 1}{3y^2 + 11y - 4}$

35. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 14x}{x^2y + 7xy - 18y}$

36. $\dfrac{3x^3 + 12x}{9x^2 + 18x}$

37. $\dfrac{5y^2 + 22y + 8}{25y^2 - 4}$

38. $\dfrac{16x^3y + 24x^2y^2 - 16xy^3}{24x^2y + 12xy^2 - 12y^3}$

39. $\dfrac{15x^3 - 15x^2}{5x^3 + 5x}$

40. $\dfrac{5n^2 + 18n - 8}{3n^2 + 13n + 4}$

41. $\dfrac{4x^2y + 8xy^2 - 12y^3}{18x^3y - 12x^2y^2 - 6xy^3}$

42. $\dfrac{3 + x - 2x^2}{2 + x - x^2}$

43. $\dfrac{3n^2 + 16n - 12}{7n^2 + 44n + 12}$

44. $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 15}{2x^4 + 9x^2 + 9}$

45. $\dfrac{8 + 18x - 5x^2}{10 + 31x + 15x^2}$

46. $\dfrac{6x^4 - 11x^2 + 4}{2x^4 + 17x^2 - 9}$

47. $\dfrac{27x^4 - x}{6x^3 + 10x^2 - 4x}$

48. $\dfrac{64x^4 + 27x}{12x^3 - 27x^2 - 27x}$

49. $\dfrac{-40x^3 + 24x^2 + 16x}{20x^3 + 28x^2 + 8x}$

50. $\dfrac{-6x^3 - 21x^2 + 12x}{-18x^3 - 42x^2 + 120x}$

Para los problemas 51-58 simplifique cada expresión racional. Necesitará usar factorización por agrupamiento.

51. $\dfrac{xy + ay + bx + ab}{xy + ay + cx + ac}$

52. $\dfrac{xy + 2y + 3x + 6}{xy + 2y + 4x + 8}$

53. $\dfrac{ax - 3x + 2ay - 6y}{2ax - 6x + ay - 3y}$

54. $\dfrac{x^2 - 2x + ax - 2a}{x^2 - 2x + 3ax - 6a}$

55. $\dfrac{5x^2 + 5x + 3x + 3}{5x^2 + 3x - 30x - 18}$

56. $\dfrac{x^2 + 3x + 4x + 12}{2x^2 + 6x - x - 3}$

57. $\dfrac{2st - 30 - 12s + 5t}{3st - 6 - 18s + t}$

58. $\dfrac{nr - 6 - 3n + 2r}{nr + 10 + 2r + 5n}$

Para los problemas 59-68 simplifique cada expresión racional. Tal vez quiera consultar el ejemplo 12 de esta sección.

59. $\dfrac{5x - 7}{7 - 5x}$

60. $\dfrac{4a - 9}{9 - 4a}$

61. $\dfrac{n^2 - 49}{7 - n}$

62. $\dfrac{9 - y}{y^2 - 81}$

63. $\dfrac{2y - 2xy}{x^2y - y}$

64. $\dfrac{3x - x^2}{x^2 - 9}$

65. $\dfrac{2x^3 - 8x}{4x - x^3}$

66. $\dfrac{x^2 - (y - 1)^2}{(y - 1)^2 - x^2}$

67. $\dfrac{n^2 - 5n - 24}{40 + 3n - n^2}$

68. $\dfrac{x^2 + 2x - 24}{20 - x - x^2}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

69. Compare el concepto de un número racional en aritmética, con el concepto de una expresión racional en álgebra.

70. ¿Qué papel juega la factorización en la simplificación de expresiones racionales?

71. ¿Por qué la expresión racional $\dfrac{x + 3}{x^2 - 4}$ es indefinida para $x = 2$ y $x = -2$, pero definida para $x = -3$?

72. ¿Cómo convencería a alguien de que $\dfrac{x - 4}{4 - x} = -1$ para todo número real, excepto 4?

4.2 Multiplicación y división de expresiones racionales

La multiplicación de números racionales en forma de fracción común se define del modo siguiente:

Definición 4.1

Si a, b, c y d son enteros, y b y d no son iguales a cero, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Para multiplicar números racionales en forma de fracción común, simplemente **multiplique numeradores y multiplique denominadores**, como demuestran los siguientes ejemplos. (Los pasos en los recuadros con línea discontinua por lo general se realizan mentalmente.)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \boxed{\frac{-3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{-15}{28}} = -\frac{15}{28}$$

$$-\frac{5}{6} \cdot \frac{13}{3} = \boxed{\frac{-5}{6} \cdot \frac{13}{3} = \frac{-5 \cdot 13}{6 \cdot 3} = \frac{-65}{18}} = -\frac{65}{18}$$

También se tiene la convención, cuando se multiplican números racionales, de expresar el producto final en forma reducida. Los siguientes ejemplos muestran un formato diferente utilizado para multiplicar y simplificar números racionales.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{3}{4}$$

Un factor común de 9 se dividió entre 9 y 27 y un factor común de 8 se dividió entre 8 y 32.

$$\left(-\frac{28}{25}\right)\left(-\frac{65}{78}\right) = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{13}}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{13}} = \frac{14}{15}$$

Debe reconocer que un negativo por un negativo es positivo. Además, note el uso de factores primos para auxiliarse a reconocer factores comunes.

La multiplicación de expresiones racionales sigue el mismo patrón básico que la multiplicación de números racionales en forma de fracción común. Es decir, se multiplican numeradores y denominadores y el producto final se expresa en forma simplificada o reducida. Considere algunos ejemplos.

$$\frac{3x}{4y}\cdot\frac{8y^2}{9x}=\frac{\cancel{3}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}\cdot\cancel{x}\cdot\overset{y}{\cancel{y^2}}}{\cancel{4}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}}=\frac{2y}{3}$$

Note que se usa la propiedad conmutativa de la multiplicación para reordenar los factores en una forma que permita identificar factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{-4a}{6a^2b^2}\cdot\frac{9ab}{12a^2}=-\frac{\cancel{4}\cdot\overset{\cancel{3}}{\cancel{9}}\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{b}}{\underset{2}{\cancel{6}}\cdot\underset{\cancel{3}}{\cancel{12}}\cdot\underset{a^2}{\cancel{a^4}}\cdot\underset{b}{\cancel{b^2}}}=-\frac{1}{2a^2b}$$

$$\frac{12x^2y}{-18xy}\cdot\frac{-24xy^2}{56y^3}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\overset{\cancel{3}}{\cancel{24}}\cdot\overset{x^2}{\cancel{x^3}}\cdot\cancel{y^3}}{\underset{\cancel{3}}{\cancel{18}}\cdot\underset{7}{\cancel{56}}\cdot\cancel{x}\cdot\underset{y}{\cancel{y^4}}}=\frac{2x^2}{7y}$$

Debe reconocer que la primera fracción es equivalente a $-\frac{12x^2y}{18xy}$ y la segunda a $-\frac{24xy^2}{56y^3}$; por ende, el producto es positivo.

Si las expresiones racionales contienen polinomios (distintos a monomios) que son factorizables, entonces el trabajo puede tomar el siguiente formato.

EJEMPLO 1

Multiplique y simplifique $\frac{y}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{y^2}$

Solución

$$\frac{y}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{y^2}=\frac{\cancel{y}\cancel{(x+2)}}{\underset{y}{\cancel{y^2}}\cancel{(x+2)}(x-2)}=\frac{1}{y(x-2)}$$

■

En el ejemplo 1 note que se combinaron los pasos de multiplicar numeradores y denominadores, y se factorizaron los polinomios. Advierta también que la respuesta final se dejó en forma factorizada $\frac{1}{y(x-2)}$ o $\frac{1}{xy-2y}$ sería una respuesta aceptable.

EJEMPLO 2

Multiplique y simplifique $\frac{x^2-x}{x+5}\cdot\frac{x^2+5x+4}{x^4-x^2}$

Solución

$$\frac{x^2-x}{x+5}\cdot\frac{x^2+5x+4}{x^4-x^2}=\frac{x(x-1)}{x+5}\cdot\frac{(x+1)(x+4)}{x^2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{\cancel{x}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}(x+4)}{(x+5)\underset{x}{\cancel{(x^2)}}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}=\frac{x+4}{x(x+5)}$$

■

EJEMPLO 3

Multiplique y simplifique $\dfrac{6n^2 + 7n - 5}{n^2 + 2n - 24} \cdot \dfrac{4n^2 + 21n - 18}{12n^2 + 11n - 15}$

Solución

$$\frac{6n^2 + 7n - 5}{n^2 + 2n - 24} \cdot \frac{4n^2 + 21n - 18}{12n^2 + 11n - 15}$$
$$= \frac{\cancel{(3n + 5)}(2n - 1)\cancel{(4n - 3)}\cancel{(n + 6)}}{\cancel{(n + 6)}(n - 4)\cancel{(3n + 5)}\cancel{(4n - 3)}} = \frac{2n - 1}{n - 4}$$

■

División de expresiones racionales

La división de números racionales en forma de fracción común se define del modo siguiente:

Definición 4.2

Si a, b, c y d son enteros, y b, c y d no son iguales a cero, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

La definición 4.2 afirma que, para dividir dos números racionales en forma de fracción, **se invierte el divisor y se multiplica**. A los números $\frac{c}{d}$ y $\frac{d}{c}$ se les llama "recíprocos" o "inversos multiplicativos" uno de otro, porque su producto es 1. Por ende, se puede describir la división al decir "para dividir entre una fracción, multiplique por su recíproco". Los siguientes ejemplos demuestran el uso de la definición 4.2.

$$\frac{7}{8} \div \frac{5}{6} = \frac{7}{\underset{4}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5} = \frac{21}{20}, \qquad \frac{-5}{9} \div \frac{15}{18} = -\frac{\cancel{5}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{14}{-19} \div \frac{21}{-38} = \left(-\frac{14}{19}\right) \div \left(-\frac{21}{38}\right) = \left(-\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\cancel{19}}\right)\left(-\frac{\overset{2}{\cancel{38}}}{\underset{3}{\cancel{21}}}\right) = \frac{4}{3}$$

La división de expresiones racionales algebraicas se define en la misma forma que se define la división de números racionales. Esto es, el cociente de dos expresiones racionales es el producto que se obtiene cuando multiplica la primera expresión por el recíproco de la segunda. Considere los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 4

Divida y simplifique $\dfrac{16x^2y}{24xy^3} \div \dfrac{9xy}{8x^2y^2}$

Solución

$$\frac{16x^2y}{24xy^3} \div \frac{9xy}{8x^2y^2} = \frac{16x^2y}{24xy^3} \cdot \frac{8x^2y^2}{9xy} = \frac{16 \cdot \cancel{8} \cdot \overset{x^2}{\cancel{x^4}} \cdot \cancel{y^3}}{\underset{3}{\cancel{24}} \cdot 9 \cdot \cancel{x^2} \cdot \underset{y}{\cancel{y^4}}} = \frac{16x^2}{27y}$$

■

EJEMPLO 5

Divida y simplifique $\dfrac{3a^2 + 12}{3a^2 - 15a} \div \dfrac{a^4 - 16}{a^2 - 3a - 10}$

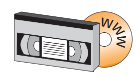
Solución

$$\begin{aligned}\frac{3a^2 + 12}{3a^2 - 15a} \div \frac{a^4 - 16}{a^2 - 3a - 10} &= \frac{3a^2 + 12}{3a^2 - 15a} \cdot \frac{a^2 - 3a - 10}{a^4 - 16}\\ &= \frac{3(a^2 + 4)}{3a(a - 5)} \cdot \frac{(a - 5)(a + 2)}{(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2)}\\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cancel{(a^2 + 4)}\cancel{(a - 5)}\cancel{(a + 2)}}{\underset{1}{\cancel{3}}a\cancel{(a - 5)}\cancel{(a^2 + 4)}\cancel{(a + 2)}(a - 2)}\\ &= \frac{1}{a(a - 2)}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

Divida y simplifique $\dfrac{28t^3 - 51t^2 - 27t}{49t^2 + 42t + 9} \div (4t - 9)$



Solución

$$\begin{aligned}\frac{28t^3 - 51t^2 - 27t}{49t^2 + 42t + 9} \div \frac{4t - 9}{1} &= \frac{28t^3 - 51t^2 - 27t}{49t^2 + 42t + 9} \cdot \frac{1}{4t - 9}\\ &= \frac{t(7t + 3)(4t - 9)}{(7t + 3)(7t + 3)} \cdot \frac{1}{(4t - 9)}\\ &= \frac{t\cancel{(7t + 3)}\cancel{(4t - 9)}}{\cancel{(7t + 3)}(7t + 3)\cancel{(4t - 9)}}\\ &= \frac{t}{7t + 3}\end{aligned}$$

■

En un problema como el del ejemplo 6 puede ser útil escribir el divisor con un denominador de 1. Por ende, $4t - 9$ se escribe como $\dfrac{4t - 9}{1}$; obviamente, su recíproco es $\dfrac{1}{4t - 9}$.

Considere un ejemplo final que implica tanto multiplicación como división.

EJEMPLO 7

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

$$\frac{x^2 + 5x}{3x^2 - 4x - 20} \cdot \frac{x^2y + y}{2x^2 + 11x + 5} \div \frac{xy^2}{6x^2 - 17x - 10}$$

Solución

$$\frac{x^2+5x}{3x^2-4x-20}\cdot\frac{x^2y+y}{2x^2+11x+5}\div\frac{xy^2}{6x^2-17x-10}$$

$$=\frac{x^2+5x}{3x^2-4x-20}\cdot\frac{x^2y+y}{2x^2+11x+5}\cdot\frac{6x^2-17x-10}{xy^2}$$

$$=\frac{x(x+5)}{(3x-10)(x+2)}\cdot\frac{y(x^2+1)}{(2x+1)(x+5)}\cdot\frac{(2x+1)(3x-10)}{xy^2}$$

$$=\frac{\cancel{x}(\cancel{x+5})(\cancel{y})(x^2+1)(\cancel{2x+1})(\cancel{3x-10})}{(\cancel{3x-10})(x+2)(\cancel{2x+1})(\cancel{x+5})(\cancel{x})(\underset{y}{\cancel{y^2}})}=\frac{x^2+1}{y(x+2)}$$ ■

Conjunto de problemas 4.2

Para los problemas 1-12 realice las operaciones indicadas que implican números racionales. Exprese las respuestas finales en forma reducida.

1. $\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{35}$
2. $\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{20}$
3. $\frac{-4}{9}\cdot\frac{18}{30}$
4. $\frac{-6}{9}\cdot\frac{36}{48}$
5. $\frac{3}{-8}\cdot\frac{-6}{12}$
6. $\frac{-12}{16}\cdot\frac{18}{-32}$
7. $\left(-\frac{5}{7}\right)\div\frac{6}{7}$
8. $\left(-\frac{5}{9}\right)\div\frac{10}{3}$
9. $\frac{-9}{5}\div\frac{27}{10}$
10. $\frac{4}{7}\div\frac{16}{-21}$
11. $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{11}\div\frac{4}{15}$
12. $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\div\frac{8}{3}$

Para los problemas 13-50 realice las operaciones indicadas que implican expresiones racionales. Exprese las respuestas finales en forma más simple.

13. $\frac{6xy}{9y^4}\cdot\frac{30x^3y}{-48x}$
14. $\frac{-14xy^4}{18y^2}\cdot\frac{24x^2y^3}{35y^2}$
15. $\frac{5a^2b^2}{11ab}\cdot\frac{22a^3}{15ab^2}$
16. $\frac{10a^2}{5b^2}\cdot\frac{15b^3}{2a^4}$
17. $\frac{5xy}{8y^2}\cdot\frac{18x^2y}{15}$
18. $\frac{4x^2}{5y^2}\cdot\frac{15xy}{24x^2y^2}$
19. $\frac{5x^4}{12x^2y^3}\div\frac{9}{5xy}$
20. $\frac{7x^2y}{9xy^3}\div\frac{3x^4}{2x^2y^2}$
21. $\frac{9a^2c}{12bc^2}\div\frac{21ab}{14c^3}$
22. $\frac{3ab^3}{4c}\div\frac{21ac}{12bc^3}$
23. $\frac{9x^2y^3}{14x}\cdot\frac{21y}{15xy^2}\cdot\frac{10x}{12y^3}$
24. $\frac{5xy}{7a}\cdot\frac{14a^2}{15x}\cdot\frac{3a}{8y}$
25. $\frac{3x+6}{5y}\cdot\frac{x^2+4}{x^2+10x+16}$
26. $\frac{5xy}{x+6}\cdot\frac{x^2-36}{x^2-6x}$
27. $\frac{5a^2+20a}{a^3-2a^2}\cdot\frac{a^2-a-12}{a^2-16}$
28. $\frac{2a^2+6}{a^2-a}\cdot\frac{a^3-a^2}{8a-4}$
29. $\frac{3n^2+15n-18}{3n^2+10n-48}\cdot\frac{6n^2-n-40}{4n^2+6n-10}$
30. $\frac{6n^2+11n-10}{3n^2+19n-14}\cdot\frac{2n^2+6n-56}{2n^2-3n-20}$
31. $\frac{9y^2}{x^2+12x+36}\div\frac{12y}{x^2+6x}$
32. $\frac{7xy}{x^2-4x+4}\div\frac{14y}{x^2-4}$
33. $\frac{x^2-4xy+4y^2}{7xy^2}\div\frac{4x^2-3xy-10y^2}{20x^2y+25xy^2}$
34. $\frac{x^2+5xy-6y^2}{xy^2-y^3}\cdot\frac{2x^2+15xy+18y^2}{xy+4y^2}$

35. $\frac{5 - 14n - 3n^2}{1 - 2n - 3n^2} \cdot \frac{9 + 7n - 2n^2}{27 - 15n + 2n^2}$

36. $\frac{6 - n - 2n^2}{12 - 11n + 2n^2} \cdot \frac{24 - 26n + 5n^2}{2 + 3n + n^2}$

37. $\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^4 + 14x^2 - 5} \cdot \frac{x^4 - 2x^2 - 35}{x^4 - 17x^2 + 70}$

38. $\frac{2x^4 + x^2 - 3}{2x^4 + 5x^2 + 2} \cdot \frac{3x^4 + 10x^2 + 8}{3x^4 + x^2 - 4}$

39. $\frac{3x^2 - 20x + 25}{2x^2 - 7x - 15} \div \frac{9x^2 - 3x - 20}{12x^2 + 28x + 15}$

40. $\frac{21t^2 + t - 2}{2t^2 - 17t - 9} \div \frac{12t^2 - 5t - 3}{8t^2 - 2t - 3}$

41. $\frac{10t^3 + 25t}{20t + 10} \cdot \frac{2t^2 - t - 1}{t^5 - t}$

42. $\frac{t^4 - 81}{t^2 - 6t + 9} \cdot \frac{6t^2 - 11t - 21}{5t^2 + 8t - 21}$

43. $\frac{4t^2 + t - 5}{t^3 - t^2} \cdot \frac{t^4 + 6t^3}{16t^2 + 40t + 25}$

44. $\frac{9n^2 - 12n + 4}{n^2 - 4n - 32} \cdot \frac{n^2 + 4n}{3n^3 - 2n^2}$

45. $\frac{nr + 3n + 2r + 6}{nr + 3n - 3r - 9} \cdot \frac{n^2 - 9}{n^3 - 4n}$

46. $\frac{xy + xc + ay + ac}{xy - 2xc + ay - 2ac} \cdot \frac{2x^3 - 8x}{12x^3 + 20x^2 - 8x}$

47. $\frac{x^2 - x}{4y} \cdot \frac{10xy^2}{2x - 2} \div \frac{3x^2 + 3x}{15x^2y^2}$

48. $\frac{4xy^2}{7x} \cdot \frac{14x^3y}{12y} \div \frac{7y}{9x^3}$

49. $\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{6a^2 - 4ab} \cdot \frac{3a^2 + 5ab - 2b^2}{6a^2 + ab - b^2} \div \frac{a^2 - 4b^2}{8a + 4b}$

50. $\frac{2x^2 + 3x}{2x^3 - 10x^2} \cdot \frac{x^2 - 8x + 15}{3x^3 - 27x} \div \frac{14x + 21}{x^2 - 6x - 27}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

51. Explique con sus propias palabras cómo dividir dos expresiones racionales.

52. Suponga que su amiga falta a clase el día que se estudia el material de esta sección. ¿Cómo podría apelar a sus antecedentes aritméticos para explicarle cómo multiplicar y dividir expresiones racionales?

53. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolver el siguiente problema de multiplicación.

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8} \cdot \frac{x^2 - 16}{16 - x^2}$$

4.3 Suma y resta de expresiones racionales

La suma y la resta de números racionales se definen del modo siguiente:

Definición 4.3

Si a, b y c son enteros, y b no es cero, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$ Suma

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$ Resta

Se pueden sumar o restar números racionales con un denominador común, al sumar o restar los numeradores y colocar el resultado sobre el denominador común. Los siguientes ejemplos ilustran la definición 4.3.

$$\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{2+3}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$ ¡No olvide reducir!

$$\frac{4}{6}+\frac{-5}{6}=\frac{4+(-5)}{6}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{7}{10}+\frac{4}{-10}=\frac{7}{10}+\frac{-4}{10}=\frac{7+(-4)}{10}=\frac{3}{10}$$

Este mismo enfoque de *común denominador* se usa cuando se suman o restan expresiones racionales, como en los siguientes ejemplos.

$$\frac{3}{x}+\frac{9}{x}=\frac{3+9}{x}=\frac{12}{x}$$

$$\frac{8}{x-2}-\frac{3}{x-2}=\frac{8-3}{x-2}=\frac{5}{x-2}$$

$$\frac{9}{4y}+\frac{5}{4y}=\frac{9+5}{4y}=\frac{14}{4y}=\frac{7}{2y}$$ ¡No olvide simplificar la respuesta final!

$$\frac{n^2}{n-1}-\frac{1}{n-1}=\frac{n^2-1}{n-1}=\frac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{\cancel{n-1}}=n+1$$

$$\frac{6a^2}{2a+1}+\frac{13a+5}{2a+1}=\frac{6a^2+13a+5}{2a+1}=\frac{\cancel{(2a+1)}(3a+5)}{\cancel{2a+1}}=3a+5$$

En cada uno de los ejemplos anteriores que implican expresiones racionales, técnicamente debe restringir las variables para excluir la división entre cero. Por ejemplo, $\frac{3}{x}+\frac{9}{x}=\frac{12}{x}$ es cierto para todos los valores de número real para x, excepto $x=0$. Del mismo modo, $\frac{8}{x-2}-\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x-2}$, en tanto x no sea igual a 2. En lugar de tomar tiempo y espacio para escribir restricciones para cada problema, simplemente se supondrá que tales restricciones existen.

Si se van a sumar o restar números racionales que no tienen común denominador, entonces se aplica el principio fundamental de las fracciones $\left(\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}\right)$ para obtener fracciones equivalentes con un común denominador. Fracciones equiva-

lentes son las fracciones como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ que nombran al mismo número. Considere el siguiente ejemplo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

$\left(\frac{1}{2}\text{ y }\frac{3}{6}\right.$ son fracciones equivalentes.$\left.\right)$ $\left(\frac{1}{3}\text{ y }\frac{2}{6}\right.$ son fracciones equivalentes.$\left.\right)$

Note que se eligió 6 como el común denominador, y 6 es el **mínimo común denominador** de los denominadores originales 2 y 3. (El mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros positivos es el menor número entero positivo distinto de cero divisible entre cada uno de los números.) En general, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones a sumar o restar se usa como un **mínimo común denominador** (MCD).

Un mínimo común denominador se puede encontrar por inspección o con el uso de las formas factorizadas primas de los números. Considere algunos ejemplos y use cada una de estas técnicas.

EJEMPLO 1

Reste $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$

Solución

Por inspección, puede ver que el MCD es 24. Por tanto, ambas fracciones pueden cambiar a fracciones equivalentes, cada una con un denominador de 24.

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$$

Forma de 1 Forma de 1

■

En el ejemplo 1 note que el principio fundamental de las fracciones, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ se puede escribir como $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{k}{k}\right)$. Esta última forma enfatiza el hecho de que 1 es el elemento identidad de la multiplicación.

EJEMPLO 2

Realice las operaciones indicadas: $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} - \frac{13}{15}$

Solución

De nuevo, por inspección, puede determinar que el MCD es 30. En consecuencia, se puede proceder del modo siguiente:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{6} - \frac{13}{15} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{5}\right) - \left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{18}{30} + \frac{5}{30} - \frac{26}{30} = \frac{18 + 5 - 26}{30}$$

$$= \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10}$$ ¡No olvide reducir! ■

EJEMPLO 3

Sume $\frac{7}{18} + \frac{11}{24}$

Solución

Use las formas factorizadas primas de los denominadores para auxiliarse a encontrar el MCD.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \qquad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

El MCD debe contener tres factores de 2 porque 24 contiene tres 2. El MCD también debe contener dos factores de 3, porque 18 tiene dos 3. Por tanto, el MCD $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. Ahora se puede proceder como es usual.

$$\frac{7}{18} + \frac{11}{24} = \left(\frac{7}{18}\right)\left(\frac{4}{4}\right) + \left(\frac{11}{24}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{28}{72} + \frac{33}{72} = \frac{61}{72}$$ ■

Para sumar y restar expresiones racionales con diferentes denominadores, siga la misma rutina básica que sigue cuando suma o resta números racionales con diferentes denominadores. Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos y note la similitud con los trabajos anteriores con números racionales.

EJEMPLO 4

Sume $\frac{x + 2}{4} + \frac{3x + 1}{3}$

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es 12.

$$\frac{x + 2}{4} + \frac{3x + 1}{3} = \left(\frac{x + 2}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3x + 1}{3}\right)\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$= \frac{3(x+2)}{12} + \frac{4(3x+1)}{12}$$

$$= \frac{3(x+2)+4(3x+1)}{12}$$

$$= \frac{3x+6+12x+4}{12}$$

$$= \frac{15x+10}{12}$$ ■

Note el resultado final en el ejemplo 4. El numerador, $15x + 10$, podría factorizarse como $5(3x + 2)$. Sin embargo, puesto que esto no produce factores comunes con el denominador, la fracción no se puede simplificar. Por ende, la respuesta final puede quedar como $\frac{15x+10}{12}$. También sería aceptable expresarla como $\frac{5(3x+2)}{12}$.

EJEMPLO 5

Reste $\frac{a-2}{2} - \frac{a-6}{6}$

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es 6.

$$\frac{a-2}{2} - \frac{a-6}{6} = \left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{a-6}{6}$$

$$= \frac{3(a-2)}{6} - \frac{a-6}{6}$$

$$= \frac{3(a-2)-(a-6)}{6}$$

¡Tenga cuidado con este signo mientras avanza al siguiente paso!

$$= \frac{3a-6-a+6}{6}$$

$$= \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$$

No olvide simplificar. ■

EJEMPLO 6

Realice las operaciones indicadas: $\frac{x+3}{10} + \frac{2x+1}{15} - \frac{x-2}{18}$

Solución

Si no puede determinar el MCD por inspección, entonces use las formas factorizadas primas de los denominadores.

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

El MCD debe contener un factor de 2, dos factores de 3 y un factor de 5. Por tanto, el MCD es $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{10}+\frac{2x+1}{15}-\frac{x-2}{18} &= \left(\frac{x+3}{10}\right)\left(\frac{9}{9}\right)+\left(\frac{2x+1}{15}\right)\left(\frac{6}{6}\right)-\left(\frac{x-2}{18}\right)\left(\frac{5}{5}\right)\\ &= \frac{9(x+3)}{90}+\frac{6(2x+1)}{90}-\frac{5(x-2)}{90}\\ &= \frac{9(x+3)+6(2x+1)-5(x-2)}{90}\\ &= \frac{9x+27+12x+6-5x+10}{90}\\ &= \frac{16x+43}{90}\end{aligned}$$

■

Un denominador que contenga variables no crea una dificultad seria; el método sigue siendo básicamente el mismo.

EJEMPLO 7

Sume $\frac{3}{2x}+\frac{5}{3y}$

Solución

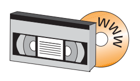
Con un MCD de $6xy$ se puede proceder del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2x}+\frac{5}{3y} &= \left(\frac{3}{2x}\right)\left(\frac{3y}{3y}\right)+\left(\frac{5}{3y}\right)\left(\frac{2x}{2x}\right)\\ &= \frac{9y}{6xy}+\frac{10x}{6xy}\\ &= \frac{9y+10x}{6xy}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8

Reste $\frac{7}{12ab}-\frac{11}{15a^2}$



Solución

Puede usar factorización prima en los coeficientes numéricos de los denominadores para ayudarse a encontrar el MCD.

$$\left.\begin{aligned}12ab &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b\\ 15a^2 &= 3 \cdot 5 \cdot a^2\end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b = 60a^2b$$

$$\frac{7}{12ab} - \frac{11}{15a^2} = \left(\frac{7}{12ab}\right)\left(\frac{5a}{5a}\right) - \left(\frac{11}{15a^2}\right)\left(\frac{4b}{4b}\right)$$

$$= \frac{35a}{60a^2b} - \frac{44b}{60a^2b}$$

$$= \frac{35a - 44b}{60a^2b}$$ ■

EJEMPLO 9

Sume $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{4}{x}$

Solución

Por inspección, el MCD es $x(x - 3)$.

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x} = \left(\frac{x}{x-3}\right)\left(\frac{x}{x}\right) + \left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{x-3}{x-3}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x(x-3)} + \frac{4(x-3)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + 4(x-3)}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 12}{x(x-3)} \quad \text{o} \quad \frac{(x+6)(x-2)}{x(x-3)}$$ ■

EJEMPLO 10

Reste $\dfrac{2x}{x+1} - 3$

Solución

$$\frac{2x}{x+1} - 3 = \frac{2x}{x+1} - 3\left(\frac{x+1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2x}{x+1} - \frac{3(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{2x - 3(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{2x - 3x - 3}{x+1}$$

$$= \frac{-x - 3}{x+1}$$ ■

Conjunto de problemas 4.3

Para los problemas 1-12 realice las operaciones indicadas que implican números racionales. Asegúrese de expresar sus respuestas en forma reducida.

1. $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{5} + \frac{1}{6}$
3. $\frac{7}{8} - \frac{3}{5}$
4. $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$
5. $\frac{6}{5} + \frac{1}{-4}$
6. $\frac{7}{8} + \frac{5}{-12}$
7. $\frac{8}{15} + \frac{3}{25}$
8. $\frac{5}{9} - \frac{11}{12}$
9. $\frac{1}{5} + \frac{5}{6} - \frac{7}{15}$
10. $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} + \frac{1}{4}$
11. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{3}{14}$
12. $\frac{5}{6} - \frac{7}{9} - \frac{3}{10}$

Para los problemas 13-66 sume o reste las expresiones racionales que se indican. Asegúrese de expresar sus respuestas en la forma más simple.

13. $\frac{2x}{x-1} + \frac{4}{x-1}$
14. $\frac{3x}{2x+1} - \frac{5}{2x+1}$
15. $\frac{4a}{a+2} + \frac{8}{a+2}$
16. $\frac{6a}{a-3} - \frac{18}{a-3}$
17. $\frac{3(y-2)}{7y} + \frac{4(y-1)}{7y}$
18. $\frac{2x-1}{4x^2} + \frac{3(x-2)}{4x^2}$
19. $\frac{x-1}{2} + \frac{x+3}{3}$
20. $\frac{x-2}{4} + \frac{x+6}{5}$
21. $\frac{2a-1}{4} + \frac{3a+2}{6}$
22. $\frac{a-4}{6} + \frac{4a-1}{8}$
23. $\frac{n+2}{6} - \frac{n-4}{9}$
24. $\frac{2n+1}{9} - \frac{n+3}{12}$
25. $\frac{3x-1}{3} - \frac{5x+2}{5}$
26. $\frac{4x-3}{6} - \frac{8x-2}{12}$
27. $\frac{x-2}{5} - \frac{x+3}{6} + \frac{x+1}{15}$
28. $\frac{x+1}{4} + \frac{x-3}{6} - \frac{x-2}{8}$
29. $\frac{3}{8x} + \frac{7}{10x}$
30. $\frac{5}{6x} - \frac{3}{10x}$
31. $\frac{5}{7x} - \frac{11}{4y}$
32. $\frac{5}{12x} - \frac{9}{8y}$
33. $\frac{4}{3x} + \frac{5}{4y} - 1$
34. $\frac{7}{3x} - \frac{8}{7y} - 2$
35. $\frac{7}{10x^2} + \frac{11}{15x}$
36. $\frac{7}{12a^2} - \frac{5}{16a}$
37. $\frac{10}{7n} - \frac{12}{4n^2}$
38. $\frac{6}{8n^2} - \frac{3}{5n}$
39. $\frac{3}{n^2} - \frac{2}{5n} + \frac{4}{3}$
40. $\frac{1}{n^2} + \frac{3}{4n} - \frac{5}{6}$
41. $\frac{3}{x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{7}{6x}$
42. $\frac{7}{3x^2} - \frac{9}{4x} - \frac{5}{2x}$
43. $\frac{6}{5t^2} - \frac{4}{7t^3} + \frac{9}{5t^3}$
44. $\frac{5}{7t} + \frac{3}{4t^2} + \frac{1}{14t}$
45. $\frac{5b}{24a^2} - \frac{11a}{32b}$
46. $\frac{9}{14x^2y} - \frac{4x}{7y^2}$
47. $\frac{7}{9xy^3} - \frac{4}{3x} + \frac{5}{2y^2}$
48. $\frac{7}{16a^2b} + \frac{3a}{20b^2}$
49. $\frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x}$
50. $\frac{3x}{x-4} - \frac{2}{x}$
51. $\frac{a-2}{a} - \frac{3}{a+4}$
52. $\frac{a+1}{a} - \frac{2}{a+1}$
53. $\frac{-3}{4n+5} - \frac{8}{3n+5}$
54. $\frac{-2}{n-6} - \frac{6}{2n+3}$
55. $\frac{-1}{x+4} + \frac{4}{7x-1}$
56. $\frac{-3}{4x+3} + \frac{5}{2x-5}$
57. $\frac{7}{3x-5} - \frac{5}{2x+7}$
58. $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{2x-3}$
59. $\frac{5}{3x-2} + \frac{6}{4x+5}$
60. $\frac{3}{2x+1} + \frac{2}{3x+4}$
61. $\frac{3x}{2x+5} + 1$
62. $2 + \frac{4x}{3x-1}$
63. $\frac{4x}{x-5} - 3$
64. $\frac{7x}{x+4} - 2$

65. $-1 - \frac{3}{2x+1}$

66. $-2 - \frac{5}{4x-3}$

67. Recuerde que el cociente indicado de un polinomio y su opuesto es -1. Por ejemplo, $\frac{x-2}{2-x}$ se simplifica a -1. Tenga en mente esta idea mientras suma o resta las siguientes expresiones racionales.

(a) $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1}$

(b) $\frac{3}{2x-3} - \frac{2x}{2x-3}$

(c) $\frac{4}{x-4} - \frac{x}{x-4} + 1$

(d) $-1 + \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-2}$

68. Considere el problema de suma $\frac{8}{x-2} + \frac{5}{2-x}$. Observe que los denominadores son mutuamente opuestos. Si a la segunda fracción se aplica la propiedad $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ se tiene $\frac{5}{2-x} = -\frac{5}{x-2}$. Por tanto, se procede del modo siguiente:

$$\frac{8}{x-2} + \frac{5}{2-x} = \frac{8}{x-2} - \frac{5}{x-2} = \frac{8-5}{x-2} = \frac{3}{x-2}$$

Use este método para resolver los siguientes problemas.

(a) $\frac{7}{x-1} + \frac{2}{1-x}$

(b) $\frac{5}{2x-1} + \frac{8}{1-2x}$

(c) $\frac{4}{a-3} - \frac{1}{3-a}$

(d) $\frac{10}{a-9} - \frac{5}{9-a}$

(e) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x-3}{1-x}$

(f) $\frac{x^2}{x-4} - \frac{3x-28}{4-x}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

69. ¿Cuál es la diferencia entre el concepto de mínimo común múltiplo y el concepto de mínimo común denominador?

70. Una compañera de clase le dice que ella encuentra el mínimo común múltiplo de dos números al elaborar una lista de los múltiplos de cada número y luego elegir el número más pequeño que aparece en ambas listas. ¿Este procedimiento es correcto? ¿Cuál es la debilidad de este procedimiento?

71. ¿Para cuáles números reales $\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x}$ es igual a $\frac{(x+6)(x-2)}{x(x-3)}$? Explique su respuesta.

72. Suponga que su amigo resuelve un problema de suma del modo siguiente:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{5(12) + 8(7)}{8(12)} = \frac{60+56}{96} = \frac{116}{96} = \frac{29}{24}$$

¿Esta respuesta es correcta? Si no, ¿qué consejo le daría a su amigo?

4.4 Más acerca de expresiones racionales y fracciones complejas

En esta sección se incrementa el trabajo con suma y resta de expresiones racionales, y se estudia el proceso de simplificar fracciones complejas. Sin embargo, antes de comenzar, éste parece un momento adecuado para ofrecer un consejo en cuanto a su estudio del álgebra. El éxito en álgebra depende de tener una buena comprensión de los conceptos, así como de poder realizar los diversos cálculos. En cuanto al

trabajo de cálculo, debe adoptar un formato cuidadosamente organizado que muestre tantos pasos como necesite con la finalidad de minimizar las oportunidades de cometer errores por descuido. No se impaciente por encontrar atajos para ciertos cálculos antes de tener una comprensión profunda de los pasos implicados en el proceso. Este consejo es especialmente adecuado al comienzo de esta sección.

Estudie con mucho cuidado los ejemplos 1-4. Note que, para resolver cada problema, se sigue el mismo procedimiento básico:

Paso 1 Factorice los denominadores.

Paso 2 Encuentre el MCD.

Paso 3 Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga el MCD como su denominador.

Paso 4 Combine los numeradores y coloque sobre el MCD.

Paso 5 Simplifique al realizar la suma o resta.

Paso 6 Busque formas de reducir la fracción resultante.

EJEMPLO 1

Sume $\dfrac{8}{x^2 - 4x} + \dfrac{2}{x}$

Solución

$$\frac{8}{x^2 - 4x} + \frac{2}{x} = \frac{8}{x(x-4)} + \frac{2}{x}$$ Factorice los denominadores.

El MCD es $x(x - 4)$. Encuentre el MCD.

$$= \frac{8}{x(x-4)} + \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x-4}{x-4}\right)$$ Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga el MCD como su denominador.

$$= \frac{8 + 2(x-4)}{x(x-4)}$$ Combine numeradores y coloque sobre el MCD.

$$= \frac{8 + 2x - 8}{x(x-4)}$$ Simplifique al realizar la suma o resta.

$$= \frac{2x}{x(x-4)}$$

$$= \frac{2}{x-4}$$ Reduzca. ■

EJEMPLO 2

Reste $\dfrac{a}{a^2 - 4} - \dfrac{3}{a + 2}$

Solución

$$\frac{a}{a^2 - 4} - \frac{3}{a + 2} = \frac{a}{(a + 2)(a - 2)} - \frac{3}{a + 2}$$ Factorice los denominadores.

El MCD es $(a + 2)(a - 2)$. Encuentre el MCD.

$$= \frac{a}{(a + 2)(a - 2)} - \left(\frac{3}{a + 2}\right)\left(\frac{a - 2}{a - 2}\right)$$ Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga al MCD como su denominador.

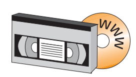
$$= \frac{a - 3(a - 2)}{(a + 2)(a - 2)}$$ Combine numeradores y coloque sobre el MCD.

$$= \frac{a - 3a + 6}{(a + 2)(a - 2)}$$ Simplifique al realizar la suma o resta.

$$= \frac{-2a + 6}{(a + 2)(a - 2)} \quad \text{o} \quad \frac{-2(a - 3)}{(a + 2)(a - 2)}$$ ■

EJEMPLO 3

Sume $\dfrac{3n}{n^2 + 6n + 5} + \dfrac{4}{n^2 - 7n - 8}$



Solución

$$\frac{3n}{n^2 + 6n + 5} + \frac{4}{n^2 - 7n - 8}$$

$$= \frac{3n}{(n + 5)(n + 1)} + \frac{4}{(n - 8)(n + 1)}$$ Factorice los denominadores.

El MCD es $(n + 5)(n + 1)(n - 8)$. Encuentre el MCD.

$$= \left(\frac{3n}{(n + 5)(n + 1)}\right)\left(\frac{n - 8}{n - 8}\right) + \left(\frac{4}{(n - 8)(n + 1)}\right)\left(\frac{n + 5}{n + 5}\right)$$ Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga al MCD como su denominador.

$$= \frac{3n(n - 8) + 4(n + 5)}{(n + 5)(n + 1)(n - 8)}$$ Combine numeradores y coloque sobre el MCD.

$$= \frac{3n^2 - 24n + 4n + 20}{(n + 5)(n + 1)(n - 8)}$$ Simplifique al realizar la suma o resta.

$$= \frac{3n^2 - 20n + 20}{(n + 5)(n + 1)(n - 8)}$$ ■

EJEMPLO 4

Realice las operaciones indicadas.

$$\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

Solución

$$\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{2x^2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}+\frac{x}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x-1}$$

Factorice los denominadores.

El MCD es $(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

Encuentre el MCD.

$$=\frac{2x^2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$
$$+\left(\frac{x}{(x+1)(x-1)}\right)\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{x-1}\right)\frac{(x^2+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga al MCD como su denominador.

$$=\frac{2x^2+x(x^2+1)-(x^2+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

Combine numeradores y coloque sobre el MCD.

$$=\frac{2x^2+x^3+x-x^3-x^2-x-1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

Simplifique al realizar la suma o resta.

$$=\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{1}{x^2+1}$$

Reduzca. ■

Fracciones complejas

Las **fracciones complejas** son formas fraccionarias que contienen números racionales o expresiones racionales en los numeradores y/o denominadores. Los siguientes son ejemplos de fracciones complejas.

$$\frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{xy}} \qquad \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}} \qquad \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{6}{y^2}} \qquad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \qquad \frac{-3}{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}$$

Con frecuencia es necesario **simplificar** una fracción compleja. A continuación tomará cada uno de estos cinco ejemplos y examinará algunas técnicas para simplificar fracciones complejas.

EJEMPLO 5

Simplifique $\dfrac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{xy}}$

Solución

Este tipo de problema es un simple problema de división.

$$\frac{\frac{4}{x}}{\frac{2}{xy}} = \frac{4}{x} \div \frac{2}{xy}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}y}{\cancel{2}} = 2y$$

■

EJEMPLO 6

Simplifique $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{8}}$

Observe dos posibles formas de simplificar tal problema.

Solución A

Aquí se simplificará el numerador al realizar la suma y el denominador se simplificará al realizar la resta. Entonces el problema es un simple problema de división, como el ejemplo 5.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{8}} = \frac{\frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{20}{24} - \frac{9}{24}}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{11}{24}} = \frac{5}{\cancel{4}} \cdot \frac{\overset{6}{\cancel{24}}}{11}$$

$$= \frac{30}{11}$$

Solución B

Aquí se encuentra el MCD de los cuatro denominadores (2, 4, 6 y 8). El MCD es 24. Use este MCD para multiplicar toda la fracción compleja por una forma de 1, en específico $\frac{24}{24}$.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}} = \left(\frac{24}{24}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}\right)$$

$$= \frac{24\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)}{24\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}\right)}$$

$$= \frac{24\left(\frac{1}{2}\right)+24\left(\frac{3}{4}\right)}{24\left(\frac{5}{6}\right)-24\left(\frac{3}{8}\right)}$$

$$= \frac{12+18}{20-9} = \frac{30}{11}$$

■

EJEMPLO 7

Simplifique $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{6}{y^2}}$

Solución A

Simplifique el numerador y el denominador. Entonces el problema se convierte en un problema de división.

$$\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{6}{y^2}} = \frac{\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{y}{y}\right)+\left(\frac{2}{y}\right)\left(\frac{x}{x}\right)}{\left(\frac{5}{x}\right)\left(\frac{y^2}{y^2}\right)-\left(\frac{6}{y^2}\right)\left(\frac{x}{x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3y}{xy}+\frac{2x}{xy}}{\frac{5y^2}{xy^2}-\frac{6x}{xy^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{3y + 2x}{xy}}{\dfrac{5y^2 - 6x}{xy^2}}$$

$$= \frac{3y + 2x}{xy} \div \frac{5y^2 - 6x}{xy^2}$$

$$= \frac{3y + 2x}{\cancel{x}\cancel{y}} \cdot \frac{\overset{y}{\cancel{x}\cancel{y^2}}}{5y^2 - 6x}$$

$$= \frac{y(3y + 2x)}{5y^2 - 6x}$$

Solución B

Aquí se encuentra el MCD de los cuatro denominadores (x, y, x y y^2). El MCD es xy^2. Use este MCD para multiplicar toda la fracción compleja por una forma de 1, en específico $\dfrac{xy^2}{xy^2}$.

$$\frac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y^2}} = \left(\frac{xy^2}{xy^2}\right)\left(\frac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y^2}}\right)$$

$$= \frac{xy^2\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}\right)}{xy^2\left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y^2}\right)}$$

$$= \frac{xy^2\left(\dfrac{3}{x}\right) + xy^2\left(\dfrac{2}{y}\right)}{xy^2\left(\dfrac{5}{x}\right) - xy^2\left(\dfrac{6}{y^2}\right)}$$

$$= \frac{3y^2 + 2xy}{5y^2 - 6x} \quad \text{o} \quad \frac{y(3y + 2x)}{5y^2 - 6x}$$

■

Ciertamente cualquier método (solución A o solución B) funcionará con problemas similares a los ejemplos 6 y 7. Examine con cuidado la solución B en ambos ejemplos. Este método funciona de manera efectiva con fracciones complejas donde el MCD de todos los denominadores es fácil de encontrar. (No se confunda por la longitud de la solución B para el ejemplo 6; se tuvo especial cuidado para mostrar cada paso.)

EJEMPLO 8

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{2}$

Solución

El número 2 se puede escribir como $\frac{2}{1}$, en consecuencia, el MCD de los tres denominadores (x, y y 1) es xy. Por tanto, multiplique toda la fracción compleja por una forma de 1, en específico $\frac{xy}{xy}$.

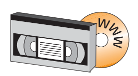
$$\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{2}{1}}\right)\left(\dfrac{xy}{xy}\right)=\dfrac{xy\left(\dfrac{1}{x}\right)+xy\left(\dfrac{1}{y}\right)}{2xy}$$

$$=\dfrac{y+x}{2xy}$$

■

EJEMPLO 9

Simplifique $\dfrac{-3}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}}$



Solución

$$\left(\dfrac{\dfrac{-3}{1}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}}\right)\left(\dfrac{xy}{xy}\right)=\dfrac{-3(xy)}{xy\left(\dfrac{2}{x}\right)-xy\left(\dfrac{3}{y}\right)}$$

$$=\dfrac{-3xy}{2y-3x}$$

■

Esta sección concluye con un ejemplo que tiene una fracción compleja como parte de una expresión algebraica.

EJEMPLO 10

Simplifique $1-\dfrac{n}{1-\dfrac{1}{n}}$

Solución

Primero simplifique la fracción compleja $\dfrac{n}{1-\dfrac{1}{n}}$ al multiplicar por $\frac{n}{n}$.

$$\left(\dfrac{n}{1-\dfrac{1}{n}}\right)\left(\dfrac{n}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n-1}$$

Ahora puede realizar la resta.

$$1 - \frac{n^2}{n-1} = \left(\frac{n-1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{1}\right) - \frac{n^2}{n-1}$$

$$= \frac{n-1}{n-1} - \frac{n^2}{n-1}$$

$$= \frac{n-1-n^2}{n-1} \quad \text{o} \quad \frac{-n^2+n-1}{n-1}$$

Conjunto de problemas 4.4

Para los problemas 1-40 realice las operaciones indicadas y exprese sus respuestas en la forma más simple.

1. $\dfrac{2x}{x^2+4x} + \dfrac{5}{x}$

2. $\dfrac{3x}{x^2-6x} + \dfrac{4}{x}$

3. $\dfrac{4}{x^2+7x} - \dfrac{1}{x}$

4. $\dfrac{-10}{x^2-9x} - \dfrac{2}{x}$

5. $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{5}{x+1}$

6. $\dfrac{2x}{x^2-16} + \dfrac{7}{x-4}$

7. $\dfrac{6a+4}{a^2-1} - \dfrac{5}{a-1}$

8. $\dfrac{4a-4}{a^2-4} - \dfrac{3}{a+2}$

9. $\dfrac{2n}{n^2-25} - \dfrac{3}{4n+20}$

10. $\dfrac{3n}{n^2-36} - \dfrac{2}{5n+30}$

11. $\dfrac{5}{x} - \dfrac{5x-30}{x^2+6x} + \dfrac{x}{x+6}$

12. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{x+5}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1}$

13. $\dfrac{3}{x^2+9x+14} + \dfrac{5}{2x^2+15x+7}$

14. $\dfrac{6}{x^2+11x+24} + \dfrac{4}{3x^2+13x+12}$

15. $\dfrac{1}{a^2-3a-10} - \dfrac{4}{a^2+4a-45}$

16. $\dfrac{6}{a^2-3a-54} - \dfrac{10}{a^2+5a-6}$

17. $\dfrac{3a}{8a^2-2a-3} + \dfrac{1}{4a^2+13a-12}$

18. $\dfrac{2a}{6a^2+13a-5} + \dfrac{a}{2a^2+a-10}$

19. $\dfrac{5}{x^2+3} - \dfrac{2}{x^2+4x-21}$

20. $\dfrac{7}{x^2+1} - \dfrac{3}{x^2+7x-60}$

21. $\dfrac{3x}{x^2-6x+9} - \dfrac{2}{x-3}$

22. $\dfrac{3}{x+4} + \dfrac{2x}{x^2+8x+16}$

23. $\dfrac{5}{x^2-1} + \dfrac{9}{x^2+2x+1}$

24. $\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{9}{x^2-6x+9}$

25. $\dfrac{2}{y^2+6y-16} - \dfrac{4}{y+8} - \dfrac{3}{y-2}$

26. $\dfrac{7}{y-6} - \dfrac{10}{y+12} + \dfrac{4}{y^2+6y-72}$

27. $x - \dfrac{x^2}{x-2} + \dfrac{3}{x^2-4}$

28. $x + \dfrac{5}{x^2-25} - \dfrac{x^2}{x+5}$

29. $\dfrac{x+3}{x+10} + \dfrac{4x-3}{x^2+8x-20} + \dfrac{x-1}{x-2}$

30. $\dfrac{2x-1}{x+3} + \dfrac{x+4}{x-6} + \dfrac{3x-1}{x^2-3x-18}$

31. $\dfrac{n}{n-6} + \dfrac{n+3}{n+8} + \dfrac{12n+26}{n^2+2n-48}$

32. $\dfrac{n-1}{n+4} + \dfrac{n}{n+6} + \dfrac{2n+18}{n^2+10n+24}$

33. $\dfrac{4x-3}{2x^2+x-1} - \dfrac{2x+7}{3x^2+x-2} - \dfrac{3}{3x-2}$

34. $\dfrac{2x+5}{x^2+3x-18} - \dfrac{3x-1}{x^2+4x-12} + \dfrac{5}{x-2}$

35. $\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n^2+3n}{n^4-1} - \dfrac{1}{n-1}$

36. $\dfrac{2n^2}{n^4-16}-\dfrac{n}{n^2-4}+\dfrac{1}{n+2}$

37. $\dfrac{15x^2-10}{5x^2-7x+2}-\dfrac{3x+4}{x-1}-\dfrac{2}{5x-2}$

38. $\dfrac{32x+9}{12x^2+x-6}-\dfrac{3}{4x+3}-\dfrac{x+5}{3x-2}$

39. $\dfrac{t+3}{3t-1}+\dfrac{8t^2+8t+2}{3t^2-7t+2}-\dfrac{2t+3}{t-2}$

40. $\dfrac{t-3}{2t+1}+\dfrac{2t^2+19t-46}{2t^2-9t-5}-\dfrac{t+4}{t-5}$

Para los problemas 41-64 simplifique cada fracción compleja.

41. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}$

42. $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}-\frac{7}{12}}$

43. $\dfrac{\frac{3}{28}-\frac{5}{14}}{\frac{5}{7}+\frac{1}{4}}$

44. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{7}{36}}{\frac{3}{18}-\frac{5}{12}}$

45. $\dfrac{\frac{5}{6y}}{\frac{10}{3xy}}$

46. $\dfrac{\frac{9}{8xy^2}}{\frac{5}{4x^2}}$

47. $\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{4}{y}-\frac{7}{xy}}$

48. $\dfrac{\frac{9}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{5}{y}+\frac{3}{y^2}}$

49. $\dfrac{\frac{6}{a}-\frac{5}{b^2}}{\frac{12}{a^2}+\frac{2}{b}}$

50. $\dfrac{\frac{4}{ab}-\frac{3}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{3}{b}}$

51. $\dfrac{\frac{2}{x}-3}{\frac{3}{y}+4}$

52. $\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{6}{x}}$

53. $\dfrac{3+\frac{2}{n+4}}{5-\frac{1}{n+4}}$

54. $\dfrac{4+\frac{6}{n-1}}{7-\frac{4}{n-1}}$

55. $\dfrac{5-\frac{2}{n-3}}{4-\frac{1}{n-3}}$

56. $\dfrac{\frac{3}{n-5}-2}{1-\frac{4}{n-5}}$

57. $\dfrac{\frac{-1}{y-2}+\frac{5}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{4}{xy-2x}}$

58. $\dfrac{\frac{-2}{x}-\frac{4}{x+2}}{\frac{3}{x^2+2x}+\frac{3}{x}}$

59. $\dfrac{\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x+3}}{\frac{5}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}}$

60. $\dfrac{\frac{2}{x-y}+\frac{3}{x+y}}{\frac{5}{x+y}-\frac{1}{x^2-y^2}}$

61. $\dfrac{3a}{2-\frac{1}{a}}-1$

62. $\dfrac{a}{\frac{1}{a}+4}+1$

63. $2-\dfrac{x}{3-\frac{2}{x}}$

64. $1+\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

65. ¿Cuál de las dos técnicas presentadas en el texto usaría para simplificar $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$ ¿Cuál técnica usaría para simplificar $\dfrac{\frac{3}{8}-\frac{5}{7}}{\frac{7}{9}+\frac{6}{25}}$? Explique su elección para cada problema.

66. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolver el siguiente problema de adición.

$$\frac{3x+4}{8}+\frac{5x-2}{12}$$

4.5 División de polinomios

En el capítulo 3 se vio cómo la propiedad $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, junto con su conocimiento de la división de enteros, se usa para dividir monomios. Por ejemplo,

$$\frac{12x^3}{3x} = 4x^2 \qquad \frac{-36x^4y^5}{4xy^2} = -9x^3y^3$$

En la sección 4.3 se usaron $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ y $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ como la base para sumar y restar expresiones racionales. Estas mismas igualdades, vistas como $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ y $\frac{a-c}{b} = \frac{a}{b} - \frac{c}{b}$, junto con su conocimiento de la división de monomios, proporcionan la base para dividir polinomios mediante monomios. Considere los siguientes ejemplos.

$$\frac{18x^3 + 24x^2}{6x} = \frac{18x^3}{6x} + \frac{24x^2}{6x} = 3x^2 + 4x$$

$$\frac{35x^2y^3 - 55x^3y^4}{5xy^2} = \frac{35x^2y^3}{5xy^2} - \frac{55x^3y^4}{5xy^2} = 7xy - 11x^2y^2$$

Para dividir un polinomio entre un monomio divida cada término del polinomio entre el monomio. Como sucede con muchas habilidades, una vez que se sienta cómodo con el proceso, tal vez quiera realizar algunos de los pasos mentalmente. Su trabajo podría tomar el siguiente formato.

$$\frac{40x^4y^5 + 72x^5y^7}{8x^2y} = 5x^2y^4 + 9x^3y^6 \qquad \frac{36a^3b^4 - 45a^4b^6}{-9a^2b^3} = -4ab + 5a^2b^3$$

En la sección 4.1 se vio que una fracción como $\frac{3x^2 + 11x - 4}{x + 4}$ se puede simplificar del modo siguiente:

$$\frac{3x^2 + 11x - 4}{x + 4} = \frac{(3x - 1)\cancel{(x + 4)}}{\cancel{x + 4}} = 3x - 1$$

Es posible obtener el mismo resultado al usar un proceso de división similar a la división larga en aritmética.

Paso 1 Use el formato convencional de división larga y ordene tanto el dividendo como el divisor en potencias descendentes de la variable.

$$x + 4 \overline{)3x^2 + 11x - 4}$$

Paso 2 Encuentre el primer término del cociente al dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

$$\begin{array}{r} 3x \\ x + 4 \overline{)3x^2 + 11x - 4} \end{array}$$

Paso 3 Multiplique todo el divisor por el término del cociente que encontró en el paso 2, y coloque el producto a restar del dividendo.

$$\begin{array}{r} 3x \\ x + 4 \overline{)3x^2 + 11x - 4} \\ \underline{3x^2 + 12x} \end{array}$$

Paso 4 Reste.

$$\begin{array}{r} 3x \\ x+4 \overline{)3x^2 + 11x - 4} \\ \underline{3x^2 + 12x} \\ -x - 4 \end{array}$$

¡Recuerde sumar el opuesto!
$(3x^2 + 11x - 4) - (3x^2 + 12x) = -x - 4$

Paso 5 Repita el proceso comenzando con el paso 2; use el polinomio que resultó de la resta en el paso 4 como un nuevo dividendo.

$$\begin{array}{r} 3x \quad -1 \\ x+4 \overline{)3x^2 + 11x - 4} \\ \underline{3x^2 + 12x} \\ -x - 4 \\ \underline{-x - 4} \end{array}$$

En el siguiente ejemplo, *piense* en términos del anterior procedimiento paso a paso, pero ordene su trabajo en una forma más compacta.

EJEMPLO 1

Divida $5x^2 + 6x - 8$ entre $x + 2$

Solución

$$\begin{array}{r} 5x \quad -4 \\ x+2 \overline{)5x^2 + 6x - 8} \\ \underline{5x^2 + 10x} \\ -4x - 8 \\ \underline{-4x - 8} \\ 0 \end{array}$$

Pasos mentales

1. $\dfrac{5x^2}{x} = 5x$.
2. $5x(x + 2) = 5x^2 + 10x$.
3. $(5x^2 + 6x - 8) - (5x^2 + 10x) = -4x - 8$.
4. $\dfrac{-4x}{x} = -4$.
5. $-4(x + 2) = -4x - 8$. ■

Recuerde que, para comprobar un problema de división, puede multiplicar el divisor por el cociente y sumar el resto. En otras palabras,

$$\text{Dividendo} = (\text{Divisor})(\text{Cociente}) + (\text{Residuo})$$

En ocasiones el resto se expresa como una parte fraccionaria del divisor. Entonces la relación se convierte en

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

EJEMPLO 2

Divida $2x^2 - 3x + 1$ entre $x - 5$

Solución

$$\begin{array}{r} 2x + 7 \\ x-5 \overline{)2x^2 - 3x + 1} \\ \underline{2x^2 - 10x} \\ 7x + 1 \\ \underline{7x - 35} \\ 36 \end{array}$$

← Residuo

Por tanto

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 5} = 2x + 7 + \frac{36}{x - 5} \qquad x \neq 5$$

Comprobación

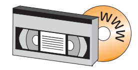
$$(x-5)(2x+7)+36 \stackrel{?}{=} 2x^2-3x+1$$
$$2x^2-3x-35+36 \stackrel{?}{=} 2x^2-3x+1$$
$$2x^2-3x+1 = 2x^2-3x+1$$

■

Cada uno de los siguientes dos ejemplos ilustra otro punto en cuanto al proceso de división. Estúdielos cuidadosamente y entonces estará preparado para trabajar los ejercicios del siguiente conjunto de problemas.

EJEMPLO 3

Divida $t^3 - 8$ entre $t - 2$



Solución

$$\begin{array}{r} t^2 + 2t \quad + 4 \\ t-2\overline{)t^3 + 0t^2 + 0t - 8} \\ \underline{t^3 - 2t^2 \qquad\qquad} \\ 2t^2 + 0t - 8 \\ \underline{2t^2 - 4t \quad} \\ 4t - 8 \\ \underline{4t - 8} \\ 0 \end{array}$$

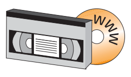
Note la inserción de un término "t al cuadrado" y un "término t" con coeficientes cero.

¡Compruebe este resultado!

■

EJEMPLO 4

Divida $y^3 + 3y^2 - 2y - 1$ entre $y^2 + 2y$



Solución

$$\begin{array}{r} y \;+ 1 \qquad\qquad \\ y^2+2y\overline{)y^3 + 3y^2 - 2y - 1} \\ \underline{y^3 + 2y^2 \qquad\qquad} \\ y^2 - 2y - 1 \\ \underline{y^2 + 2y \quad\;\;} \\ -4y - 1 \end{array}$$

Residuo de $-4y - 1$

(El proceso de división está completo cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor.) Por tanto

$$\frac{y^3+3y^2-2y-1}{y^2+2y} = y + 1 + \frac{-4y-1}{y^2+2y}$$

■

Si el divisor es de la forma $x - k$, donde el coeficiente del término x es 1, entonces el formato del proceso de división descrito en esta sección se simplifica mediante un procedimiento llamado **división sintética**. Este procedimiento es un atajo para este tipo de división polinomial. Si continúa con el estudio de álgebra universitaria, entonces querrá conocer la división sintética. Si no estudia álgebra universitaria, entonces probablemente no necesitará un atajo y el proceso de división larga será suficiente.

Primero considere un ejemplo y utilice el proceso de división habitual. Después, paso a paso, observará algunos atajos que le conducirán al procedimiento de división sintética. Considere el problema de división $(2x^4 + x^3 - 17x^2 + 3x + 2) \div (x - 2)$

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 2x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \\
x - 2\,) & \overline{2x^4 + x^3 - 17x^2 + 13x + 2} \\
 & \underline{2x^4 - 4x^3} \\
 & \quad 5x^3 - 17x^2 \\
 & \quad \underline{5x^3 - 10x^2} \\
 & \qquad -7x^2 + 13x \\
 & \qquad \underline{-7x^2 + 14x} \\
 & \qquad\qquad -x + 2 \\
 & \qquad\qquad \underline{-x + 2}
\end{array}
$$

Observe, dado que el dividendo $(2x^4 + x^3 - 17x^2 + 13x + 2)$ se escribe en potencias descendentes de x, se produce el cociente $(2x^3 + 5x^2 - 7x - 1)$, también en potencias descendentes de x. En otras palabras, los coeficientes numéricos son los números importantes. En consecuencia, reescriba este problema en términos de sus coeficientes.

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 2 + 5 - 7 - 1 \\
1 - 2\,) & \overline{2 + 1 - 17 + 13 + 2} \\
 & \underline{2 - 4} \\
 & \quad 5 - 17 \\
 & \quad \underline{5 - 10} \\
 & \qquad -7 + 13 \\
 & \qquad \underline{-7 + 14} \\
 & \qquad\qquad -1 + 2 \\
 & \qquad\qquad \underline{-1 + 2}
\end{array}
$$

Ahora observe que los números en círculos son simplemente repeticiones de los números que están justo arriba de ellos en el formato. Por tanto, al quitar los números en círculos, el proceso se puede escribir en una forma más compacta, como

$$
\begin{array}{r@{}rrrrr}
 & 2 & 5 & -7 & -1 & \qquad (1) \\
-2\,) & 2 & 1 & -17 & -13 & 2 \qquad (2) \\
 & & -4 & -10 & 14 & 2 \qquad (3) \\
\hline
 & & 5 & -7 & -1 & 0 \qquad (4)
\end{array}
$$

donde se omiten las repeticiones y 1, el coeficiente de x en el divisor, se omite.

Note que la línea (4) revela todos los coeficientes del cociente, línea (1), excepto por el primer coeficiente de 2. Por tanto, puede comenzar la línea (4) con el primer coeficiente y luego usar la siguiente forma.

$$
\begin{array}{r@{}rrrrr}
-2\,) & 2 & 1 & -17 & 13 & 2 \qquad (5) \\
 & & -4 & -10 & 14 & 2 \qquad (6) \\
\hline
 & 2 & 5 & -7 & -1 & 0 \qquad (7)
\end{array}
$$

La línea (7) contiene los coeficientes del cociente, donde el 0 indica el residuo.

Finalmente, al cambiar la constante en el divisor a 2 (en lugar de −2), puede sumar las correspondientes entradas en las líneas (5) y (6) en lugar de restar. En consecuencia, la forma de división sintética final para este problema es

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & 1 & -17 & 13 & 2 \\ & & 4 & 10 & -14 & -2 \\ \hline & 2 & 5 & -7 & -1 & 0 \end{array}$$

Ahora considere otro problema que ilustra un procedimiento paso a paso para llevar a cabo el proceso de división sintética. Suponga que quiere dividir $3x^3 - 2x^2 + 6x - 5$ entre $x + 4$.

Paso 1 Escriba los coeficientes del dividendo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 6 & -5 \end{array}$$

Paso 2 En el divisor $(x + 4)$, use −4 en lugar de 4, de modo que más tarde pueda sumar en lugar de restar.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & -2 & 6 & -5 \end{array}$$

Paso 3 Baje el primer coeficiente del dividendo (3).

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & -2 & 6 & -5 \\ & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

Paso 4 Multiplique (3)(−4), que produce −12; este resultado se debe sumar al segundo coeficiente del dividendo (−2).

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & -2 & 6 & -5 \\ & & -12 & & \\ \hline & 3 & -14 & & \end{array}$$

Paso 5 Multiplique (−14)(−4), que produce 56; este resultado se debe sumar al tercer coeficiente del dividendo (6).

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & -2 & 6 & -5 \\ & & -12 & 56 & \\ \hline & 3 & -14 & 62 & \end{array}$$

Paso 6 Multiplique (62)(−4), que produce −248; este resultado se suma al último término del dividendo (−5).

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 3 & -2 & 6 & -5 \\ & & -12 & 56 & -248 \\ \hline & 3 & -14 & 62 & -253 \end{array}$$

El último renglón indica un cociente de $3x^2 - 14x + 62$ y un residuo de −253. Por tanto, se tiene

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x + 4} = 3x^2 - 14x + 62 - \frac{253}{x + 4}$$

Se considerará un ejemplo más, que sólo muestra la forma compacta final, para la división sintética.

EJEMPLO 5 Encuentre el cociente y el residuo para $(4x^4 - 2x^3 + 6x - 1) \div (x - 1)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1) & 4 & -2 & 0 & 6 & -1 \\ & & 4 & 2 & 2 & 8 \\ \hline & 4 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{array}$$

Note que se insertó un cero como el coeficiente del término perdido x^2.

Por tanto,

$$\frac{4x^4 - 2x^3 + 6x - 1}{x - 1} = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 8 + \frac{7}{x - 1}$$

■

Conjunto de problemas 4.5

Para los problemas 1-10 realice las divisiones indicadas de polinomios entre monomios.

1. $\frac{9x^4 + 18x^3}{3x}$
2. $\frac{12x^3 - 24x^2}{6x^2}$
3. $\frac{-24x^6 + 36x^8}{4x^2}$
4. $\frac{-35x^5 - 42x^3}{-7x^2}$
5. $\frac{15a^3 - 25a^2 - 40a}{5a}$
6. $\frac{-16a^4 + 32a^3 - 56a^2}{-8a}$
7. $\frac{13x^3 - 17x^2 + 28x}{-x}$
8. $\frac{14xy - 16x^2y^2 - 20x^3y^4}{-xy}$
9. $\frac{-18x^2y^2 + 24x^3y^2 - 48x^2y^3}{6xy}$
10. $\frac{-27a^3b^4 - 36a^2b^3 + 72a^2b^5}{9a^2b^2}$

Para los problemas 11-52 realice las divisiones indicadas.

11. $\frac{x^2 - 7x - 78}{x + 6}$
12. $\frac{x^2 + 11x - 60}{x - 4}$
13. $(x^2 + 12x - 160) \div (x - 8)$
14. $(x^2 - 18x - 175) \div (x + 7)$
15. $\frac{2x^2 - x - 4}{x - 1}$
16. $\frac{3x^2 - 2x - 7}{x + 2}$
17. $\frac{15x^2 + 22x - 5}{3x + 5}$
18. $\frac{12x^2 - 32x - 35}{2x - 7}$
19. $\frac{3x^3 + 7x^2 - 13x - 21}{x + 3}$
20. $\frac{4x^3 - 21x^2 + 3x + 10}{x - 5}$
21. $(2x^3 + 9x^2 - 17x + 6) \div (2x - 1)$
22. $(3x^3 - 5x^2 - 23x - 7) \div (3x + 1)$
23. $(4x^3 - x^2 - 2x + 6) \div (x - 2)$
24. $(6x^3 - 2x^2 + 4x - 3) \div (x + 1)$
25. $(x^4 - 10x^3 + 19x^2 + 33x - 18) \div (x - 6)$
26. $(x^4 + 2x^3 - 16x^2 + x + 6) \div (x - 3)$
27. $\frac{x^3 - 125}{x - 5}$
28. $\frac{x^3 + 64}{x + 4}$
29. $(x^3 + 64) \div (x + 1)$
30. $(x^3 - 8) \div (x - 4)$
31. $(2x^3 - x - 6) \div (x + 2)$
32. $(5x^3 + 2x - 3) \div (x - 2)$
33. $\frac{4a^2 - 8ab + 4b^2}{a - b}$
34. $\frac{3x^2 - 2xy - 8y^2}{x - 2y}$
35. $\frac{4x^3 - 5x^2 + 2x - 6}{x^2 - 3x}$
36. $\frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 1}{x^2 + 2x}$
37. $\frac{8y^3 - y^2 - y + 5}{y^2 + y}$
38. $\frac{5y^3 - 6y^2 - 7y - 2}{y^2 - y}$

39. $(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \div (x^2 + x - 1)$

40. $(3x^3 - 4x^2 + 8x + 8) \div (x^2 - 2x + 4)$

41. $(4x^3 - 13x^2 + 8x - 15) \div (4x^2 - x + 5)$

42. $(5x^3 + 8x^2 - 5x - 2) \div (5x^2 - 2x - 1)$

43. $(5a^3 + 7a^2 - 2a - 9) \div (a^2 + 3a - 4)$

44. $(4a^3 - 2a^2 + 7a - 1) \div (a^2 - 2a + 3)$

45. $(2n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 3n - 4) \div (n^2 + 1)$

46. $(3n^4 + n^3 - 7n^2 - 2n + 2) \div (n^2 - 2)$

47. $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

48. $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

49. $(x^4 - 1) \div (x + 1)$

50. $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

51. $(3x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 6) \div (x^2 - 1)$

52. $(4x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x^2 + 2)$

Para los problemas 53-64 use división sintética para determinar el cociente y el residuo.

53. $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 2)$

54. $(x^2 + 9x + 18) \div (x + 3)$

55. $(x^2 + 2x - 10) \div (x - 4)$

56. $(x^2 - 10x + 15) \div (x - 8)$

57. $(x^3 - 2x^2 - x + 2) \div (x - 2)$

58. $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) \div (x + 1)$

59. $(x^3 - 7x - 6) \div (x + 2)$

60. $(x^3 + 6x^2 - 5x - 1) \div (x - 1)$

61. $(2x^3 - 5x^2 - 4x + 6) \div (x - 2)$

62. $(3x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x - 1) \div (x + 1)$

63. $(x^4 + 4x^3 - 7x - 1) \div (x - 3)$

64. $(2x^4 + 3x^2 + 3) \div (x + 2)$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

65. Describa el proceso de división larga para polinomios.

66. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolvería el siguiente problema de división.

$(4 - 3x - 7x^3) \div (x + 6)$

67. ¿Cómo sabría por inspección que $3x^2 + 5x + 1$ no puede ser la respuesta correcta para el problema de división $(3x^3 - 7x^2 - 22x + 8) \div (x - 4)$?

4.6 Ecuaciones fraccionarias

Las ecuaciones fraccionarias que se usan en este texto son de dos tipos básicos. Uno sólo tiene constantes como denominadores y el otro contiene variables en los denominadores.

En el capítulo 2 se consideraron ecuaciones fraccionarias que implican sólo constantes en los denominadores. Revise de manera breve el método para resolver tales ecuaciones, porque se usará para resolver cualquier tipo de ecuación fraccionaria.

EJEMPLO 1

Resuelva $\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{1}{6}$

Solución

$$\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$12\left(\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)$$ Multiplique ambos lados por 12, que es el MCD de todos los denominadores.

$$4(x-2) + 3(x+1) = 2$$

$$4x - 8 + 3x + 3 = 2$$

$$7x - 5 = 2$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

El conjunto solución es {1}. ¡Compruébelo! ■

Si una ecuación contiene una variable (o variables) en uno o más denominadores, entonces se procede de la misma forma que en el ejemplo 1, **excepto que se debe evitar cualquier valor de la variable que haga cero a un denominador**. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{5}{n} + \frac{1}{2} = \frac{9}{n}$

Solución

Primero necesita darse cuenta que n no puede ser cero. (¡Indique esta restricción de modo que no la olvide!) Entonces se procede.

$$\frac{5}{n} + \frac{1}{2} = \frac{9}{n}, \qquad n \neq 0$$

$$2n\left(\frac{5}{n} + \frac{1}{2}\right) = 2n\left(\frac{9}{n}\right)$$ Multiplique ambos lados por el MCD, que es $2n$.

$$10 + n = 18$$

$$n = 8$$

El conjunto solución es {8}. ¡Compruébelo! ■

EJEMPLO 3

Resuelva $\frac{35-x}{x} = 7 + \frac{3}{x}$

Solución

$$\frac{35-x}{x} = 7 + \frac{3}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$x\left(\frac{35 - x}{x}\right) = x\left(7 + \frac{3}{x}\right) \quad \text{Multiplique ambos lados por } x.$$
$$35 - x = 7x + 3$$
$$32 = 8x$$
$$4 = x$$

El conjunto solución es $\{4\}$. ■

EJEMPLO 4

Resuelva $\dfrac{3}{a - 2} = \dfrac{4}{a + 1}$

Solución

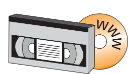
$$\frac{3}{a - 2} = \frac{4}{a + 1}, \qquad a \neq 2 \text{ y } a \neq -1$$
$$(a - 2)(a + 1)\left(\frac{3}{a - 2}\right) = (a - 2)(a + 1)\left(\frac{4}{a + 1}\right) \quad \text{Multiplique ambos lados por } (a - 2)(a + 1).$$
$$3(a + 1) = 4(a - 2)$$
$$3a + 3 = 4a - 8$$
$$11 = a$$

El conjunto solución es $\{11\}$. ■

Tenga en mente que hacer una lista con las restricciones al comienzo de un problema no sustituye la comprobación de las soluciones potenciales. En el ejemplo 4 la respuesta 11 necesita comprobarse en la ecuación original.

EJEMPLO 5

Resuelva $\dfrac{a}{a - 2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{a - 2}$



Solución

$$\frac{a}{a - 2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{a - 2}, \qquad a \neq 2$$
$$3(a - 2)\left(\frac{a}{a - 2} + \frac{2}{3}\right) = 3(a - 2)\left(\frac{2}{a - 2}\right) \quad \text{Multiplique ambos lados por } 3(a - 2).$$
$$3a + 2(a - 2) = 6$$
$$3a + 2a - 4 = 6$$
$$5a = 10$$
$$a = 2$$

Puesto que la restricción inicial era $a \neq 2$ se concluye que esta ecuación no tiene solución. Por ende, el conjunto solución es $\varnothing$. ■

Razón y proporción

Una **razón** es la comparación de dos números mediante división. Con frecuencia se usa la forma fraccionaria para expresar razones. Por ejemplo, la razón de a a b se puede escribir como $\frac{a}{b}$. Un enunciado de igualdad entre dos razones se llama **proporción**. Por ende, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos razones iguales, se puede formar la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ y $d \neq 0$). A continuación se deduce una importante propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

$$bd\left(\frac{a}{b}\right) = bd\left(\frac{c}{d}\right) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } bd.$$

$$ad = bc$$

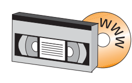
Propiedad de multiplicación cruzada de las proporciones

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ y $d \neq 0$), entonces $ad = bc$.

Algunas ecuaciones fraccionarias se pueden tratar como proporciones y resolver con el uso de la idea de multiplicación cruzada, como en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6

Resuelva $\frac{5}{x+6} = \frac{7}{x-5}$



Solución

$$\frac{5}{x+6} = \frac{7}{x-5}, \qquad x \neq -6 \text{ y } x \neq 5$$

$$5(x-5) = 7(x+6) \qquad \text{Aplique la propiedad de multiplicación cruzada.}$$

$$5x - 25 = 7x + 42$$

$$-67 = 2x$$

$$-\frac{67}{2} = x$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{67}{2}\right\}$. ■

EJEMPLO 7

Resuelva $\frac{x}{7} = \frac{4}{x + 3}$

Solución

$$\frac{x}{7} = \frac{4}{x + 3}, \qquad x \neq -3$$

$$x(x + 3) = 7(4) \qquad \text{Propiedad de multiplicación cruzada}$$

$$x^2 + 3x = 28$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x + 7)(x - 4) = 0$$

$$x + 7 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$

$$x = -7 \quad \text{o} \quad x = 4$$

El conjunto solución es $\{-7, 4\}$. Compruebe estas soluciones en la ecuación original. ■

Resolución de problemas

La habilidad para resolver ecuaciones fraccionarias amplía la base para resolver problemas verbales. Ahora está listo para enfrentar algunos problemas verbales que se traducen en ecuaciones fraccionarias.

PROBLEMA 1

La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número.

Solución

Sea n el número. Entonces $\frac{1}{n}$ representa su recíproco.

$$n + \frac{1}{n} = \frac{10}{3}, \qquad n \neq 0$$

$$3n\left(n + \frac{1}{n}\right) = 3n\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$3n^2 + 3 = 10n$$

$$3n^2 - 10n + 3 = 0$$

$$(3n - 1)(n - 3) = 0$$

$$3n - 1 = 0 \quad \text{o} \quad n - 3 = 0$$

$$3n = 1 \quad \text{o} \quad n = 3$$

$$n = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad n = 3$$

Si el número es $\frac{1}{3}$, entonces su recíproco es $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. Si el número es 3, entonces su recíproco es $\frac{1}{3}$. ■

Ahora considere un problema donde se puede usar la relación

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

como guía.

PROBLEMA 2

La suma de dos números es 52. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 9 y el residuo es 2. Encuentre los números.

Solución

Sea n el número menor. Entonces $52 - n$ representa al número mayor. Use la relación que se analizó anteriormente como guía y proceda del modo siguiente:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

$$\frac{52 - n}{n} = 9 + \frac{2}{n}, \qquad n \neq 0$$

$$n\left(\frac{52 - n}{n}\right) = n\left(9 + \frac{2}{n}\right)$$

$$52 - n = 9n + 2$$

$$50 = 10n$$

$$5 = n$$

Si $n = 5$, entonces $52 - n$ es igual a 47. Los números son 5 y 47. ■

Al estructurar de manera conveniente algunos problemas se les resuelve utilizando los conceptos de razón y proporción. Esta sección concluye con dos de tales ejemplos.

PROBLEMA 3

Sobre cierto mapa, $1\frac{1}{2}$ pulgadas representan 25 millas. Si dos ciudades están separadas $5\frac{1}{4}$ pulgadas sobre el mapa, encuentre el número de millas entre las ciudades (vea la figura 4.1).

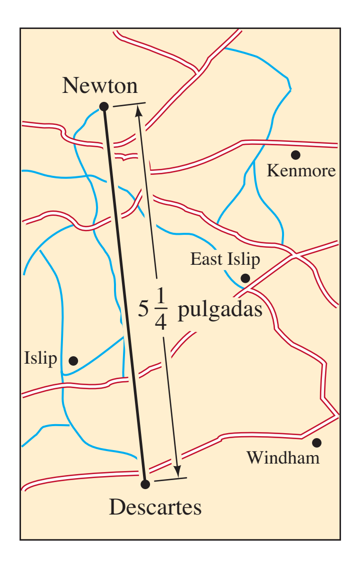


Figura 4.1

Solución

Sea m el número de millas entre las dos ciudades. Para establecer la proporción, use una razón de pulgadas en el mapa a millas. Asegúrese de mantener igual la razón "pulgadas sobre el mapa a millas" para ambos lados de la proporción.

$$\frac{1\frac{1}{2}}{25} = \frac{5\frac{1}{4}}{m}, \qquad m \neq 0$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{25} = \frac{\frac{21}{4}}{m}$$

$$\frac{3}{2}m = 25\left(\frac{21}{4}\right) \qquad \text{Propiedad de multiplicación cruzada}$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}m\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(25)\left(\frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{2}{3}.$$

$$m = \frac{175}{2}$$

$$= 87\frac{1}{2}$$

La distancia entre las dos ciudades es de $87\frac{1}{2}$ millas. ■

PROBLEMA 4

Una suma de \$750 se divide entre dos personas en la razón de 2 a 3. ¿Cuánto recibe cada persona?

Solución

Sea d la cantidad de dinero que recibe una persona. Entonces $750 - d$ representa la cantidad para la otra persona.

$$\frac{d}{750 - d} = \frac{2}{3}, \qquad d \neq 750$$

$$3d = 2(750 - d)$$

$$3d = 1500 - 2d$$

$$5d = 1500$$

$$d = 300$$

Si $d = 300$, entonces $750 - d$ es igual a 450. En consecuencia, una persona recibe \$300 y la otra persona recibe \$450. ■

Conjunto de problemas 4.6

Para los problemas 1-44 resuelva cada ecuación.

1. $\frac{x+1}{4}+\frac{x-2}{6}=\frac{3}{4}$

2. $\frac{x+2}{5}+\frac{x-1}{6}=\frac{3}{5}$

3. $\frac{x+3}{2}-\frac{x-4}{7}=1$

4. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-5}{9}=1$

5. $\frac{5}{n}+\frac{1}{3}=\frac{7}{n}$

6. $\frac{3}{n}+\frac{1}{6}=\frac{11}{3n}$

7. $\frac{7}{2x}+\frac{3}{5}=\frac{2}{3x}$

8. $\frac{9}{4x}+\frac{1}{3}=\frac{5}{2x}$

9. $\frac{3}{4x}+\frac{5}{6}=\frac{4}{3x}$

10. $\frac{5}{7x}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6x}$

11. $\frac{47-n}{n}=8+\frac{2}{n}$

12. $\frac{45-n}{n}=6+\frac{3}{n}$

13. $\frac{n}{65-n}=8+\frac{2}{65-n}$

14. $\frac{n}{70-n}=7+\frac{6}{70-n}$

15. $n+\frac{1}{n}=\frac{17}{4}$

16. $n+\frac{1}{n}=\frac{37}{6}$

17. $n-\frac{2}{n}=\frac{23}{5}$

18. $n-\frac{3}{n}=\frac{26}{3}$

19. $\frac{5}{7x-3}=\frac{3}{4x-5}$

20. $\frac{3}{2x-1}=\frac{5}{3x+2}$

21. $\frac{-2}{x-5}=\frac{1}{x+9}$

22. $\frac{5}{2a-1}=\frac{-6}{3a+2}$

23. $\frac{x}{x+1}-2=\frac{3}{x-3}$

24. $\frac{x}{x-2}+1=\frac{8}{x-1}$

25. $\frac{a}{a+5}-2=\frac{3a}{a+5}$

26. $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{2}=\frac{3}{a-3}$

27. $\frac{5}{x+6}=\frac{6}{x-3}$

28. $\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x+2}$

29. $\frac{3x-7}{10}=\frac{2}{x}$

30. $\frac{x}{-4}=\frac{3}{12x-25}$

31. $\frac{x}{x-6}-3=\frac{6}{x-6}$

32. $\frac{x}{x+1}+3=\frac{4}{x+1}$

33. $\frac{3s}{s+2}+1=\frac{35}{2(3s+1)}$

34. $\frac{s}{2s-1}-3=\frac{-32}{3(s+5)}$

35. $2-\frac{3x}{x-4}=\frac{14}{x+7}$

36. $-1+\frac{2x}{x+3}=\frac{-4}{x+4}$

37. $\frac{n+6}{27}=\frac{1}{n}$

38. $\frac{n}{5}=\frac{10}{n-5}$

39. $\frac{3n}{n-1}-\frac{1}{3}=\frac{-40}{3n-18}$

40. $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{-2}{n+2}$

41. $\frac{-3}{4x+5}=\frac{2}{5x-7}$

42. $\frac{7}{x+4}=\frac{3}{x-8}$

43. $\frac{2x}{x-2}+\frac{15}{x^2-7x+10}=\frac{3}{x-5}$

44. $\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+3}=\frac{20}{x^2-x-12}$

Para los problemas 45-60 establezca una ecuación algebraica y resuelva cada problema.

45. Una suma de $1750 se dividirá entre dos persona en la razón de 3 a 4. ¿Cuánto recibe cada persona?

46. Una heliográfica tiene una escala donde 1 pulgada representa 5 pies. Encuentre las dimensiones de una habitación rectangular que mide $3\frac{1}{2}$ pulgadas por $5\frac{3}{4}$ pulgadas sobre la heliográfica.

47. Un ángulo de un triángulo tiene una medida de 60º y las medidas de los otros dos ángulos están en la razón de 2 a 3. Encuentre las medidas de los otros dos ángulos.

48. La razón del complemento de un ángulo a su suplemento es 1 a 4. Encuentre la medida del ángulo.

49. La suma de un número y su recíproco es $\frac{53}{14}$. Encuentre el número.

50. La suma de dos números es 80. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 7 y el residuo es 8. Encuentre los números.

51. Si una casa valuada en \$150 000 tiene un gravamen de \$2500 por impuesto predial, entonces, a la misma tasa, ¿cuánto es el impuesto sobre una casa valuada en \$210 000?

52. La razón de estudiantes varones a estudiantes mujeres en cierta universidad es de 5 a 7. Si hay un total de 16 200 estudiantes, encuentre el número de estudiantes varones y el número de estudiantes mujeres.

53. Suponga que, en conjunto, Laura y Tammy vendieron \$120.75 de dulces para la feria escolar anual. Si la razón de las ventas de Tammy a las ventas de Laura fue de 4 a 3, ¿cuánto vendió cada una?

54. El valor total de una casa y un solar es de \$168 000. Si la razón del valor de la casa al valor del solar es 7 a 1, encuentre el valor de la casa.

55. La suma de dos números es 90. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 10 y el resto es 2. Encuentre los números.

56. ¿Qué número debe agregarse al numerador y al denominador de $\frac{2}{5}$ para producir un número racional que sea equivalente a $\frac{7}{8}$?

57. Un tablero de 20 pies se cortará en dos piezas cuyas longitudes están en la razón 7 a 3. Encuentre las longitudes de las dos piezas.

58. Una herencia de \$300 000 se dividirá entre un hijo y el fondo de cardiología local en la razón de 3 a 1. ¿Cuánto dinero recibirá el hijo?

59. Suponga que en cierto distrito 1150 personas votaron en la última elección presidencial. Si la razón de votantes mujeres a votantes hombres fue de 3 a 2, ¿cuántas mujeres y cuántos hombres votaron?

60. El perímetro de un rectángulo es de 114 centímetros. Si la razón de su ancho a su longitud es de 7 a 12, encuentre las dimensiones del rectángulo.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

61. ¿Cómo podría resolver el problema 57 sin usar álgebra?

62. Ahora resuelva el problema 59 usando el mismo método que usó en el problema 61. ¿Qué dificultades encuentra?

63. ¿Cómo puede decir por inspección que la ecuación $\frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x+2}$ no tiene solución?

64. ¿Cómo ayudaría a alguien a resolver la ecuación $\frac{3}{x} - \frac{4}{x} = \frac{-1}{x}$?

4.7 Más ecuaciones fraccionarias y aplicaciones

Esta sección comienza con la consideración de algunas ecuaciones fraccionarias. Continúa con su resolución al usar las mismas técnicas básicas que en la sección anterior. Esto es: se multiplicarán ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador de todos los denominadores en la ecuación, con las restricciones necesarias para evitar división entre cero. Algunos de los denominadores en estos problemas requerirán factorizar antes de poder determinar un mínimo común denominador.

EJEMPLO 1

Resuelva $\dfrac{x}{2x-8} + \dfrac{16}{x^2-16} = \dfrac{1}{2}$

Solución

$$\frac{x}{2x-8} + \frac{16}{x^2-16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2(x-4)} + \frac{16}{(x+4)(x-4)} = \frac{1}{2}, \qquad x \neq 4 \text{ y } x \neq -4$$

$$2(x-4)(x+4)\left(\frac{x}{2(x-4)} + \frac{16}{(x+4)(x-4)}\right) = 2(x+4)(x-4)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Multiplique ambos lados por el MCD, $2(x-4)(x+4)$.

$$x(x+4) + 2(16) = (x+4)(x-4)$$

$$x^2 + 4x + 32 = x^2 - 16$$

$$4x = -48$$

$$x = -12$$

El conjunto solución es $\{-12\}$. ¡Quizá deba corroborarlo! ■

En el ejemplo 1 advierta que las restricciones no se indicaron hasta que el denominador se expresó en forma factorizada. Habitualmente es más sencillo determinar las restricciones necesarias en este paso.

EJEMPLO 2

Resuelva $\dfrac{3}{n-5} - \dfrac{2}{2n+1} = \dfrac{n+3}{2n^2-9n-5}$

Solución

$$\frac{3}{n-5} - \frac{2}{2n+1} = \frac{n+3}{2n^2-9n-5}$$

$$\frac{3}{n-5} - \frac{2}{2n+1} = \frac{n+3}{(2n+1)(n-5)}, \qquad n \neq -\frac{1}{2} \text{ y } n \neq 5$$

$$(2n+1)(n-5)\left(\frac{3}{n-5} - \frac{2}{2n+1}\right) = (2n+1)(n-5)\left(\frac{n+3}{(2n+1)(n-5)}\right)$$

Multiplique ambos lados por el MCD, $(2n+1)(n-5)$.

$$3(2n+1) - 2(n-5) = n+3$$

$$6n + 3 - 2n + 10 = n + 3$$

$$4n + 13 = n + 3$$

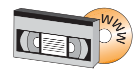
$$3n = -10$$

$$n = -\frac{10}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $2 + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2 - 2x}$



Solución

$$2 + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2 - 2x}$$

$$2 + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x(x-2)}, \qquad x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 2$$

$$x(x-2)\left(2 + \frac{4}{x-2}\right) = x(x-2)\left(\frac{8}{x(x-2)}\right)$$ Multiplique ambos lados por el MCD, $x(x - 2)$.

$$2x(x-2) + 4x = 8$$

$$2x^2 - 4x + 4x = 8$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Puesto que la restricción inicial indicaba que $x \neq 2$, la única solución es -2. Por tanto, el conjunto solución es $\{-2\}$. ■

En la sección 2.4 estudió, usando las propiedades de igualdad, el cambio de la forma de varias fórmulas. Por ejemplo, se consideró la fórmula de interés simple $A = P + Prt$ y se cambió su forma al resolver para P del modo siguiente:

$$A = P + Prt$$

$$A = P(1 + rt)$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P$$ Multiplique ambos lados por $\frac{1}{1 + rt}$.

Si la fórmula está en la forma de una ecuación fraccionaria, entonces las técnicas de estas últimas dos secciones son aplicables. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Si el costo original de algunas propiedades empresariales es C dólares y se depreciaron linealmente durante N años, entonces su valor, V, al final de T años está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{T}{N}\right)$$

Resuelva esta fórmula para N en términos de V, C y T.

Solución

$$V = C\left(1 - \frac{T}{N}\right)$$

$$V = C - \frac{CT}{N}$$

$$N(V) = N\left(C - \frac{CT}{N}\right) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } N.$$

$$NV = NC - CT$$

$$NV - NC = -CT$$

$$N(V - C) = -CT$$

$$N = \frac{-CT}{V - C}$$

$$N = -\frac{CT}{V - C}$$

■

Resolución de problemas

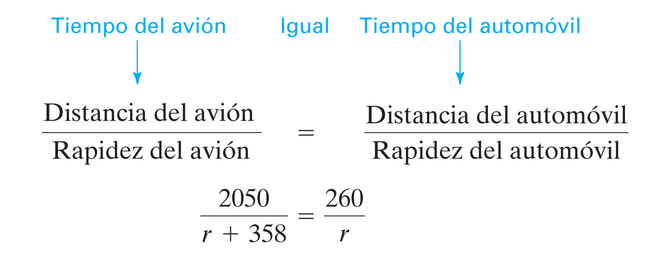
En la sección 2.4 se resolvieron algunos problemas de movimiento uniforme. Se usó la fórmula $d = rt$ en el análisis de los problemas, y se usaron guías que implican relaciones de distancia. Ahora considere algunos problemas de movimiento uniforme donde las guías adecuadas implican tiempos o rapideces. Estos problemas generarán ecuaciones fraccionarias para resolver.

PROBLEMA 1

Un avión viaja a 2050 millas en el mismo tiempo que un automóvil recorre 260 millas. Si la rapidez del avión es 358 millas por hora mayor que la tasa del automóvil, encuentre la rapidez de cada uno.

Solución

Sea r la rapidez del automóvil. Entonces $r + 358$ representa la rapidez del avión. El hecho de que los tiempos sean iguales puede ser una guía. Recuerde de la fórmula básica, $d = rt$, que $t = \frac{d}{r}$.



$$2050r = 260(r + 358)$$
$$2050r = 260r + 93\,080$$
$$1790r = 93\,080$$
$$r = 52$$

Si $r = 52$, entonces $r + 358$ es igual a 410. Por ende, la rapidez del automóvil es 52 millas por hora, y la rapidez del avión es 410 millas por hora. ■

PROBLEMA 2

Un tren de mercancías tarda 2 horas más en recorrer 300 millas de lo que tarda un tren expreso en recorrer 280 millas. La rapidez del expreso es 20 millas por hora mayor que la rapidez del tren de mercancías. Encuentre los tiempos y rapideces de ambos trenes.

Solución

Sea t el tiempo del tren expreso. Entonces $t + 2$ representa el tiempo del tren de mercancías. Registre la información de este problema en una tabla.

	Distancia	Tiempo	Rapidez $= \dfrac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$
Tren expreso	280	t	$\dfrac{280}{t}$
Tren de mercancías	300	$t + 2$	$\dfrac{300}{t + 2}$

El hecho de que la rapidez del tren expreso sea 20 millas por hora mayor que la rapidez del tren de mercancías puede ser una guía.

Rapidez del expreso — Igual — Rapidez del tren de mercancías más 20

$$\frac{280}{t} = \frac{300}{t + 2} + 20$$
$$t(t + 2)\left(\frac{280}{t}\right) = t(t + 2)\left(\frac{300}{t + 2} + 20\right)$$
$$280(t + 2) = 300t + 20t(t + 2)$$
$$280t + 560 = 300t + 20t^2 + 40t$$
$$280t + 560 = 340t + 20t^2$$
$$0 = 20t^2 + 60t - 560$$
$$0 = t^2 + 3t - 28$$
$$0 = (t + 7)(t - 4)$$
$$t + 7 = 0 \quad \text{o} \quad t - 4 = 0$$
$$t = -7 \quad \text{o} \quad t = 4$$

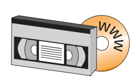
La solución negativa se debe desechar, así que el tiempo del tren expreso (t) es 4 horas, y el tiempo del tren de mercancías ($t + 2$) es 6 horas. La rapidez del tren expreso $\left(\frac{280}{t}\right)$ es $\frac{280}{4} =$ 70 millas por hora, y la rapidez del tren de mercancías $\left(\frac{300}{t+2}\right)$ es $\frac{300}{6} =$ 50 millas por hora. ■

Observaciones: Note que, para resolver el problema 1, se fue directamente a una guía sin el uso de una tabla, pero para el problema 2 se usó una tabla. De nuevo, recuerde que se trata de una preferencia personal; simplemente se le presentan varias técnicas.

Los problemas de movimiento uniforme son un caso especial de un grupo mayor de problemas que se conocen como **problemas rapidez-tiempo**. Por ejemplo, si cierta máquina puede producir 150 artículos en 10 minutos, entonces se dice que la máquina produce a una rapidez de $\frac{150}{10} = 15$ artículos por minuto. Del mismo modo, si una persona puede hacer cierto trabajo en 3 horas, entonces, si supone una rapidez constante de trabajo, se dice que la persona trabaja a una rapidez de $\frac{1}{3}$ del trabajo por hora. En general, si Q es la cantidad de algo realizado en t unidades de tiempo, entonces la rapidez, r, está dada por $r = \frac{Q}{t}$. La rapidez se enuncia en términos de *tanta cantidad por unidad de tiempo*. (En los problemas de movimiento uniforme, la "cantidad" es distancia.) Considere algunos ejemplos de problemas rapidez-tiempo.

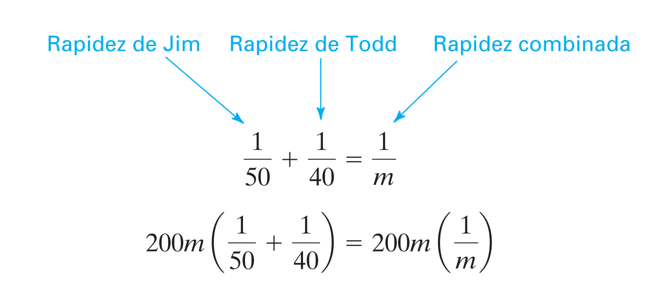
PROBLEMA 3

Si Jim poda un terreno en 50 minutos y su hijo, Todd, poda el mismo terreno en 40 minutos, ¿cuánto tardarán en podar el terreno si trabajan juntos?



Solución

La rapidez de Jim es $\frac{1}{50}$ del terreno por minuto, y la rapidez de Todd es $\frac{1}{40}$ del terreno por minuto. Si m representa el número de minutos que trabajan juntos, entonces $\frac{1}{m}$ representa su tasa cuando trabajan juntos. Por tanto, puesto que la suma de las rapideces individuales debe ser igual a la rapidez de trabajar juntos, se puede establecer y resolver la siguiente ecuación.



$$\frac{1}{50} + \frac{1}{40} = \frac{1}{m}$$

$$200m\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{40}\right) = 200m\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$4m + 5m = 200$$
$$9m = 200$$
$$m = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$$

Debe tomarles $22\frac{2}{9}$ minutos. ■

PROBLEMA 4

Al trabajar juntas, Linda y Kathy pueden escribir un ensayo en $3\frac{3}{5}$ horas. Si Linda lo escribe en 6 horas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a Kathy escribirlo?

Solución

Su rapidez al trabajar juntas es $\frac{1}{3\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{18}{5}} = \frac{5}{18}$ del trabajo por hora, y la rapidez de Linda es $\frac{1}{6}$ del trabajo por hora. Si h representa el número de horas que tomaría a Kathy realizar el trabajo por ella misma, entonces su rapidez es $\frac{1}{h}$ del trabajo por hora. Por ende, se tiene

Rapidez de Linda → $\frac{1}{6}$, Rapidez de Kathy → $\frac{1}{h}$, Rapidez combinada → $\frac{5}{18}$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{h} = \frac{5}{18}$$

Resolver esta ecuación produce

$$18h\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{h}\right) = 18h\left(\frac{5}{18}\right)$$
$$3h + 18 = 5h$$
$$18 = 2h$$
$$9 = h$$

A Kathy le tomaría 9 horas escribir el ensayo por sí sola. ■

El ejemplo final de esta sección ilustra otro método que algunas personas encuentran significativo para problemas de rapidez-tiempo. Para este método piense en términos de partes fraccionarias del trabajo. Por ejemplo, si una persona realiza cierto trabajo en 5 horas, entonces al final de 2 horas habrá realizado $\frac{2}{5}$ del trabajo. (De nuevo, suponga una rapidez constante de trabajo.) Al final de 4 horas, habrá finalizado $\frac{4}{5}$ del trabajo; y, en general, al final de h horas, habrá realizado $\frac{h}{5}$ del trabajo. Entonces, tal como en los problemas de movimiento, donde la distan-

cia es igual a la rapidez por el tiempo, aquí la parte fraccionaria realizada es igual a la tasa de trabajo por el tiempo. Vea cómo funciona esto en un problema.

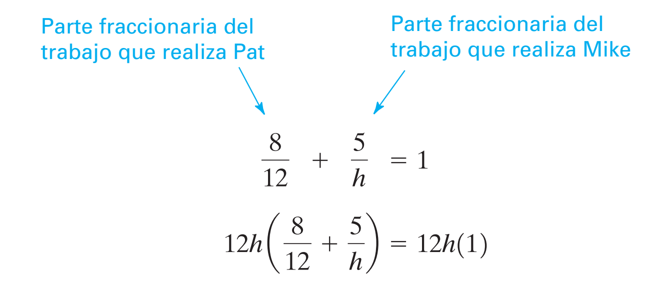
PROBLEMA 5

A Pat le toma 12 horas completar una tarea. Después de haber trabajado 3 horas, se le une su hermano Mike y juntos terminan la tarea en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría Mike en realizar el trabajo?

Solución

Sea h el número de horas que a Mike le tomaría realizar el trabajo. La parte fraccionaria del trabajo que Pat realiza es igual a su tasa de trabajo por su tiempo. Puesto que a Pat le toma 12 horas realizar todo el trabajo, su tasa de trabajo es $\frac{1}{12}$. Él trabaja durante 8 horas (3 horas antes de Mike y luego 5 horas con Mike). Por tanto, la parte de Pat del trabajo es $\frac{1}{12}(8) = \frac{8}{12}$. La parte fraccionaria del trabajo que Mike realiza es igual a su tasa de trabajo por su tiempo. Puesto que h representa el tiempo de Mike para realizar todo el trabajo, su tasa de trabajo es $\frac{1}{h}$; él trabaja durante 5 horas. Por tanto, la parte de trabajo de Mike es $\frac{1}{h}(5) = \frac{5}{h}$. Sumar las dos partes fraccionarias resulta en 1 trabajo completo realizado. A continuación esta información también se muestra en forma de tabla y se establece una guía. Entonces se puede establecer y resolver la ecuación.

	Tiempo para realizar todo el trabajo	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte fraccionaria del trabajo realizado
Pat	12	$\frac{1}{12}$	8	$\frac{8}{12}$
Mike	h	$\frac{1}{h}$	5	$\frac{5}{h}$



$$\frac{8}{12} + \frac{5}{h} = 1$$

$$12h\left(\frac{8}{12} + \frac{5}{h}\right) = 12h(1)$$

$$12h\left(\frac{8}{12}\right) + 12h\left(\frac{5}{h}\right) = 12h$$

$$8h + 60 = 12h$$

$$60 = 4h$$

$$15 = h$$

A Mike le tomaría 15 horas hacer todo el trabajo. ■

Conjunto de problemas 4.7

Para los problemas 1-30 resuelva cada ecuación.

1. $\dfrac{x}{4x-4} + \dfrac{5}{x^2-1} = \dfrac{1}{4}$

2. $\dfrac{x}{3x-6} + \dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{1}{3}$

3. $3 + \dfrac{6}{t-3} = \dfrac{6}{t^2-3t}$

4. $2 + \dfrac{4}{t-1} = \dfrac{4}{t^2-t}$

5. $\dfrac{3}{n-5} + \dfrac{4}{n+7} = \dfrac{2n+11}{n^2+2n-35}$

6. $\dfrac{2}{n+3} + \dfrac{3}{n-4} = \dfrac{2n-1}{n^2-n-12}$

7. $\dfrac{5x}{2x+6} - \dfrac{4}{x^2-9} = \dfrac{5}{2}$

8. $\dfrac{3x}{5x+5} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{3}{5}$

9. $1 + \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n^2-n}$

10. $3 + \dfrac{9}{n-3} = \dfrac{27}{n^2-3n}$

11. $\dfrac{2}{n-2} - \dfrac{n}{n+5} = \dfrac{10n+15}{n^2+3n-10}$

12. $\dfrac{n}{n+3} + \dfrac{1}{n-4} = \dfrac{11-n}{n^2-n-12}$

13. $\dfrac{2}{2x-3} - \dfrac{2}{10x^2-13x-3} = \dfrac{x}{5x+1}$

14. $\dfrac{1}{3x+4} + \dfrac{6}{6x^2+5x-4} = \dfrac{x}{2x-1}$

15. $\dfrac{2x}{x+3} - \dfrac{3}{x-6} = \dfrac{29}{x^2-3x-18}$

16. $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{2}{x+8} = \dfrac{63}{x^2+4x-32}$

17. $\dfrac{a}{a-5} + \dfrac{2}{a-6} = \dfrac{2}{a^2-11a+30}$

18. $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{3}{a+4} = \dfrac{14}{a^2+6a+8}$

19. $\dfrac{-1}{2x-5} + \dfrac{2x-4}{4x^2-25} = \dfrac{5}{6x+15}$

20. $\dfrac{-2}{3x+2} + \dfrac{x-1}{9x^2-4} = \dfrac{3}{12x-8}$

21. $\dfrac{7y+2}{12y^2+11y-15} - \dfrac{1}{3y+5} = \dfrac{2}{4y-3}$

22. $\dfrac{5y-4}{6y^2+y-12} - \dfrac{2}{2y+3} = \dfrac{5}{3y-4}$

23. $\dfrac{2n}{6n^2+7n-3} - \dfrac{n-3}{3n^2+11n-4} = \dfrac{5}{2n^2+11n+12}$

24. $\dfrac{x+1}{2x^2+7x-4} - \dfrac{x}{2x^2-7x+3} = \dfrac{1}{x^2+x-12}$

25. $\dfrac{1}{2x^2-x-1} + \dfrac{3}{2x^2+x} = \dfrac{2}{x^2-1}$

26. $\dfrac{2}{n^2+4n} + \dfrac{3}{n^2-3n-28} = \dfrac{5}{n^2-6n-7}$

27. $\dfrac{x+1}{x^3-9x} - \dfrac{1}{2x^2+x-21} = \dfrac{1}{2x^2+13x+21}$

28. $\dfrac{x}{2x^2+5x} - \dfrac{x}{2x^2+7x+5} = \dfrac{2}{x^2+x}$

29. $\dfrac{4t}{4t^2-t-3} + \dfrac{2-3t}{3t^2-t-2} = \dfrac{1}{12t^2+17t+6}$

30. $\dfrac{2t}{2t^2+9t+10} + \dfrac{1-3t}{3t^2+4t-4} = \dfrac{4}{6t^2+11t-10}$

Para los problemas 31-44 resuelva cada ecuación para la variable indicada.

31. $y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{9}$ para x

32. $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$ para x

33. $\frac{-2}{x - 4} = \frac{5}{y - 1}$ para y

34. $\frac{7}{y - 3} = \frac{3}{x + 1}$ para y

35. $I = \frac{100M}{C}$ para M

36. $V = C\left(1 - \frac{T}{N}\right)$ para T

37. $\frac{R}{S} = \frac{T}{S + T}$ para R

38. $\frac{1}{R} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T}$ para R

39. $\frac{y - 1}{x - 3} = \frac{b - 1}{a - 3}$ para y

40. $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}$ para x

41. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ para y

42. $\frac{y - b}{x} = m$ para y

43. $\frac{y - 1}{x + 6} = \frac{-2}{3}$ para y

44. $\frac{y + 5}{x - 2} = \frac{3}{7}$ para y

Establezca una ecuación y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

45. Kent conduce su Mazda 270 millas en el mismo tiempo que a Dave le toma conducir su Nissan 250 millas. Si Kent promedia 4 millas por hora más rápido que Dave, encuentre sus rapideces.

46. Suponga que Wendy recorre en su bicicleta 30 millas en el mismo tiempo que a Kim le toma recorrer 20 millas con su bicicleta. Si Wendy viaja 5 millas por hora más rápido que Kim, encuentre la rapidez de cada una.

47. Una tubería de entrada puede llenar un tanque (vea la figura 4.2) en 10 minutos. Un desagüe vacía el tanque en 12 minutos. Si el tanque está vacío, y tanto la entrada como el desagüe están abiertos, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que el tanque se desborde?

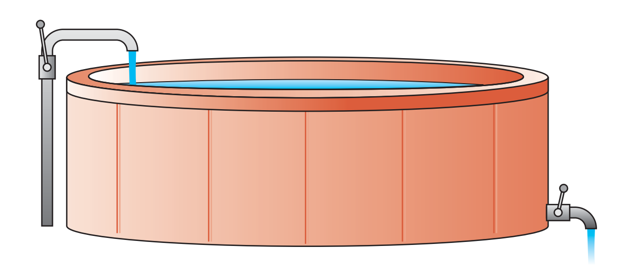


Figura 4.2

48. Barry hace cierto trabajo en 3 horas, mientras que a Sánchez le toma 5 horas hacer el mismo trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarían en hacer el trabajo laborando juntos?

49. Connie escribe 600 palabras en 5 minutos menos de lo que Katie tarda en escribir 600 palabras. Si Connie escribe a una tasa de 20 palabras por minuto más rápido que Katie, encuentre la rapidez de escritura de cada una.

50. Walt poda un terreno en una hora y su hijo, Malik, poda el mismo terreno en 50 minutos. Un día Malik comienza a podar el terreno y trabaja durante 30 minutos. Luego Walt se le une y ambos terminan el terreno. ¿Cuánto tiempo tardan en terminar de podar el terreno después de que Walt comienza a ayudar?

51. El avión A recorre 1400 millas en una hora menos que el tiempo que tarda el avión B en recorrer 2000 millas. La rapidez del avión B es 50 millas por hora mayor que la rapidez del avión A. Encuentre los tiempos y rapideces de ambos aviones.

52. Para recorrer 60 millas Sue, quien viaja en ciclomotor, tarda 2 horas menos que el tiempo que Doreen tarda en recorrer 50 millas montada en bicicleta. Sue viaja 10 millas por hora más rápido que Doreen. Encuentre los tiempos y rapideces de ambas chicas.

53. Amy tarda el doble de tiempo en entregar documentos de lo que tarda Nancy. ¿Cuánto tardará cada chica en entregar los documentos, si ambas pueden entregar los documentos juntas en 40 minutos?

54. Si dos tuberías de entrada están abiertas y llenan una alberca en una hora y 12 minutos. Una de las tuberías llena la alberca en 2 horas. ¿Cuánto tardará la otra tubería en llenar la alberca?

55. Rod está de acuerdo en podar un solar vacío por $12. Le toma una hora más de lo que había anticipado, así que ganó $1 por hora menos de lo que originalmente había calculado. ¿Cuánto había anticipado que le tomaría podar el solar?

56. La semana pasada Al compró algunas bolas de golf por $20. Al día siguiente estuvieron en venta por $0.50 menos por bola, y compró $22.50 en bolas. Si el segundo día compró 5 bolas más que el primer día, ¿cuántas compró cada día y a qué precio por bola?

57. En el campo Debbie recorrió en su bicicleta una distancia de 24 millas. En el camino de regreso tomó una ruta mucho más corta de 12 millas e hizo el viaje de regreso en media hora menos. Si su rapidez en el campo fue de 4 millas por hora mayor que su tasa en el viaje de regreso, encuentre ambas rapideces.

58. Felipe trota durante 10 millas y luego camina otras 10 millas. Trota $2\frac{1}{2}$ millas por hora más rápido de lo que caminó, y la distancia total de 20 millas la recorre en 6 horas. Encuentre la rapidez a la que camina y la rapidez a la que trota.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

59. ¿Por qué es importante considerar más de una forma de resolver un problema?

60. Escriba un párrafo o dos que resuman las nuevas ideas acerca de la resolución de problemas que adquirió hasta el momento en este curso.

Capítulo 4 Resumen

(4.1) Cualquier número que se pueda escribir en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$, se llama **número racional**.

Una **expresión racional** se define como el cociente indicado de dos polinomios. Las siguientes propiedades pertenecen a números racionales y expresiones racionales.

1. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

2. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

3. $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$ Principio fundamental de las fracciones

(4.2) La multiplicación y la división de expresiones racionales se basan en las siguientes definiciones:

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Multiplicación

2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ División

(4.3) La suma y la resta de expresiones racionales se basan en las siguientes definiciones:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$ Suma

2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$ Resta

(4.4) El siguiente procedimiento básico se usa para sumar o restar expresiones racionales:

1. Factorice los denominadores.
2. Encuentre el MCD.
3. Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga el MCD como su denominador.
4. Combine los numeradores y coloque sobre el MCD.
5. Simplifique al realizar la suma o resta.
6. Busque maneras de reducir la fracción resultante.

Las formas fraccionarias que contengan números racionales o expresiones racionales en los numeradores y/o denominadores se llaman **fracciones complejas**. El principio fundamental de las fracciones sirve como base para simplificar fracciones complejas.

(4.5) Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio. El procedimiento para dividir un polinomio entre un polinomio, en lugar de entre un monomio, recuerda al proceso de división larga en aritmética. (Vea los ejemplos en la sección 4.5.) La división sintética es un atajo al proceso de división largo cuando el divisor es de la forma $x - k$.

(4.6) **Para resolver una ecuación fraccionaria**, con frecuencia es más sencillo comenzar por multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD de todos los denominadores en la ecuación. Si una ecuación contiene una variable en uno o más denominadores, entonces debe tener cuidado para evitar cualquier valor de la variable que haga cero al denominador.

Una **razón** es la comparación de dos números mediante división. Un enunciado de igualdad entre dos razones es una **proporción**.

Algunas ecuaciones fraccionarias se pueden tratar como proporciones, y se les puede resolver al aplicar la siguiente propiedad. Esta propiedad con frecuencia se llama propiedad de **multiplicación cruzada**:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc.$$

(4.7) Las técnicas que se utilizan para resolver ecuaciones fraccionarias también sirven para cambiar la forma de las fórmulas que contienen expresiones racionales de modo que dichas fórmulas se puedan usar para resolver problemas.

Capítulo 4 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-6 simplifique cada expresión racional.

1. $\dfrac{26x^2y^3}{39x^4y^2}$

2. $\dfrac{a^2 - 9}{a^2 + 3a}$

3. $\dfrac{n^2 - 3n - 10}{n^2 + n - 2}$

4. $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x}$

5. $\dfrac{8x^3 - 2x^2 - 3x}{12x^2 - 9x}$

6. $\dfrac{x^4 - 7x^2 - 30}{2x^4 + 7x^2 + 3}$

Para los problemas 7-10 simplifique cada fracción compleja.

7. $\dfrac{\dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{4}}$

8. $\dfrac{\dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{3y}}{\dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{4y}}$

9. $\dfrac{\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}}{\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}}$

10. $1 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{x}}$

Para los problemas 11-22 realice las operaciones indicadas y exprese sus respuestas en la forma más simple.

11. $\dfrac{6xy^2}{7y^3} \div \dfrac{15x^2y}{5x^2}$

12. $\dfrac{9ab}{3a + 6} \cdot \dfrac{a^2 - 4a - 12}{a^2 - 6a}$

13. $\dfrac{n^2 + 10n + 25}{n^2 - n} \cdot \dfrac{5n^3 - 3n^2}{5n^2 + 22n - 15}$

14. $\dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 9y^2} \div \dfrac{2x^2 + xy - y^2}{2x^2 - xy}$

15. $\dfrac{2x + 1}{5} + \dfrac{3x - 2}{4}$

16. $\dfrac{3}{2n} + \dfrac{5}{3n} - \dfrac{1}{9}$

17. $\dfrac{3x}{x + 7} - \dfrac{2}{x}$

18. $\dfrac{10}{x^2 - 5x} + \dfrac{2}{x}$

19. $\dfrac{3}{n^2 - 5n - 36} + \dfrac{2}{n^2 + 3n - 4}$

20. $\dfrac{3}{2y + 3} + \dfrac{5y - 2}{2y^2 - 9y - 18} - \dfrac{1}{y - 6}$

21. $(18x^2 + 9x - 2) \div (3x + 2)$

22. $(3x^3 + 5x^2 - 6x - 2) \div (x + 4)$

Para los problemas 23-32 resuelva cada ecuación.

23. $\dfrac{4x + 5}{3} + \dfrac{2x - 1}{5} = 2$

24. $\dfrac{3}{4x} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{10x}$

25. $\dfrac{a}{a - 2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{a - 2}$

26. $\dfrac{4}{5y - 3} = \dfrac{2}{3y + 7}$

27. $n + \dfrac{1}{n} = \dfrac{53}{14}$

28. $\dfrac{1}{2x - 7} + \dfrac{x - 5}{4x^2 - 49} = \dfrac{4}{6x - 21}$

29. $\dfrac{x}{2x + 1} - 1 = \dfrac{-4}{7(x - 2)}$

30. $\dfrac{2x}{-5} = \dfrac{3}{4x - 13}$

31. $\dfrac{2n}{2n^2 + 11n - 21} - \dfrac{n}{n^2 + 5n - 14} = \dfrac{3}{n^2 + 5n - 14}$

32. $\dfrac{2}{t^2 - t - 6} + \dfrac{t + 1}{t^2 + t - 12} = \dfrac{t}{t^2 + 6t + 8}$

33. Resuelva $\dfrac{y - 6}{x + 1} = \dfrac{3}{4}$ para y.

34. Resuelva $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 1$ para y.

Para los problemas 35-40 establezca una ecuación y resuelva el problema.

35. Una suma de \$1400 se divide entre dos personas en la razón de $\dfrac{3}{5}$. ¿Cuánto recibe cada persona?

36. Al trabajar juntos, Dan y Julio podan un solar en 12 minutos. Julio poda el solar en 10 minutos menos del tiempo que le toma a Dan. ¿Cuánto tarda cada uno en podar el solar?

37. Suponga que el automóvil A recorre 250 millas en 3 horas menos que el tiempo que le toma al automóvil B recorrer 440 millas. La rapidez del automóvil B es 5 millas por hora más rápido que el A. Encuentre las rapideces de ambos.

38. Mark pone a punto un motor en 20 horas y Phil hace el mismo trabajo en 30 horas. Si ambos trabajan juntos durante cierto tiempo, y luego Mark termina el trabajo en 5 horas, ¿cuánto tiempo trabajan juntos?

39. Kelly fue contratado para pintar una casa por $640. Le tomó 20 horas más de lo que había anticipado, así que ganó $1.60 por hora menos de lo que había calculado. ¿Cuánto tiempo había anticipado que le tomaría pintar la casa?

40. Nasser recorrió en su bicicleta 66 millas en $4\frac{1}{2}$ horas. Durante las primeras 40 millas promedió cierta rapidez, y luego durante las últimas 26 millas redujo su rapidez en 3 millas por hora. Encuentre su rapidez durante las últimas 26 millas.

Capítulo 4 Examen

Para los problemas 1-4 simplifique cada expresión racional.

1. $\dfrac{39x^2y^3}{72x^3y}$

2. $\dfrac{3x^2 + 17x - 6}{x^3 - 36x}$

3. $\dfrac{6n^2 - 5n - 6}{3n^2 + 14n + 8}$

4. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^2 - 1}$

Para los problemas 5-13 realice las operaciones indicadas y exprese sus respuestas en la forma más simple.

5. $\dfrac{5x^2y}{8x} \cdot \dfrac{12y^2}{20xy}$

6. $\dfrac{5a + 5b}{20a + 10b} \cdot \dfrac{a^2 - ab}{2a^2 + 2ab}$

7. $\dfrac{3x^2 + 10x - 8}{5x^2 + 19x - 4} \div \dfrac{3x^2 - 23x + 14}{x^2 - 3x - 28}$

8. $\dfrac{3x - 1}{4} + \dfrac{2x + 5}{6}$

9. $\dfrac{5x - 6}{3} - \dfrac{x - 12}{6}$

10. $\dfrac{3}{5n} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3n}$

11. $\dfrac{3x}{x - 6} + \dfrac{2}{x}$

12. $\dfrac{9}{x^2 - x} - \dfrac{2}{x}$

13. $\dfrac{3}{2n^2 + n - 10} + \dfrac{5}{n^2 + 5n - 14}$

14. Divida $3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$ entre $x + 4$.

15. Simplifique la fracción compleja $\dfrac{\dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{6}}{\dfrac{2}{3x} + \dfrac{3}{4}}$.

16. Resuelva $\dfrac{x + 2}{y - 4} = \dfrac{3}{4}$ para y.

Para los problemas 17-22 resuelva cada ecuación.

17. $\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{x + 2}{5} = -\dfrac{3}{5}$

18. $\dfrac{5}{4x} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{5x}$

19. $\dfrac{-3}{4n - 1} = \dfrac{-2}{3n + 11}$

20. $n - \dfrac{5}{n} = 4$

21. $\dfrac{6}{x - 4} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{8}{x - 4}$

22. $\dfrac{1}{3x - 1} + \dfrac{x - 2}{9x^2 - 1} = \dfrac{7}{6x - 2}$

Para los problemas 23-25 establezca una ecuación y resuelva el problema.

23. El denominador de un número racional es 9 menos que tres veces el numerador. El número en la forma más simple es $\dfrac{3}{8}$. Encuentre el número.

24. A Jodi le toma tres veces más tiempo entregar documentos del que le toma a Jannie. Juntas pueden entregar los documentos en 15 minutos. ¿Cuánto tardaría Jodi?

25. René recorre en su bicicleta 60 millas en una hora menos del tiempo que le toma a Sue recorrer 60 millas. La rapidez de René es 3 millas por hora más que la rapidez de Sue. Encuentre la rapidez de René.

5

Exponentes y radicales

Al conocer el tiempo que el péndulo tarda en quedar en balance tras ir de un lado al otro y de regreso, se puede resolver la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, *para encontrar la longitud del péndulo.*

¿Cuánto tardará un péndulo que mide 1.5 pies de largo en quedar en balance tras ir de un lado al otro y de regreso? Se puede usar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ para determinar que tardará aproximadamente 1.4 segundos.

En matemáticas no es raro encontrar dos conceptos con desarrollo separado que tienen estrecha relación uno con el otro. En este capítulo primero se expondrán el concepto de exponente y a continuación el de raíz, y luego se mostrará cómo se combinan para ser todavía más funcionales como una idea unificada.

5.1 Uso de enteros como exponentes

Hasta el momento en el texto se usaron sólo enteros positivos como exponentes. En el capítulo 1 la expresión b^n, donde b es cualquier número real y n es un entero positivo, se definieron como

$$b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \qquad n \text{ factores de } b$$

Luego, en el capítulo 3, algunas de las partes de la siguiente propiedad sirvieron como base para manejar polinomios.

Propiedad 5.1

Si m y n son enteros positivos, y a y b son números reales (y $b \neq 0$ siempre que aparece en un denominador), entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

2. $(b^n)^m = b^{mn}$

3. $(ab)^n = a^n b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ cuando $n > m$

$\frac{b^n}{b^m} = 1$ cuando $n = m$

$\frac{b^n}{b^m} = \frac{1}{b^{m-n}}$ cuando $n < m$

Ahora está listo para ampliar el concepto de un exponente e incluir el uso de cero y de los enteros negativos como exponentes.

Primero considere el uso de cero como exponente. Se quiere usar cero en tal forma que las propiedades anteriores continúen siendo válidas. Si es válido $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ entonces $x^4 \cdot x^0 = x^{4+0} = x^4$. En otras palabras, x^0 *actúa como* 1 porque $x^4 \cdot x^0 = x^4$. Esta línea de razonamiento sugiere la siguiente definición.

Definición 5.1

Si b es un número real distinto de cero, entonces

$$b^0 = 1$$

De acuerdo con la definición 5.1, los siguientes enunciados son verdaderos.

$$5^0 = 1 \qquad (-413)^0 = 1$$

$$\left(\frac{3}{11}\right)^0 = 1 \qquad n^0 = 1, \quad n \neq 0$$

$$(x^3y^4)^0 = 1, \quad x \neq 0, y \neq 0$$

Puede usar una línea de razonamiento similar con el fin de generar una definición para el uso de enteros negativos como exponentes. Considere el ejemplo $x^4 \cdot x^{-4}$. Si $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ es válido, entonces $x^4 \cdot x^{-4} = x^{4+(-4)} = x^0 = 1$. Por tanto, x^{-4} debe ser el recíproco de x^4, porque su producto es 1. Esto es,

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Esto sugiere la siguiente definición general.

Definición 5.2

Si n es un entero positivo, y b es un número real distinto de cero, entonces

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

De acuerdo con la definición 5.2, todos los siguientes enunciados son verdaderos.

$$x^{-5} = \frac{1}{x^5} \qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \quad \text{o} \quad 0.01 \qquad \frac{2}{x^{-3}} = \frac{2}{\frac{1}{x^3}} = (2)\left(\frac{x^3}{1}\right) = 2x^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$$

Se puede verificar (aunque está más allá del ámbito de este texto) que todas las partes de la propiedad 5.1 son válidas para *todos los enteros*. De hecho, la siguiente igualdad puede sustituir los tres enunciados separados de la parte (5).

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} \quad \text{para todo entero } n \text{ y } m$$

Reformule la propiedad 5.1 con el fin de que sea válida para todos los enteros e incluya, a la derecha, una "etiqueta" para fácil referencia.

Propiedad 5.2

Si m y n son enteros, y a y b son números reales (y $b \neq 0$ siempre que aparezca en un denominador), entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$	Producto de dos potencias
2. $(b^n)^m = b^{mn}$	Potencia de una potencia
3. $(ab)^n = a^n b^n$	Potencia de un producto
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Potencia de un cociente
5. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$	Cociente de dos potencias

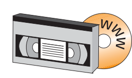
Usar todos los enteros como exponentes le permite trabajar con una gran variedad de expresiones numéricas y algebraicas. Considere algunos ejemplos que ilustran el uso de las partes de la propiedad 5.2.

EJEMPLO 1

Simplifique cada una de las siguientes expresiones numéricas.

(a) $10^{-3} \cdot 10^2$ **(b)** $(2^{-3})^{-2}$ **(c)** $(2^{-1} \cdot 3^2)^{-1}$

(d) $\left(\frac{2^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-1}$ **(e)** $\frac{10^{-2}}{10^{-4}}$



Solución

(a) $10^{-3} \cdot 10^2 = 10^{-3+2}$ Producto de dos potencias

$= 10^{-1}$

$= \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$

(b) $(2^{-3})^{-2} = 2^{(-2)(-3)}$ Potencia de una potencia

$= 2^6 = 64$

(c) $(2^{-1} \cdot 3^2)^{-1} = (2^{-1})^{-1}(3^2)^{-1}$ Potencia de un producto

$= 2^1 \cdot 3^{-2}$

$= \frac{2^1}{3^2} = \frac{2}{9}$

(d) $\left(\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-1} = \dfrac{(2^{-3})^{-1}}{(3^{-2})^{-1}}$ Potencia de un cociente

$= \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$

(e) $\dfrac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^{-2-(-4)}$ Cociente de dos potencias

$= 10^2 = 100$ ■

EJEMPLO 2

Simplifique cada una de las siguientes expresiones; exprese los resultados finales sin usar cero ni enteros negativos como exponentes.

(a) $x^2 \cdot x^{-5}$ **(b)** $(x^{-2})^4$ **(c)** $(x^2y^{-3})^{-4}$

(d) $\left(\dfrac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-2}$ **(e)** $\dfrac{x^{-4}}{x^{-2}}$

Solución

(a) $x^2 \cdot x^{-5} = x^{2+(-5)}$ Producto de dos potencias

$= x^{-3}$

$= \dfrac{1}{x^3}$

(b) $(x^{-2})^4 = x^{4(-2)}$ Potencia de una potencia

$= x^{-8}$

$= \dfrac{1}{x^8}$

(c) $(x^2y^{-3})^{-4} = (x^2)^{-4}(y^{-3})^{-4}$ Potencia de un producto

$= x^{-4(2)}y^{-4(-3)}$

$= x^{-8}y^{12}$

$= \dfrac{y^{12}}{x^8}$

(d) $\left(\dfrac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-2} = \dfrac{(a^3)^{-2}}{(b^{-5})^{-2}}$ Potencia de un cociente

$= \dfrac{a^{-6}}{b^{10}}$

$= \dfrac{1}{a^6b^{10}}$

(e) $\dfrac{x^{-4}}{x^{-2}} = x^{-4-(-2)}$ Cociente de dos potencias

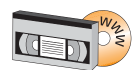
$= x^{-2}$

$= \dfrac{1}{x^2}$ ■

EJEMPLO 3

Encuentre los productos y cocientes indicados; exprese sus resultados sólo con exponentes enteros positivos.

(a) $(3x^2y^{-4})(4x^{-3}y)$ **(b)** $\dfrac{12a^3b^2}{-3a^{-1}b^5}$ **(c)** $\left(\dfrac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}\right)^{-1}$



Solución

(a) $(3x^2y^{-4})(4x^{-3}y) = 12x^{2+(-3)}y^{-4+1}$

$= 12x^{-1}y^{-3}$

$= \dfrac{12}{xy^3}$

(b) $\dfrac{12a^3b^2}{-3a^{-1}b^5} = -4a^{3-(-1)}b^{2-5}$

$= -4a^4b^{-3}$

$= -\dfrac{4a^4}{b^3}$

(c) $\left(\dfrac{15x^{-1}y^2}{5xy^{-4}}\right)^{-1} = (3x^{-1-1}y^{2-(-4)})^{-1}$ Note que primero se simplifica dentro de los paréntesis.

$= (3x^{-2}y^6)^{-1}$

$= 3^{-1}x^2y^{-6}$

$= \dfrac{x^2}{3y^6}$ ■

Los ejemplos finales de esta sección muestran la simplificación de expresiones numéricas y algebraicas que implican sumas y diferencias. En tales casos use la definición 5.2 para cambiar de exponentes negativos a positivos, de modo que se proceda en la forma usual.

EJEMPLO 4

Simplifique $2^{-3} + 3^{-1}$

Solución

$$2^{-3} + 3^{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^1}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{3}$$

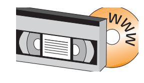
$$= \frac{3}{24} + \frac{8}{24} \qquad \text{Use 24 como MCD.}$$

$$= \frac{11}{24}$$

■

EJEMPLO 5

Simplifique $(4^{-1} - 3^{-2})^{-1}$



Solución

$$(4^{-1} - 3^{-2})^{-1} = \left(\frac{1}{4^1} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1} \qquad \text{Aplique } b^{-n} = \frac{1}{b^n} \text{ a } 4^{-1} \text{ y a } 3^{-2}.$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{9}{36} - \frac{4}{36}\right)^{-1} \qquad \text{Use 36 como MCD.}$$

$$= \left(\frac{5}{36}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{5}{36}\right)^1} \qquad \text{Aplique } b^{-n} = \frac{1}{b^n}.$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{36}} = \frac{36}{5}$$

■

EJEMPLO 6

Exprese $a^{-1} + b^{-2}$ como una sola fracción que implique solamente exponentes positivos.

Solución

$$a^{-1} + b^{-2} = \frac{1}{a^1} + \frac{1}{b^2} \qquad \text{Use } ab^2 \text{ como MCD.}$$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b^2}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{a}{a}\right) \qquad \text{Cambie a fracciones equivalentes con } ab^2 \text{ como MCD.}$$

$$= \frac{b^2}{ab^2} + \frac{a}{ab^2}$$

$$= \frac{b^2 + a}{ab^2}$$

■

Conjunto de problemas 5.1

Para los problemas 1-42 simplifique cada expresión numérica.

1. 3^{-3}
2. 2^{-4}
3. -10^{-2}
4. 10^{-3}
5. $\frac{1}{3^{-4}}$
6. $\frac{1}{2^{-6}}$
7. $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
9. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$
10. $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$
11. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{0}$
12. $\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}$
13. $\frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}$
14. $-\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$
15. $2^7 \cdot 2^{-3}$
16. $3^{-4} \cdot 3^6$
17. $10^{-5} \cdot 10^2$
18. $10^4 \cdot 10^{-6}$
19. $10^{-1} \cdot 10^{-2}$
20. $10^{-2} \cdot 10^{-2}$
21. $(3^{-1})^{-3}$
22. $(2^{-2})^{-4}$
23. $(5^3)^{-1}$
24. $(3^{-1})^3$
25. $(2^3 \cdot 3^{-2})^{-1}$
26. $(2^{-2} \cdot 3^{-1})^{-3}$
27. $(4^2 \cdot 5^{-1})^2$
28. $(2^{-3} \cdot 4^{-1})^{-1}$
29. $\left(\frac{2^{-1}}{5^{-2}}\right)^{-1}$
30. $\left(\frac{2^{-4}}{3^{-2}}\right)^{-2}$
31. $\left(\frac{2^{-1}}{3^{-2}}\right)^{2}$
32. $\left(\frac{3^2}{5^{-1}}\right)^{-1}$
33. $\frac{3^3}{3^{-1}}$
34. $\frac{2^{-2}}{2^3}$
35. $\frac{10^{-2}}{10^2}$
36. $\frac{10^{-2}}{10^{-5}}$
37. $2^{-2} + 3^{-2}$
38. $2^{-4} + 5^{-1}$
39. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
40. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
41. $(2^{-3} + 3^{-2})^{-1}$
42. $(5^{-1} - 2^{-3})^{-1}$

Para los problemas 43-62 simplifique cada expresión. Exprese los resultados finales sin usar cero o enteros negativos como exponentes.

43. $x^2 \cdot x^{-8}$
44. $x^{-3} \cdot x^{-4}$
45. $a^3 \cdot a^{-5} \cdot a^{-1}$
46. $b^{-2} \cdot b^3 \cdot b^{-6}$
47. $(a^{-4})^2$
48. $(b^4)^{-3}$
49. $(x^2y^{-6})^{-1}$
50. $(x^5y^{-1})^{-3}$
51. $(ab^3c^{-2})^{-4}$
52. $(a^3b^{-3}c^{-2})^{-5}$
53. $(2x^3y^{-4})^{-3}$
54. $(4x^5y^{-2})^{-2}$
55. $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-4}}\right)^{-3}$
56. $\left(\frac{y^3}{x^{-4}}\right)^{-2}$
57. $\left(\frac{3a^{-2}}{2b^{-1}}\right)^{-2}$
58. $\left(\frac{2xy^2}{5a^{-1}b^{-2}}\right)^{-1}$
59. $\frac{x^{-6}}{x^{-4}}$
60. $\frac{a^{-2}}{a^2}$
61. $\frac{a^3b^{-2}}{a^{-2}b^{-4}}$
62. $\frac{x^{-3}y^{-4}}{x^2y^{-1}}$

Para los problemas 63-74 encuentre los productos y cocientes indicados. Exprese los resultados finales usando solamente exponentes enteros positivos.

63. $(2xy^{-1})(3x^{-2}y^4)$
64. $(-4x^{-1}y^2)(6x^3y^{-4})$
65. $(-7a^2b^{-5})(-a^{-2}b^7)$
66. $(-9a^{-3}b^{-6})(-12a^{-1}b^4)$
67. $\frac{28x^{-2}y^{-3}}{4x^{-3}y^{-1}}$
68. $\frac{63x^2y^{-4}}{7xy^{-4}}$
69. $\frac{-72a^2b^{-4}}{6a^3b^{-7}}$
70. $\frac{108a^{-5}b^{-4}}{9a^{-2}b}$
71. $\left(\frac{35x^{-1}y^{-2}}{7x^4y^3}\right)^{-1}$
72. $\left(\frac{-48ab^2}{-6a^3b^5}\right)^{-2}$
73. $\left(\frac{-36a^{-1}b^{-6}}{4a^{-1}b^4}\right)^{-2}$
74. $\left(\frac{8xy^3}{-4x^4y}\right)^{-3}$

Para los problemas 75-84 exprese cada una de las siguientes expresiones como una sola fracción que implique solamente exponentes positivos.

75. $x^{-2} + x^{-3}$

76. $x^{-1} + x^{-5}$

77. $x^{-3} - y^{-1}$

78. $2x^{-1} - 3y^{-2}$

79. $3a^{-2} + 4b^{-1}$

80. $a^{-1} + a^{-1}b^{-3}$

81. $x^{-1}y^{-2} - xy^{-1}$

82. $x^2y^{-2} - x^{-1}y^{-3}$

83. $2x^{-1} - 3x^{-2}$

84. $5x^{-2}y + 6x^{-1}y^{-2}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

85. ¿Es correcto el siguiente proceso de simplificación?

$$(3^{-2})^{-1} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^1} = 9$$

¿Podría sugerir una mejor forma de resolver el problema?

86. Explique cómo simplificar $(2^{-1} \cdot 3^{-2})^{-1}$ y también cómo simplificar $(2^{-1} + 3^{-2})^{-1}$.

MÁS INVESTIGACIÓN

87. Use una calculadora para comprobar sus respuestas para los problemas 1-42.

88. Use una calculadora para simplificar cada una de las siguientes expresiones numéricas. Exprese sus respuestas a la centésima más cercana.

(a) $(2^{-3} + 3^{-3})^{-2}$

(b) $(4^{-3} - 2^{-1})^{-2}$

(c) $(5^{-3} - 3^{-5})^{-1}$

(d) $(6^{-2} + 7^{-4})^{-2}$

(e) $(7^{-3} - 2^{-4})^{-2}$

(f) $(3^{-4} + 2^{-3})^{-3}$

5.2 Raíces y radicales

Elevar al cuadrado un número significa elevarlo a la segunda potencia; esto es: usar el número como factor dos veces.

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ Léase "cuatro al cuadrado es igual a dieciséis".

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

La **raíz cuadrada de un número** es uno de sus dos factores iguales. Por ende, 4 es una raíz cuadrada de 16, porque $4 \cdot 4 = 16$. Del mismo modo, -4 también es una

raíz cuadrada de 16 porque $(-4)(-4) = 16$. En general, a es una raíz cuadrada de b si $a^2 = b$. Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa del enunciado anterior.

1. Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas; una es positiva y la otra es negativa. Son opuestas una de otra.
2. Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas, porque cualquier número real, excepto cero, es positivo cuando se eleva al cuadrado.
3. La raíz cuadrada de 0 es 0.

El símbolo $\sqrt{}$, llamado **signo radical**, se usa para designar la raíz cuadrada no negativa. El número bajo el signo radical se llama **radicando**. Toda la expresión, como $\sqrt{16}$, se llama **radical**.

$\sqrt{16} = 4$ — $\sqrt{16}$ indica la **raíz cuadrada principal** o no negativa de 16.

$-\sqrt{16} = -4$ — $-\sqrt{16}$ indica la raíz cuadrada negativa de 16.

$\sqrt{0} = 0$ — Cero sólo tiene una raíz cuadrada. Técnicamente, se podría escribir $-\sqrt{0} = -0 = 0$.

$\sqrt{-4}$ no es un número real.

$-\sqrt{-4}$ no es un número real.

En general, es útil la siguiente definición.

Definición 5.3

Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $\sqrt{b} = a$ si y sólo si $a^2 = b$; a se llama **raíz cuadrada principal de b**.

Elevar al cubo un número significa elevarlo a la tercera potencia; esto es, usar el número como factor tres veces.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ — Léase "dos al cubo igual a ocho".

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

Una **raíz cúbica de un número** es uno de sus tres factores iguales. Por ende, 2 es una raíz cúbica de 8 porque $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. (De hecho, 2 es el único número real que es una raíz cúbica de 8.) Más aún, -2 es una raíz cúbica de -8 porque $(-2)(-2)(-2) = -8$. (De hecho, -2 es el único número real que es una raíz cúbica de -8.)

En general, a es una raíz cúbica de b si $a^3 = b$. Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa del enunciado anterior.

1. Todo número real positivo tiene un número real positivo como raíz cúbica.

2. Todo número real negativo tiene un número real negativo como raíz cúbica.

3. La raíz cúbica de 0 es 0.

Observaciones: Técnicamente, todo número real distinto de cero tiene tres raíces cúbicas, pero sólo una de ellas es un número real. Las otras dos raíces se clasifican como números complejos. Esta vez el trabajo se restringe al conjunto de números reales.

El símbolo $\sqrt[3]{\ }$ designa la raíz cúbica de un número. Por ende, puede escribir

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

En general, es útil la siguiente definición.

Definición 5.4

$\sqrt[3]{b} = a$ si y sólo si $a^3 = b$.

En la definición 5.4 si b es un número positivo, entonces a, la raíz cúbica, es un número positivo; mientras que si b es un número negativo, entonces a, la raíz cúbica, es un número negativo. El número a se llama raíz cúbica principal de b o simplemente la raíz cúbica de b.

El concepto de raíz se puede extender a las raíces cuartas, quintas, sextas y, en general, a las raíces n-ésimas.

Definición 5.5

La raíz n-ésima de b es a, si y sólo si $a^n = b$.

Se pueden hacer las siguientes generalizaciones.

Si *n* es un entero positivo par, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Todo número real positivo tiene exactamente dos raíces n-ésimas reales: una positiva y una negativa. Por ejemplo, las raíces cuartas reales de 16 son 2 y −2.

2. Los números reales negativos no tienen raíces n-ésimas reales. Por ejemplo, no hay raíces cuartas reales de −16.

Si n es un entero positivo impar mayor que 1, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Todo número real tiene exactamente una raíz n-ésima real.
2. La raíz n-ésima real de un número positivo es positiva. Por ejemplo, la quinta raíz de 32 es 2.
3. La raíz n-ésima real de un número negativo es negativa. Por ejemplo, la quinta raíz de −32 es −2.

El símbolo $\sqrt[n]{\ }$ designa la raíz n-ésima principal. Para completar la terminología, la n en el radical $\sqrt[n]{b}$ se llama índice del radical. Si $n = 2$, comúnmente se escribe $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$.

La siguiente tabla ayuda a resumir esta información con respecto a $(\sqrt[n]{b})$, donde n es un entero positivo mayor que 1.

	Si b es		
	Positivo	**Cero**	**Negativo**
n es par	$\sqrt[n]{b}$ es un número real positivo	$\sqrt[n]{b} = 0$	$\sqrt[n]{b}$ no es un número real
n es impar	$\sqrt[n]{b}$ es un número real positivo	$\sqrt[n]{b} = 0$	$\sqrt[n]{b}$ es un número real negativo

Considere los siguientes ejemplos.

$\sqrt[4]{81} = 3$	porque $3^4 = 81$
$\sqrt[5]{32} = 2$	porque $2^5 = 32$
$\sqrt[5]{-32} = -2$	porque $(-2)^5 = -32$
$\sqrt[4]{-16}$ no es un número real	porque cualquier número real, excepto cero, es positivo cuando se eleva a la cuarta potencia

La siguiente propiedad es consecuencia directa de la definición 5.5.

Propiedad 5.3

1. $(\sqrt[n]{b})^n = b$ n es cualquier entero positivo mayor que 1.
2. $\sqrt[n]{b^n} = b$ n es cualquier entero positivo mayor que 1 si $b \geq 0$; n es un entero positivo impar mayor que 1 si $b < 0$.

Puesto que las expresiones radicales en las partes (1) y (2) de la propiedad 5.3 son iguales a b, por la propiedad transitiva son iguales una a otra. Por tanto, $\sqrt[n]{b^n} = (\sqrt[n]{b})^n$.

La aritmética usualmente es más sencilla de simplificar cuando se usa la forma $(\sqrt[n]{b})^n$. Los siguientes ejemplos demuestran el uso de la propiedad 5.3.

$$\sqrt{144^2} = (\sqrt{144})^2 = 12^2 = 144$$
$$\sqrt[3]{64^3} = (\sqrt[3]{64})^3 = 4^3 = 64$$
$$\sqrt[3]{(-8)^3} = (\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$$
$$\sqrt[4]{16^4} = (\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$$

Use estos ejemplos para entender la siguiente propiedad, muy útil, de los radicales.

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$
$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = 20 \quad \text{y} \quad \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$$
$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$
$$\sqrt[3]{(-8)(27)} = \sqrt[3]{-216} = -6 \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$$

En general, se puede enunciar la siguiente propiedad.

Propiedad 5.4

$\sqrt[n]{bc} = \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ $\quad$ $\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{c}$ son números reales

La propiedad 5.4 afirma que **la raíz *n*-ésima de un producto es igual al producto de las raíces *n*-ésimas**.

Forma radical más simple

La definición de raíz *n*-ésima, junto con la propiedad 5.4, proporciona la base para cambiar radicales a la forma radical más simple. El concepto de **forma radical más simple** adquiere significado adicional conforme se encuentran expresiones más complicadas, pero por ahora simplemente significa que el radicando no contiene alguna potencia perfecta del índice. Considere algunos ejemplos para clarificar esta idea.

EJEMPLO 1

Exprese cada una de las siguientes en la forma radical más simple.

(a) $\sqrt{8}$ **(b)** $\sqrt{45}$ **(c)** $\sqrt[3]{24}$ **(d)** $\sqrt[3]{54}$

Solución

(a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

4 es un cuadrado perfecto.

(b) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

9 es un cuadrado perfecto.

(c) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

8 es un cubo perfecto.

(d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

27 es un cubo perfecto.

■

El primer paso en cada ejemplo es expresar el radicando del radical dado como el producto de dos factores, uno de los cuales debe ser una potencia *n*-ésima perfecta distinta de 1. Además, observe los radicandos de los radicales finales. En cada caso el radicando no puede tener un factor que sea una potencia *n*-ésima perfecta distinta a 1. Se dice que los radicales finales $2\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt[3]{3}$ y $3\sqrt[3]{2}$ están en su **forma radical más simple**.

Es posible variar un poco los pasos al cambiar a forma radical más simple, pero el resultado final debe ser el mismo. Considere algunos enfoques diferentes para cambiar $\sqrt{72}$ a la forma más simple:

$$\sqrt{72} = \sqrt{9}\sqrt{8} = 3\sqrt{8} = 3\sqrt{4}\sqrt{2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \quad \text{o}$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{4}\sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9}\sqrt{2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \quad \text{o}$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{36}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Otra variación de la técnica para cambiar radicales a la forma más simple es factorizar primero el radicando y luego buscar potencias *n*-ésimas perfectas en forma exponencial. El siguiente ejemplo ilustra el uso de esta técnica.

EJEMPLO 2

Exprese cada uno de los siguientes en la forma radical más simple.

(a) $\sqrt{50}$ **(b)** $3\sqrt{80}$ **(c)** $\sqrt[3]{108}$

Solución

(a) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(b) $3\sqrt{80} = 3\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = 3\sqrt{2^4}\sqrt{5} = 3 \cdot 2^2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

(c) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$ ■

Otra propiedad de las raíces n-ésimas se demuestra mediante los siguientes ejemplos.

$$\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{64}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

En general, se puede enunciar la siguiente propiedad.

Propiedad 5.5

$$\sqrt[n]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}}$$ $\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{c}$ son números reales, y $c \neq 0$.

La propiedad 5.5 afirma que **la raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas**.

Para evaluar radicales como $\sqrt{\frac{4}{25}}$ y $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$, para los cuales el numerador y el denominador del radicando fraccionario son potencias n-ésimas perfectas, puede usar la propiedad 5.5 o simplemente apoyarse en la definición de raíz n-ésima.

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \quad \text{porque} \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Propiedad 5.5 — Definición de raíz n-ésima

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} \quad \text{porque} \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$$

Los radicales como $\sqrt{\frac{28}{9}}$ y $\sqrt[3]{\frac{24}{27}}$, en los que sólo los denominadores del radicando son potencias n-ésimas perfectas, se pueden simplificar del modo siguiente:

$$\sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{28}}{3} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

Antes de considerar más ejemplos se resumen algunas ideas que pertenecen a la simplificación de radicales. Se dice que un radical está en su **forma radical más simple** si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Ninguna fracción aparece con un signo radical. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ viola esta condición.

2. Ningún radical aparece en el denominador. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ viola esta condición.

3. Ningún radicando, cuando se expresa en forma factorizada prima, contiene un factor elevado a una potencia igual a o mayor que el índice. $\sqrt{2^3 \cdot 5}$ viola esta condición.

Ahora considere un ejemplo en el cual ni el numerador ni el denominador del radicando es una potencia *n*-ésima perfecta.

EJEMPLO 3 Simplifique $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Solución

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \underset{\text{Forma de 1}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

■

Al proceso que se utilizó para simplificar el radical en el ejemplo 3 se le conoce como **racionalización del denominador**. Note que el denominador se convierte en un número racional. El proceso de racionalizar al denominador con frecuencia se puede lograr en más de una forma, como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Simplifique $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$

Solución A

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{40}}{8} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{10}}{8} = \frac{2\sqrt{10}}{8} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Solución B

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Solución C

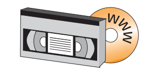
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2(2)}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$ ■

Los tres métodos al ejemplo 4 ilustran de nuevo la necesidad de pensar primero y sólo entonces tomar el lápiz. Acaso encuentre más sencillo un método que otro. Para concluir esta sección estudie los siguientes ejemplos y compruebe los radicales finales contra las tres condiciones anteriormente mencionadas para la **forma radical más simple**.

EJEMPLO 5

Simplifique cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$ **(b)** $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{18}}$ **(c)** $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ **(d)** $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{16}}$



Solución

(a) $$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{9}}=\frac{3\sqrt{6}}{15}=\frac{\sqrt{6}}{5}$$

Forma de 1

(b) $$\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{18}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{36}}=\frac{3\sqrt{14}}{12}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

Forma de 1

(c) $$\sqrt[3]{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{9}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{15}}{3}$$

Forma de 1

(d) $$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{16}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{\sqrt[3]{20}}{4}$$

Forma de 1 ■

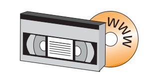
Aplicaciones de los radicales

Muchas aplicaciones del mundo real involucran expresiones radicales. Por ejemplo, la policía usa frecuentemente la fórmula $S=\sqrt{30Df}$ para estimar la rapidez de un automóvil sobre la base de la longitud de las marcas de derrape en la escena de un accidente. En esta fórmula, S representa la rapidez del automóvil en millas por hora, D representa la longitud de las marcas de derrape en pies y f representa

un coeficiente de fricción. Para una situación particular, el coeficiente de fricción es una constante que depende del tipo y condición de la superficie del camino.

EJEMPLO 6

Con 0.35 como coeficiente de fricción determine cuán rápido viajaba un automóvil si derrapó 325 pies.



Solución

Sustituya 0.35 por f y 325 por D en la fórmula.

$$S = \sqrt{30Df} = \sqrt{30(325)(0.35)} = 58, \quad \text{al número entero más cercano}$$

El automóvil viajaba aproximadamente a 58 millas por hora. ■

El **periodo** de un péndulo es el tiempo que tarda en balancearse de un lado al otro y de regreso. La fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

donde T representa el tiempo en segundos y L la longitud en pies, se puede usar para determinar el periodo de un péndulo (vea la figura 5.1).

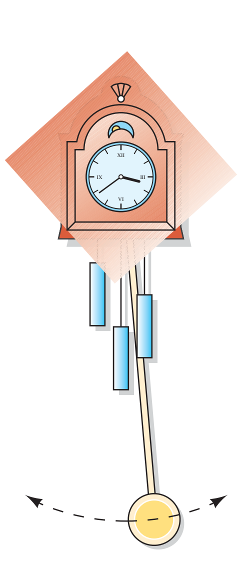
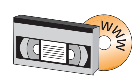


Figura 5.1

EJEMPLO 7

Encuentre, a la décima de segundo más cercana, el periodo de un péndulo de 3.5 pies de longitud.



Solución

Use 3.14 como una aproximación para μ y sustituya 3.5 para L en la fórmula.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}} = 2(3.14)\sqrt{\frac{3.5}{32}} = 2.1, \quad \text{a la décima más cercana}$$

El periodo es aproximadamente 2.1 segundos. ■

Las expresiones radicales también se usan en algunas aplicaciones geométricas. Por ejemplo, el área de un triángulo se puede encontrar con una fórmula que implique una raíz cuadrada. Si a, b y c representan las longitudes de los tres lados de un triángulo, la fórmula $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, conocida como fórmula de Herón, se puede usar para determinar el área (K) del triángulo. La letra s representa el semiperímetro del triángulo; esto es, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

EJEMPLO 8

Encuentre el área de una pieza triangular de hoja metálica que tiene lados con longitudes de 17, 19 y 26 pulgadas.

Solución

Primero encuentre el valor de s, el semiperímetro del triángulo.

$$s = \frac{17 + 19 + 26}{2} = 31$$

Ahora puede usar la fórmula de Herón.

$$\begin{aligned} K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{31(31-17)(31-19)(31-26)} \\ &= \sqrt{31(14)(12)(5)} \\ &= \sqrt{20\,640} \\ &= 161.4, \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la pieza de hoja metálica es aproximadamente 161.4 pulgadas cuadradas. ■

Observaciones: Note que, en los ejemplos 6-8, no se simplificaron los radicales. Cuando usamos calculadora para aproximar las raíces cuadradas, no hay necesidad de simplificar.

Conjunto de problemas 5.2

Para los problemas 1-20 evalúe cada una de las siguientes expresiones. Por ejemplo, $\sqrt{25} = 5$.

1. $\sqrt{64}$
2. $\sqrt{49}$
3. $-\sqrt{100}$
4. $-\sqrt{81}$
5. $\sqrt[3]{27}$
6. $\sqrt[3]{216}$
7. $\sqrt[3]{-64}$
8. $\sqrt[3]{-125}$
9. $\sqrt[4]{81}$
10. $-\sqrt[4]{16}$
11. $\sqrt{\frac{16}{25}}$
12. $\sqrt{\frac{25}{64}}$
13. $-\sqrt{\frac{36}{49}}$
14. $\sqrt{\frac{16}{64}}$
15. $\sqrt{\frac{9}{36}}$
16. $\sqrt{\frac{144}{36}}$
17. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$
18. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$
19. $\sqrt[3]{8^3}$
20. $\sqrt[4]{16^4}$

Para los problemas 21-74 cambie cada radical a la forma radical más simple.

21. $\sqrt{27}$
22. $\sqrt{48}$
23. $\sqrt{32}$
24. $\sqrt{98}$
25. $\sqrt{80}$
26. $\sqrt{125}$
27. $\sqrt{160}$
28. $\sqrt{112}$
29. $4\sqrt{18}$
30. $5\sqrt{32}$
31. $-6\sqrt{20}$
32. $-4\sqrt{54}$
33. $\frac{2}{5}\sqrt{75}$
34. $\frac{1}{3}\sqrt{90}$
35. $\frac{3}{2}\sqrt{24}$
36. $\frac{3}{4}\sqrt{45}$
37. $-\frac{5}{6}\sqrt{28}$
38. $-\frac{2}{3}\sqrt{96}$
39. $\sqrt{\frac{19}{4}}$
40. $\sqrt{\frac{22}{9}}$

41. $\sqrt{\frac{27}{16}}$

42. $\sqrt{\frac{8}{25}}$

43. $\sqrt{\frac{75}{81}}$

44. $\sqrt{\frac{24}{49}}$

45. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

46. $\sqrt{\frac{3}{8}}$

47. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

48. $\sqrt{\frac{7}{12}}$

49. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

50. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

51. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{24}}$

52. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{48}}$

53. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}}$

54. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$

55. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$

56. $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}}$

57. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

58. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

59. $-\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

60. $\frac{-6\sqrt{5}}{\sqrt{18}}$

61. $\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$

62. $\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{12}}$

63. $\frac{-8\sqrt{18}}{10\sqrt{50}}$

64. $\frac{4\sqrt{45}}{-6\sqrt{20}}$

65. $\sqrt[3]{16}$

66. $\sqrt[3]{40}$

67. $2\sqrt[3]{81}$

68. $-3\sqrt[3]{54}$

69. $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

70. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

71. $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{4}}$

72. $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

73. $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{4}}$

74. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$

75. Use un coeficiente de fricción de 0.4 en la fórmula del ejemplo 6 y encuentre las rapideces de los automóviles que dejan marcas de derrape con longitudes de 150, 200 y 350 pies. Exprese sus respuestas a la milla por hora más cercana.

76. Use la fórmula del ejemplo 7 y encuentre los periodos de péndulos con longitudes de 2, 3 y 4.5 pies. Exprese sus respuestas a la décima de segundo más cercana.

77. Encuentre, al centímetro cuadrado más cercano, el área de un triángulo que mida 14 por 16 por 18 centímetros.

78. Encuentre, a la yarda cuadrada más cercana, el área de un terreno triangular que mide 45 por 60 por 75 yardas.

79. Encuentre el área de un triángulo equilátero, cuyos lados miden cada uno 18 pulgadas de largo. Exprese el área a la pulgada cuadrada más cercana.

80. Encuentre, a la pulgada cuadrada más cercana, el área del cuadrilátero de la figura 5.2.

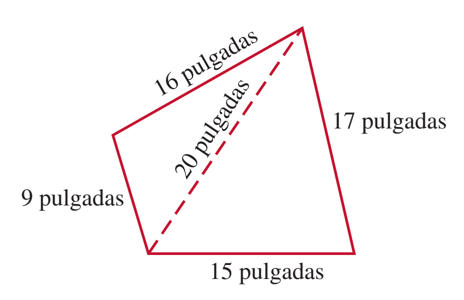


Figura 5.2

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

81. ¿Por qué $\sqrt{-9}$ no es un número real?

82. ¿Por qué se dice que 25 tiene dos raíces cuadradas (5 y −5), pero se escribe $\sqrt{25} = 5$?

83. ¿Cómo se usa la propiedad multiplicativa de 1 cuando se simplifican radicales?

84. ¿Cómo podría encontrar una aproximación a número entero positivo para $\sqrt{2750}$, si no tiene disponible una calculadora o tabla?

MÁS INVESTIGACIÓN

85. Use su calculadora para encontrar, a la milésima más cercana, una aproximación racional de (a) a (i).

(a) $\sqrt{2}$ **(b)** $\sqrt{75}$ **(c)** $\sqrt{156}$

(d) $\sqrt{691}$ **(e)** $\sqrt{3249}$ **(f)** $\sqrt{45\,123}$

(g) $\sqrt{0.14}$ **(h)** $\sqrt{0.023}$ **(i)** $\sqrt{0.8649}$

86. En ocasiones es posible hacer una estimación bastante buena de una expresión radical al usar aproximaciones de números enteros positivos. Por ejemplo, $5\sqrt{35} + 7\sqrt{50}$ es aproximadamente $5(6) + 7(7) = 79$. Con una calculadora vemos que $5\sqrt{35} + 7\sqrt{50} = 79.1$, a la décima más cercana. En este caso la estimación de número entero es muy buena. De (a) a (f), primero realice una estimación de número entero y luego use su calculadora para ver cuán bien estimó.

(a) $3\sqrt{10} - 4\sqrt{24} + 6\sqrt{65}$

(b) $9\sqrt{27} + 5\sqrt{37} - 3\sqrt{80}$

(c) $12\sqrt{5} + 13\sqrt{18} + 9\sqrt{47}$

(d) $3\sqrt{98} - 4\sqrt{83} - 7\sqrt{120}$

(e) $4\sqrt{170} + 2\sqrt{198} + 5\sqrt{227}$

(f) $-3\sqrt{256} - 6\sqrt{287} + 11\sqrt{321}$

5.3 Combinación de radicales y simplificación de radicales que contienen variables

Recuerde el uso de la propiedad distributiva como la base para combinar términos semejantes. Por ejemplo,

$$3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$$

$$8y - 5y = (8 - 5)y = 3y$$

$$\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)a^2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right)a^2 = \frac{17}{12}a^2$$

En forma similar, las expresiones que contienen radicales con frecuencia se pueden simplificar usando la propiedad distributiva, del modo siguiente:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3 + 5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$7\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = (7 - 3)\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

$$4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} + 6\sqrt{11} - 2\sqrt{11} = (4 + 5)\sqrt{7} + (6 - 2)\sqrt{11} = 9\sqrt{7} + 4\sqrt{11}$$

Note que, *con la finalidad de sumar o restar, los radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando*. Por tanto, no se puede simplificar una expresión como $5\sqrt{2} + 7\sqrt{11}$.

La simplificación mediante la combinación de radicales en ocasiones requiere que primero exprese los radicales dados en forma más simple y luego aplique la propiedad distributiva. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

EJEMPLO 1

Simplifique $3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 4\sqrt{2}$

Solución

$$\begin{aligned}3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - 4\sqrt{2} &= 3\sqrt{4}\sqrt{2} + 2\sqrt{9}\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\\ &= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\\ &= (6 + 6 - 4)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2

Simplifique $\frac{1}{4}\sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{20}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{20} &= \frac{1}{4}\sqrt{9}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{4}\sqrt{5}\\ &= \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}\\ &= \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5} = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12}\right)\sqrt{5} = \frac{17}{12}\sqrt{5}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3

Simplifique $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{16} - 6\sqrt[3]{54}$

Solución

$$\begin{aligned}5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{16} - 6\sqrt[3]{54} &= 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2}\\ &= 5\sqrt[3]{2} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} - 6 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2}\\ &= 5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} - 18\sqrt[3]{2}\\ &= (5 - 4 - 18)\sqrt[3]{2}\\ &= -17\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

■

Radicales que contienen variables

Antes de estudiar el proceso de simplificación de radicales que contienen variables, hay un tecnicismo que debe llamar su atención. Observe algunos ejemplos para clarificar el punto. Considere el radical $\sqrt{x^2}$.

Sea $x = 3$; entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.

Sea $x = -3$; entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Por tanto, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, *pero* si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$. Al usar el concepto de valor absoluto, se puede afirmar que, para todo número real, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ahora considere el radical $\sqrt{x^3}$. Puesto que x^3 es negativo cuando x es negativo, es necesario restringir x a los reales no negativos cuando se trabaje con $\sqrt{x^3}$. Por ende, puede escribir "si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$" y no es necesario el signo de valor absoluto. Finalmente, considere el radical $\sqrt[3]{x^3}$.

$$\text{Sea } x = 2; \quad \text{entonces } \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\text{Sea } x = -2; \text{ entonces } \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

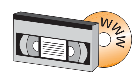
Por tanto, es correcto escribir "$\sqrt[3]{x^3} = x$ para todo número real", y de nuevo no es necesario el signo de valor absoluto.

El análisis anterior indica que, técnicamente, toda expresión radical que implique variables en el radicando precisa analizarse de manera individual en términos de cualquier restricción necesaria impuesta sobre las variables. Para ayudarlo a ganar experiencia con esta habilidad, bajo el título Más investigación del conjunto de problemas se analizan ejemplos y problemas. Sin embargo, por ahora, para evitar considerar tales restricciones problema a problema, simplemente debe suponer que todas las variables representan números reales positivos. Considere el proceso de simplificar radicales que contengan variables en el radicando. Estudie los siguientes ejemplos y note que aquí se aplica el mismo enfoque básico que se usó en la sección 5.2.

EJEMPLO 4

Simplifique cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt{8x^3}$ **(b)** $\sqrt{45x^3y^7}$ **(c)** $\sqrt{180a^4b^3}$ **(d)** $\sqrt[3]{40x^4y^8}$



Solución

(a) $\sqrt{8x^3} = \sqrt{4x^2}\sqrt{2x} = 2x\sqrt{2x}$

$4x^2$ es un cuadrado perfecto.

(b) $\sqrt{45x^3y^7} = \sqrt{9x^2y^6}\sqrt{5xy} = 3xy^3\sqrt{5xy}$

$9x^2y^6$ es un cuadrado perfecto.

(c) Si el coeficiente numérico del radicando es muy grande, acaso quiera observarlo en la forma factorizada prima.

$$\sqrt{180a^4b^3} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot b^3}$$
$$= \sqrt{36 \cdot 5 \cdot a^4 \cdot b^3}$$
$$= \sqrt{36a^4b^2}\sqrt{5b}$$
$$= 6a^2b\sqrt{5b}$$

(d) $\sqrt[3]{40x^4y^8} = \sqrt[3]{8x^3y^6}\sqrt[3]{5xy^2} = 2xy^2\sqrt[3]{5xy^2}$

$8x^3y^6$ es un cubo perfecto.

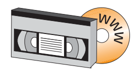
Antes de considerar más ejemplos se plantean nuevamente (en forma tal que incluyen radicandos que contienen variables) las condiciones necesarias para que un radical esté en forma radical más simple.

1. Un radicando que no contenga factor polinomial elevado a una potencia igual a o mayor que el índice del radical. — $\sqrt{x^3}$ viola esta condición.
2. Dentro de un signo radical no aparece fracción. — $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$ viola esta condición.
3. En el denominador no aparece radical. — $\frac{3}{\sqrt[3]{4x}}$ viola esta condición.

EJEMPLO 5 Exprese cada una de las siguientes expresiones en la forma radical más simple.

(a) $\sqrt{\dfrac{2x}{3y}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12a^3}}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{8x^2}}{\sqrt{27y^5}}$

(d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4x}}$ **(e)** $\dfrac{\sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{9y^5}}$



Solución

(a) $\sqrt{\dfrac{2x}{3y}} = \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}} = \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}} \cdot \dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}} = \dfrac{\sqrt{6xy}}{3y}$

Forma de 1

(b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12a^3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{12a^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} = \dfrac{\sqrt{15a}}{\sqrt{36a^4}} = \dfrac{\sqrt{15a}}{6a^2}$

Forma de 1

(c) $\dfrac{\sqrt{8x^2}}{\sqrt{27y^5}} = \dfrac{\sqrt{4x^2}\sqrt{2}}{\sqrt{9y^4}\sqrt{3y}} = \dfrac{2x\sqrt{2}}{3y^2\sqrt{3y}} = \dfrac{2x\sqrt{2}}{3y^2\sqrt{3y}} \cdot \dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}}$

$= \dfrac{2x\sqrt{6y}}{(3y^2)(3y)} = \dfrac{2x\sqrt{6y}}{9y^3}$

(d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4x}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4x}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{2x^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{8x^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2x^2}}{2x}$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{9y^5}} = \dfrac{\sqrt[3]{16x^2}}{\sqrt[3]{9y^5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3y}}{\sqrt[3]{3y}} = \dfrac{\sqrt[3]{48x^2y}}{\sqrt[3]{27y^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{6x^2y}}{3y^2} = \dfrac{2\sqrt[3]{6x^2y}}{3y^2}$ ■

Note que en la parte (c) primero se realizó cierta simplificación, antes de racionalizar el denominador, mientras que en la parte (b) se procedió de inmediato a racionalizar el denominador. Es una elección individual y probablemente usted lo haga de ambas formas algunas veces antes de decidir cuál prefiere.

Conjunto de problemas 5.3

Para los problemas 1-20 use la propiedad distributiva para auxiliarse a simplificar cada una de las siguientes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{8} - \sqrt{32} &= 3\sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{16}\sqrt{2} \\ &= 3(2)\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \\ &= (6-4)\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

1. $5\sqrt{18} - 2\sqrt{2}$

2. $7\sqrt{12} + 4\sqrt{3}$

3. $7\sqrt{12} + 10\sqrt{48}$

4. $6\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$

5. $-2\sqrt{50} - 5\sqrt{32}$

6. $-2\sqrt{20} - 7\sqrt{45}$

7. $3\sqrt{20} - \sqrt{5} - 2\sqrt{45}$

8. $6\sqrt{12} + \sqrt{3} - 2\sqrt{48}$

9. $-9\sqrt{24} + 3\sqrt{54} - 12\sqrt{6}$

10. $13\sqrt{28} - 2\sqrt{63} - 7\sqrt{7}$

11. $\frac{3}{4}\sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{28}$

12. $\frac{3}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\sqrt{80}$

13. $\frac{3}{5}\sqrt{40} + \frac{5}{6}\sqrt{90}$

14. $\frac{3}{8}\sqrt{96} - \frac{2}{3}\sqrt{54}$

15. $\dfrac{3\sqrt{18}}{5} - \dfrac{5\sqrt{72}}{6} + \dfrac{3\sqrt{98}}{4}$

16. $\dfrac{-2\sqrt{20}}{3} + \dfrac{3\sqrt{45}}{4} - \dfrac{5\sqrt{80}}{6}$

17. $5\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{81}$

18. $-3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

19. $-\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{54} - 9\sqrt[3]{2}$

20. $4\sqrt[3]{24} - 6\sqrt[3]{3} + 13\sqrt[3]{81}$

Para los problemas 21-64 exprese cada una de las siguientes en su forma radical más simple. Todas las variables representan números reales positivos.

21. $\sqrt{32x}$

22. $\sqrt{50y}$

23. $\sqrt{75x^2}$

24. $\sqrt{108y^2}$

25. $\sqrt{20x^2y}$

26. $\sqrt{80xy^2}$

27. $\sqrt{64x^3y^7}$

28. $\sqrt{36x^5y^6}$

29. $\sqrt{54a^4b^3}$

30. $\sqrt{96a^7b^8}$

31. $\sqrt{63x^6y^8}$

32. $\sqrt{28x^4y^{12}}$

33. $2\sqrt{40a^3}$

34. $4\sqrt{90a^5}$

35. $\frac{2}{3}\sqrt{96xy^3}$

36. $\frac{4}{5}\sqrt{125x^4y}$

37. $\sqrt{\frac{2x}{5y}}$

38. $\sqrt{\frac{3x}{2y}}$

39. $\sqrt{\frac{5}{12x^4}}$

40. $\sqrt{\frac{7}{8x^2}}$

41. $\frac{5}{\sqrt{18y}}$

42. $\frac{3}{\sqrt{12x}}$

43. $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{8y^5}}$

44. $\frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{18x^3}}$

45. $\frac{\sqrt{18y^3}}{\sqrt{16x}}$

46. $\frac{\sqrt{2x^3}}{\sqrt{9y}}$

47. $\frac{\sqrt{24a^2b^3}}{\sqrt{7ab^6}}$

48. $\frac{\sqrt{12a^2b}}{\sqrt{5a^3b^3}}$

49. $\sqrt[3]{24y}$

50. $\sqrt[3]{16x^2}$

51. $\sqrt[3]{16x^4}$

52. $\sqrt[3]{54x^3}$

53. $\sqrt[3]{56x^6y^8}$

54. $\sqrt[3]{81x^5y^6}$

55. $\sqrt[3]{\frac{7}{9x^2}}$

56. $\sqrt[3]{\frac{5}{2x}}$

57. $\frac{\sqrt[3]{3y}}{\sqrt[3]{16x^4}}$

58. $\frac{\sqrt[3]{2y}}{\sqrt[3]{3x}}$

59. $\frac{\sqrt[3]{12xy}}{\sqrt[3]{3x^2y^5}}$

60. $\frac{5}{\sqrt[3]{9xy^2}}$

61. $\sqrt{8x + 12y}$ [*Sugerencia*: $\sqrt{8x + 12y} = \sqrt{4(2x + 3y)}$]

62. $\sqrt{4x + 4y}$

63. $\sqrt{16x + 48y}$

64. $\sqrt{27x + 18y}$

Para los problemas 65-74 use la propiedad distributiva para auxiliarse a simplificar cada una de las siguientes. Todas las variables representan números reales positivos.

65. $-3\sqrt{4x} + 5\sqrt{9x} + 6\sqrt{16x}$

66. $-2\sqrt{25x} - 4\sqrt{36x} + 7\sqrt{64x}$

67. $2\sqrt{18x} - 3\sqrt{8x} - 6\sqrt{50x}$

68. $4\sqrt{20x} + 5\sqrt{45x} - 10\sqrt{80x}$

69. $5\sqrt{27n} - \sqrt{12n} - 6\sqrt{3n}$

70. $4\sqrt{8n} + 3\sqrt{18n} - 2\sqrt{72n}$

71. $7\sqrt{4ab} - \sqrt{16ab} - 10\sqrt{25ab}$

72. $4\sqrt{ab} - 9\sqrt{36ab} + 6\sqrt{49ab}$

73. $-3\sqrt{2x^3} + 4\sqrt{8x^3} - 3\sqrt{32x^3}$

74. $2\sqrt{40x^5} - 3\sqrt{90x^5} + 5\sqrt{160x^5}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

75. ¿La expresión $3\sqrt{2} + \sqrt{50}$ está en su forma radical más simple? Defienda su respuesta.

76. Su amiga simplificó $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$ del modo siguiente:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \frac{\sqrt{16}\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

¿Es un procedimiento correcto? ¿Puede mostrarle una mejor forma de resolver este problema?

77. ¿$\sqrt{x + y}$ es igual a $\sqrt{x} + \sqrt{y}$? Defienda su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

78. Use su calculadora y evalúe cada expresión en los problemas 1-16. Luego evalúe la expresión simplificada que obtuvo. Sus dos resultados para cada problema deben ser iguales.

Considere estos problemas, donde las variables podrían representar cualquier número real. Sin embargo, todavía tendría la restricción de que el radical representaría un número real. En otras palabras, el radicando no debe ser negativo.

$\sqrt{98x^2} = \sqrt{49x^2}\sqrt{2} = 7|x|\sqrt{2}$ Es necesario un signo de valor absoluto para garantizar que la raíz principal no es negativa.

$\sqrt{24x^4} = \sqrt{4x^4}\sqrt{6} = 2x^2\sqrt{6}$ Puesto que x^2 no es negativa, no hay necesidad de un signo de valor absoluto para garantizar que la raíz principal es no negativa.

$\sqrt{25x^3} = \sqrt{25x^2}\sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$ Puesto que el radicando se define como no negativo, x no debe ser negativo y no hay necesidad de un signo de valor absoluto para garantizar que la raíz principal no es negativa.

$\sqrt{18b^5} = \sqrt{9b^4}\sqrt{2b} = 3b^2\sqrt{2b}$ No es necesario un signo de valor absoluto para garantizar que la raíz principal no es negativa.

$\sqrt{12y^6} = \sqrt{4y^6}\sqrt{3} = 2|y^3|\sqrt{3}$ Es necesario un signo de valor absoluto para garantizar que la raíz principal no es negativa.

79. Resuelva los siguientes problemas, donde la variable podría ser cualquier número real en tanto el radical represente un número real. Use signos de valor absoluto en las respuestas según se requiera.

(a) $\sqrt{125x^2}$ **(b)** $\sqrt{16x^4}$

(c) $\sqrt{8b^3}$ **(d)** $\sqrt{3y^5}$

(e) $\sqrt{288x^6}$ **(f)** $\sqrt{28m^8}$

(g) $\sqrt{128c^{10}}$ **(h)** $\sqrt{18d^7}$

(i) $\sqrt{49x^2}$ **(j)** $\sqrt{80n^{20}}$

(k) $\sqrt{81h^3}$

5.4 Productos y cocientes que implican radicales

Como vio, la propiedad 5.4 ($\sqrt[n]{bc} = \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$) se usa para expresar un radical como el producto de dos radicales y también para expresar el producto de dos radicales como un radical. De hecho, se usó la propiedad para ambos propósitos dentro del marco conceptual de simplificación de radicales. Por ejemplo,

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

$\sqrt[n]{bc} = \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{bc}$

Los siguientes ejemplos demuestran el uso de la propiedad 5.4 para multiplicar radicales y expresar el producto en la forma más simple.

EJEMPLO 1

Multiplique y simplifique donde sea posible.

(a) $(2\sqrt{3})(3\sqrt{5})$ **(b)** $(3\sqrt{8})(5\sqrt{2})$

(c) $(7\sqrt{6})(3\sqrt{8})$ **(d)** $(2\sqrt[3]{6})(5\sqrt[3]{4})$

Solución

(a) $(2\sqrt{3})(3\sqrt{5}) = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{15}$

(b) $(3\sqrt{8})(5\sqrt{2}) = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 15\sqrt{16} = 15 \cdot 4 = 60$

$$\text{(c)}\quad (7\sqrt{6})(3\sqrt{8}) = 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} = 21\sqrt{48} = 21\sqrt{16}\sqrt{3}$$
$$= 21 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 84\sqrt{3}$$

$$\text{(d)}\quad (2\sqrt[3]{6})(5\sqrt[3]{4}) = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4} = 10\sqrt[3]{24}$$
$$= 10\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}$$
$$= 10 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$
$$= 20\sqrt[3]{3}$$

Recuerde usar la propiedad distributiva cuando encuentre el producto de un monomio y un polinomio. Por ejemplo, $3x^2(2x + 7) = 3x^2(2x) + 3x^2(7) = 6x^3 + 21x^2$. En forma similar, la propiedad distributiva y la propiedad 5.4 proporcionan la base para encontrar ciertos productos especiales que implican radicales. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

EJEMPLO 2

Multiplique y simplifique donde sea posible.

(a) $\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{12})$ **(b)** $2\sqrt{2}(4\sqrt{3} - 5\sqrt{6})$

(c) $\sqrt{6x}(\sqrt{8x} + \sqrt{12xy})$ **(d)** $\sqrt[3]{2}(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{16})$

Solución

$$\text{(a)}\quad \sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{12}) = \sqrt{3}\sqrt{6} + \sqrt{3}\sqrt{12}$$
$$= \sqrt{18} + \sqrt{36}$$
$$= \sqrt{9}\sqrt{2} + 6$$
$$= 3\sqrt{2} + 6$$

$$\text{(b)}\quad 2\sqrt{2}(4\sqrt{3} - 5\sqrt{6}) = (2\sqrt{2})(4\sqrt{3}) - (2\sqrt{2})(5\sqrt{6})$$
$$= 8\sqrt{6} - 10\sqrt{12}$$
$$= 8\sqrt{6} - 10\sqrt{4}\sqrt{3}$$
$$= 8\sqrt{6} - 20\sqrt{3}$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{6x}(\sqrt{8x} + \sqrt{12xy}) = (\sqrt{6x})(\sqrt{8x}) + (\sqrt{6x})(\sqrt{12xy})$$
$$= \sqrt{48x^2} + \sqrt{72x^2y}$$
$$= \sqrt{16x^2}\sqrt{3} + \sqrt{36x^2}\sqrt{2y}$$
$$= 4x\sqrt{3} + 6x\sqrt{2y}$$

$$\text{(d)}\quad \sqrt[3]{2}(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{16}) = (\sqrt[3]{2})(5\sqrt[3]{4}) - (\sqrt[3]{2})(3\sqrt[3]{16})$$
$$= 5\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{32}$$
$$= 5 \cdot 2 - 3\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}$$
$$= 10 - 6\sqrt[3]{4}$$

La propiedad distributiva también juega un papel central en la determinación del producto de dos binomios. Por ejemplo, $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$. Encontrar el producto de dos expresiones binomiales que implican radicales se puede manejar en forma similar, como en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3

Encuentre los siguientes productos y simplifique.

(a) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ **(b)** $(2\sqrt{2} - \sqrt{7})(3\sqrt{2} + 5\sqrt{7})$

(c) $(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$ **(d)** $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{6}) &= \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{6})\\ &= \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{6} + \sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{5}\sqrt{6}\\ &= \sqrt{6} + \sqrt{18} + \sqrt{10} + \sqrt{30}\\ &= \sqrt{6} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{30}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(2\sqrt{2} - \sqrt{7})(3\sqrt{2} + 5\sqrt{7}) &= 2\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{7})\\ &\quad - \sqrt{7}(3\sqrt{2} + 5\sqrt{7})\\ &= (2\sqrt{2})(3\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})(5\sqrt{7})\\ &\quad - (\sqrt{7})(3\sqrt{2}) - (\sqrt{7})(5\sqrt{7})\\ &= 12 + 10\sqrt{14} - 3\sqrt{14} - 35\\ &= -23 + 7\sqrt{14}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6}) &= \sqrt{8}(\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \sqrt{6}(\sqrt{8} - \sqrt{6})\\ &= \sqrt{8}\sqrt{8} - \sqrt{8}\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{8} - \sqrt{6}\sqrt{6}\\ &= 8 - \sqrt{48} + \sqrt{48} - 6\\ &= 2\end{aligned}$$

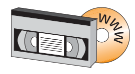
(d)
$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})\\ &= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}\sqrt{x} - \sqrt{y}\sqrt{y}\\ &= x - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} - y\\ &= x - y\end{aligned}$$

■

Observe los incisos (c) y (d) del ejemplo 3; encajan en el patrón de producto especial $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Más aún, en cada caso, el producto final está en forma racional. Los factores $a + b$ y $a - b$ se llaman **conjugados**. Esto sugiere una forma de racionalizar el denominador en una expresión que contenga un denominador binomial con radicales. Se multiplicará por el conjugado del denominador binomial. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Simplifique $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ mediante racionalización del denominador.



Solución

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$$

Forma de 1.

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} \quad \text{o} \quad \frac{4\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{3}$$

Cualquier respuesta es aceptable.

■

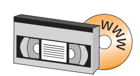
Los siguientes ejemplos ilustran aún más el proceso de racionalización y simplificación de expresiones que contienen denominadores binomiales.

EJEMPLO 5

Para cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-9}$ **(b)** $\dfrac{7}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ **(d)** $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$



Solución

(a) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-9} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-9} \cdot \frac{\sqrt{6}+9}{\sqrt{6}+9}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+9)}{(\sqrt{6}-9)(\sqrt{6}+9)}$$

$$= \frac{\sqrt{18}+9\sqrt{3}}{6-81}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+9\sqrt{3}}{-75}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{(-3)(25)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{25} \quad \text{o} \quad \frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{25}$$

(b) $$\frac{7}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{7(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{45-12}$$

$$= \frac{7(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})}{33} \quad \text{o} \quad \frac{21\sqrt{5}-14\sqrt{3}}{33}$$

(c) $$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6}{x-9}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x-9}$$

(d) $$\frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$

$$= \frac{2x-2\sqrt{xy}-3\sqrt{xy}+3y}{x-y}$$

$$= \frac{2x-5\sqrt{xy}+3y}{x-y}$$ ■

Conjunto de problemas 5.4

Para los problemas 1-14 multiplique y simplifique donde sea posible.

1. $\sqrt{6}\sqrt{12}$
2. $\sqrt{8}\sqrt{6}$
3. $(3\sqrt{3})(2\sqrt{6})$
4. $(5\sqrt{2})(3\sqrt{12})$
5. $(4\sqrt{2})(-6\sqrt{5})$
6. $(-7\sqrt{3})(2\sqrt{5})$
7. $(-3\sqrt{3})(-4\sqrt{8})$
8. $(-5\sqrt{8})(-6\sqrt{7})$
9. $(5\sqrt{6})(4\sqrt{6})$
10. $(3\sqrt{7})(2\sqrt{7})$
11. $(2\sqrt[3]{4})(6\sqrt[3]{2})$
12. $(4\sqrt[3]{3})(5\sqrt[3]{9})$
13. $(4\sqrt[3]{6})(7\sqrt[3]{4})$
14. $(9\sqrt[3]{6})(2\sqrt[3]{9})$

Para los problemas 15-52 encuentre los siguientes productos y exprese las respuestas en la forma radical más simple. Todas las variables representan números reales no negativos.

15. $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
16. $\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{10})$
17. $3\sqrt{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{7})$
18. $5\sqrt{6}(2\sqrt{5}-3\sqrt{11})$
19. $2\sqrt{6}(3\sqrt{8}-5\sqrt{12})$
20. $4\sqrt{2}(3\sqrt{12}+7\sqrt{6})$
21. $-4\sqrt{5}(2\sqrt{5}+4\sqrt{12})$
22. $-5\sqrt{3}(3\sqrt{12}-9\sqrt{8})$
23. $3\sqrt{x}(5\sqrt{2}+\sqrt{y})$
24. $\sqrt{2x}(3\sqrt{y}-7\sqrt{5})$

25. $\sqrt{xy}(5\sqrt{xy} - 6\sqrt{x})$

26. $4\sqrt{x}(2\sqrt{xy} + 2\sqrt{x})$

27. $\sqrt{5y}(\sqrt{8x} + \sqrt{12y^2})$

28. $\sqrt{2x}(\sqrt{12xy} - \sqrt{8y})$

29. $5\sqrt{3}(2\sqrt{8} - 3\sqrt{18})$

30. $2\sqrt{2}(3\sqrt{12} - \sqrt{27})$

31. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} - 7)$

32. $(\sqrt{2} + 6)(\sqrt{2} - 2)$

33. $(\sqrt{5} - 6)(\sqrt{5} - 3)$

34. $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} - 8)$

35. $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{7} + \sqrt{2})$

36. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{7})$

37. $(2\sqrt{6} + 3\sqrt{5})(\sqrt{8} - 3\sqrt{12})$

38. $(5\sqrt{2} - 4\sqrt{6})(2\sqrt{8} + \sqrt{6})$

39. $(2\sqrt{6} + 5\sqrt{5})(3\sqrt{6} - \sqrt{5})$

40. $(7\sqrt{3} - \sqrt{7})(2\sqrt{3} + 4\sqrt{7})$

41. $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(6\sqrt{2} - 7\sqrt{3})$

42. $(\sqrt{8} - 3\sqrt{10})(2\sqrt{8} - 6\sqrt{10})$

43. $(\sqrt{6} + 4)(\sqrt{6} - 4)$

44. $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$

45. $(\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{10})$

46. $(2\sqrt{3} + \sqrt{11})(2\sqrt{3} - \sqrt{11})$

47. $(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})$

48. $(2\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$

49. $2\sqrt[3]{3}(5\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6})$

50. $2\sqrt[3]{2}(3\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{5})$

51. $3\sqrt[3]{4}(2\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4})$

52. $3\sqrt[3]{3}(4\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{7})$

Para los problemas 53-76 racionalice el denominador y simplifique. Todas las variables representan números reales positivos.

53. $\dfrac{2}{\sqrt{7} + 1}$

54. $\dfrac{6}{\sqrt{5} + 2}$

55. $\dfrac{3}{\sqrt{2} - 5}$

56. $\dfrac{-4}{\sqrt{6} - 3}$

57. $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}$

58. $\dfrac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{10}}$

59. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$

60. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$

61. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5} + 4}$

62. $\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2} - 5}$

63. $\dfrac{6}{3\sqrt{7} - 2\sqrt{6}}$

64. $\dfrac{5}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}}$

65. $\dfrac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$

66. $\dfrac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}$

67. $\dfrac{2}{\sqrt{x} + 4}$

68. $\dfrac{3}{\sqrt{x} + 7}$

69. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5}$

70. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

71. $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 6}$

72. $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 10}$

73. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$

74. $\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

75. $\dfrac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}$

76. $\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + 5\sqrt{y}}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

77. ¿Como ayudaría a alguien a racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{4}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$?

78. Discuta cómo ha usado la propiedad distributiva hasta el momento en este capítulo.

79. ¿Cómo simplificaría la expresión $\dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{12}}{\sqrt{2}}$?

MÁS INVESTIGACIÓN

80. Use su calculadora para evaluar cada expresión en los problemas 53-66. Luego evalúe los resultados que obtuvo cuando resolvió los problemas.

5.5 Ecuaciones que implican radicales

Con frecuencia, a las ecuaciones que contienen radicales con variables en un radicando se les conoce como **ecuaciones radicales**. En esta sección se estudian técnicas para resolver tales ecuaciones que contienen uno o más radicales. Para resolver ecuaciones radicales se necesita la siguiente propiedad de igualdad.

Propiedad 5.6

Sean a y b números reales y n un entero positivo.

Si $a = b$, entonces $a^n = b^n$.

La propiedad 5.6 afirma que es posible elevar ambos lados de una ecuación a una potencia entera positiva. Sin embargo, elevar ambos lados de una ecuación a una potencia entera positiva en ocasiones produce resultados que no satisfacen la ecuación original. Considere dos ejemplos para ilustrar este punto.

EJEMPLO 1

Resuelva $\sqrt{2x - 5} = 7$

Solución

$$\sqrt{2x - 5} = 7$$

$$(\sqrt{2x - 5})^2 = 7^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$2x - 5 = 49$$

$$2x = 54$$

$$x = 27$$

✔ **Comprobación**

$$\sqrt{2x - 5} = 7$$

$$\sqrt{2(27) - 5} \stackrel{?}{=} 7$$

$$\sqrt{49} \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 = 7$$

La solución para $\sqrt{2x - 5} = 7$ es $\{27\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $\sqrt{3a+4} = -4$

Solución

$$\sqrt{3a+4} = -4$$
$$(\sqrt{3a+4})^2 = (-4)^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$
$$3a+4 = 16$$
$$3a = 12$$
$$a = 4$$

✔ **Comprobación**

$$\sqrt{3a+4} = -4$$
$$\sqrt{3(4)+4} \stackrel{?}{=} -4$$
$$\sqrt{16} \stackrel{?}{=} -4$$
$$4 \neq -4$$

Puesto que 4 no coincide, la ecuación original no tiene solución en números reales. Por ende, el conjunto solución es $\varnothing$. ■

En general, elevar ambos lados de una ecuación a una potencia entera positiva produce una ecuación que tiene todas las soluciones de la ecuación original, pero también puede tener algunas soluciones adicionales que no satisfagan la ecuación original. Tales soluciones adicionales se llaman **soluciones extrañas**. Por tanto, cuando use la propiedad 5.6, *debe* comprobar cada solución potencial en la ecuación original.

Considere algunos ejemplos para ilustrar diferentes situaciones que surgen cuando se resuelven ecuaciones radicales.

EJEMPLO 3

Resuelva $\sqrt{2t-4} = t-2$

Solución

$$\sqrt{2t-4} = t-2$$
$$(\sqrt{2t-4})^2 = (t-2)^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$
$$2t-4 = t^2-4t+4$$
$$0 = t^2-6t+8$$
$$0 = (t-2)(t-4) \quad \text{Factorice el lado derecho.}$$
$$t-2=0 \quad \text{o} \quad t-4=0 \quad \text{Aplique: } ab=0 \text{ si y sólo si } a=0 \text{ o } b=0.$$
$$t=2 \quad \text{o} \quad t=4$$

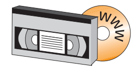
Comprobación

$$\sqrt{2t-4} = t-2 \qquad\qquad \sqrt{2t-4} = t-2$$
$$\sqrt{2(2)-4} \stackrel{?}{=} 2-2, \text{ cuando } t=2 \quad \text{o} \quad \sqrt{2(4)-4} \stackrel{?}{=} 4-2, \text{ cuando } t=4$$
$$\sqrt{0} \stackrel{?}{=} 0 \qquad\qquad \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$
$$0 = 0 \qquad\qquad 2 = 2$$

El conjunto solución es {2, 4}. ■

EJEMPLO 4

Resuelva $\sqrt{y} + 6 = y$



Solución

$$\sqrt{y} + 6 = y$$
$$\sqrt{y} = y - 6$$
$$(\sqrt{y})^2 = (y-6)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$
$$y = y^2 - 12y + 36$$
$$0 = y^2 - 13y + 36$$
$$0 = (y-4)(y-9) \qquad \text{Factorice el lado derecho.}$$
$$y - 4 = 0 \quad \text{o} \quad y - 9 = 0 \qquad \text{Aplique } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$
$$y = 4 \quad \text{o} \quad y = 9$$

Comprobación

$$\sqrt{y} + 6 = y \qquad\qquad \sqrt{y} + 6 = y$$
$$\sqrt{4} + 6 \stackrel{?}{=} 4, \text{ cuando } y = 4 \quad \text{o} \quad \sqrt{9} + 6 \stackrel{?}{=} 9, \text{ cuando } y = 9$$
$$2 + 6 \stackrel{?}{=} 4 \qquad\qquad 3 + 6 \stackrel{?}{=} 9$$
$$8 \neq 4 \qquad\qquad 9 = 9$$

La única solución es 9; el conjunto solución es {9}. ■

En el ejemplo 4 advierta que se cambió la forma de la ecuación original $\sqrt{y} + 6 = y$ a $\sqrt{y} = y - 6$ antes de elevar al cuadrado ambos lados. Elevar al cuadrado ambos lados de $\sqrt{y} + 6 = y$ produce $y + 12\sqrt{y} + 36 = y^2$, que es una ecuación mucho más compleja que todavía contiene un radical. Aquí de nuevo es redituable pensar antes de realizar todos los pasos. Ahora considere un ejemplo que implique una raíz cúbica.

EJEMPLO 5

Resuelva $\sqrt[3]{n^2 - 1} = 2$

Solución

$$\sqrt[3]{n^2 - 1} = 2$$
$$(\sqrt[3]{n^2 - 1})^3 = 2^3 \qquad \text{Eleve al cubo ambos lados.}$$

$$n^2 - 1 = 8$$
$$n^2 - 9 = 0$$
$$(n + 3)(n - 3) = 0$$
$$n + 3 = 0 \quad \text{o} \quad n - 3 = 0$$
$$n = -3 \quad \text{o} \quad n = 3$$

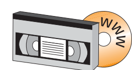
✔ **Comprobación**

$$\sqrt[3]{n^2 - 1} = 2 \qquad\qquad \sqrt[3]{n^2 - 1} = 2$$
$$\sqrt[3]{(-3)^2 - 1} \stackrel{?}{=} 2, \quad \text{cuando } n = -3 \quad \text{o} \quad \sqrt[3]{3^2 - 1} \stackrel{?}{=} 2, \quad \text{cuando } n = 3$$
$$\sqrt[3]{8} \stackrel{?}{=} 2 \qquad\qquad \sqrt[3]{8} \stackrel{?}{=} 2$$
$$2 = 2 \qquad\qquad 2 = 2$$

El conjunto solución es $\{-3, 3\}$. ■

Acaso sea necesario elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación, simplificar la ecuación resultante y luego elevar al cuadrado ambos lados nuevamente. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de problema.

EJEMPLO 6 Resuelva $\sqrt{x + 2} = 7 - \sqrt{x + 9}$



Solución

$$\sqrt{x + 2} = 7 - \sqrt{x + 9}$$
$$(\sqrt{x + 2})^2 = (7 - \sqrt{x + 9})^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$
$$x + 2 = 49 - 14\sqrt{x + 9} + x + 9$$
$$x + 2 = x + 58 - 14\sqrt{x + 9}$$
$$-56 = -14\sqrt{x + 9}$$
$$4 = \sqrt{x + 9}$$
$$(4)^2 = (\sqrt{x + 9})^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$
$$16 = x + 9$$
$$7 = x$$

✔ **Comprobación**

$$\sqrt{x + 2} = 7 - \sqrt{x + 9}$$
$$\sqrt{7 + 2} \stackrel{?}{=} 7 - \sqrt{7 + 9}$$
$$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 7 - \sqrt{16}$$
$$3 \stackrel{?}{=} 7 - 4$$
$$3 = 3$$

El conjunto solución es $\{7\}$. ■

Otro vistazo a las aplicaciones

En la sección 5.1 se usó la fórmula $S = \sqrt{30Df}$ para aproximar cuán rápido viajaba un automóvil a partir de la longitud de las marcas de derrape. (Recuerde que S representa la rapidez del vehículo en millas por hora, D representa la longitud de las marcas de derrape en pies y f representa un coeficiente de fricción.) Esta misma fórmula se puede usar para estimar la longitud de las marcas de derrape que producen los automóviles que viajan con diferentes rapideces en varios tipos de superficies de camino. Para usar la fórmula con este propósito, cambie la forma de la ecuación al resolver para D.

$$\sqrt{30Df} = S$$

$$30Df = S^2$$ El resultado de elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación original.

$$D = \frac{S^2}{30f}$$ D, S y f son números positivos, de modo que esta ecuación final y la original son equivalentes.

EJEMPLO 7

Suponga que, para una superficie de camino particular, el coeficiente de fricción es 0.35. ¿Cuánto derrapará un automóvil cuando se le apliquen los frenos a 60 millas por hora?

Solución

Puede sustituir 0.35 por f y 60 por S en la fórmula $D = \frac{S^2}{30f}$.

$$D = \frac{60^2}{30(0.35)} = 343, \quad \text{al número entero más cercano}$$

El automóvil derrapará aproximadamente 343 pies. ■

Observaciones: Deténgase por un momento y piense acerca del resultado del ejemplo 7. El coeficiente de fricción 0.35 se refiere a una superficie de concreto mojado. Note que un automóvil que viaje a 60 millas por hora en tal superficie derrapará más que la longitud de un campo de futbol.

Conjunto de problemas 5.5

Para los problemas 1-56 resuelva cada ecuación. No olvide comprobar cada una de sus soluciones potenciales.

1. $\sqrt{5x} = 10$
2. $\sqrt{3x} = 9$
3. $\sqrt{2x} + 4 = 0$
4. $\sqrt{4x} + 5 = 0$
5. $2\sqrt{n} = 5$
6. $5\sqrt{n} = 3$
7. $3\sqrt{n} - 2 = 0$
8. $2\sqrt{n} - 7 = 0$
9. $\sqrt{3y + 1} = 4$
10. $\sqrt{2y - 3} = 5$
11. $\sqrt{4y - 3} - 6 = 0$
12. $\sqrt{3y + 5} - 2 = 0$
13. $\sqrt{3x - 1} + 1 = 4$
14. $\sqrt{4x - 1} - 3 = 2$
15. $\sqrt{2n + 3} - 2 = -1$
16. $\sqrt{5n + 1} - 6 = -4$
17. $\sqrt{2x - 5} = -1$
18. $\sqrt{4x - 3} = -4$
19. $\sqrt{5x + 2} = \sqrt{6x + 1}$
20. $\sqrt{4x + 2} = \sqrt{3x + 4}$
21. $\sqrt{3x + 1} = \sqrt{7x - 5}$
22. $\sqrt{6x + 5} = \sqrt{2x + 10}$

23. $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 4} = 0$

24. $\sqrt{7x - 6} - \sqrt{5x + 2} = 0$

25. $5\sqrt{t - 1} = 6$

26. $4\sqrt{t + 3} = 6$

27. $\sqrt{x^2 + 7} = 4$

28. $\sqrt{x^2 + 3} - 2 = 0$

29. $\sqrt{x^2 + 13x + 37} = 1$

30. $\sqrt{x^2 + 5x - 20} = 2$

31. $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1$

32. $\sqrt{n^2 - 2n - 4} = n$

33. $\sqrt{x^2 + 3x + 7} = x + 2$

34. $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 3$

35. $\sqrt{-4x + 17} = x - 3$

36. $\sqrt{2x - 1} = x - 2$

37. $\sqrt{n + 4} = n + 4$

38. $\sqrt{n + 6} = n + 6$

39. $\sqrt{3y} = y - 6$

40. $2\sqrt{n} = n - 3$

41. $4\sqrt{x} + 5 = x$

42. $\sqrt{-x} - 6 = x$

43. $\sqrt[3]{x - 2} = 3$

44. $\sqrt[3]{x + 1} = 4$

45. $\sqrt[3]{2x + 3} = -3$

46. $\sqrt[3]{3x - 1} = -4$

47. $\sqrt[3]{2x + 5} = \sqrt[3]{4 - x}$

48. $\sqrt[3]{3x - 1} = \sqrt[3]{2 - 5x}$

49. $\sqrt{x + 19} - \sqrt{x + 28} = -1$

50. $\sqrt{x + 4} = \sqrt{x - 1} + 1$

51. $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x + 4} = 3$

52. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3} = 1$

53. $\sqrt{n - 4} + \sqrt{n + 4} = 2\sqrt{n - 1}$

54. $\sqrt{n - 3} + \sqrt{n + 5} = 2\sqrt{n}$

55. $\sqrt{t + 3} - \sqrt{t - 2} = \sqrt{7 - t}$

56. $\sqrt{t + 7} - 2\sqrt{t - 8} = \sqrt{t - 5}$

57. Use la fórmula dada en el ejemplo 7 con un coeficiente de fricción de 0.95. ¿Cuánto derrapará un automóvil a 40 millas por hora?, ¿a 55 millas por hora?, ¿a 65 millas por hora? Exprese las respuestas al pie más cercano.

58. Resuelva la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ para L. (Recuerde que en esta fórmula, que se usó en la sección 5.2, T representa el periodo de un péndulo expresado en segundos, y L representa la longitud del péndulo en pies.)

59. En el problema 58 debió obtener la ecuación $L = \frac{8T^2}{\pi^2}$. ¿Cuál es la longitud de un péndulo que tiene un periodo de 2 segundos?, ¿de 2.5 segundos?, ¿de 3 segundos? Exprese sus respuestas a la décima de pie más cercana.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

60. Explique el concepto de soluciones extrañas.

61. Explique por qué se *deben* comprobar las posibles soluciones a las ecuaciones radicales.

62. Su amigo hace un esfuerzo por resolver la ecuación $3 + 2\sqrt{x} = x$ del modo siguiente:

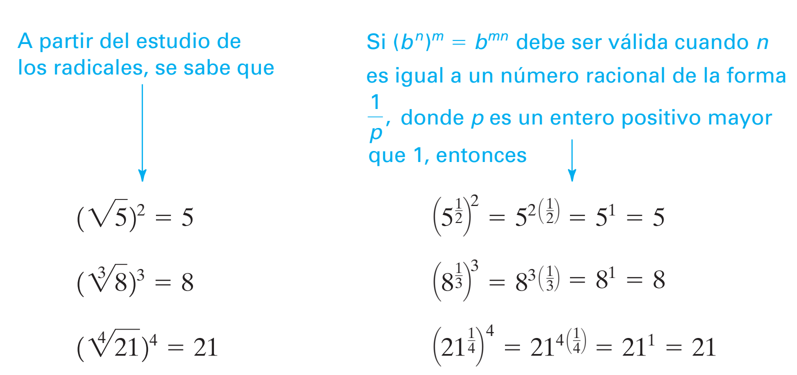
$$(3 + 2\sqrt{x})^2 = x^2$$
$$9 + 12\sqrt{x} + 4x = x^2$$

En este paso se detiene y no sabe cómo proceder. ¿Qué ayuda le daría?

5.6 Combinación de exponentes y raíces

Recuerde que las propiedades básicas de los exponentes enteros positivos conducen a una definición para el uso de enteros negativos como exponentes. En esta sección las propiedades de los exponentes enteros se usan para formar definiciones para el uso de números racionales como exponentes. Estas definiciones ligarán los conceptos de exponente y raíz.

Considere las siguientes comparaciones.



Parecería razonable hacer la siguiente definición.

Definición 5.6

Si b es un número real, n es un entero positivo mayor que 1 y existe $\sqrt[n]{b}$ entonces

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

La definición 5.6 afirma que $b^{\frac{1}{n}}$ significa la raíz n-ésima de b. Se supondrá que b y n se eligen de modo que existe $\sqrt[n]{b}$. Por ejemplo, $(-25)^{\frac{1}{2}}$ no es significativa en este momento porque $\sqrt{-25}$ no es un número real. Considere los siguientes ejemplos, que demuestran el uso de la definición 5.6.

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \qquad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

La siguiente definición proporciona la base para el uso de *todos* los números racionales como exponentes.

Definición 5.7

Si $\frac{m}{n}$ es un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1, y b es un número real tal que existe $\sqrt[n]{b}$ entonces

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$$

En la definición 5.7 note que el denominador del exponente es el índice del radical y que el numerador del exponente es el exponente del radicando o el exponente de la raíz.

El uso de la forma $\sqrt[n]{b^m}$ o de la forma $(\sqrt[n]{b})^m$ para propósitos de cálculo depende un poco de la magnitud del problema. Use ambas formas en dos problemas para ilustrar este punto.

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \qquad \text{o} \qquad 8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9 \qquad \text{o} \qquad 27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

Para calcular $8^{\frac{2}{3}}$, cualquier forma parece funcionar tan bien como la otra. Sin embargo, para calcular $27^{\frac{2}{3}}$, debe ser obvio que $(\sqrt[3]{27})^2$ es mucho más fácil de manejar que $\sqrt[3]{27^2}$.

EJEMPLO 1

Simplifique cada una de las siguientes expresiones numéricas.

(a) $25^{\frac{3}{2}}$ **(b)** $16^{\frac{3}{4}}$ **(c)** $(32)^{-\frac{2}{5}}$

(d) $(-64)^{\frac{2}{3}}$ **(e)** $-8^{\frac{1}{3}}$

Solución

(a) $25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$

(b) $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$

(c) $(32)^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{(32)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{32})^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

(d) $(-64)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-64})^2 = (-4)^2 = 16$

(e) $-8^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{8} = -2$ ■

Las leyes básicas de los exponentes que se enunciaron en la propiedad 5.2 son ciertas para cualquier exponente racional. Por tanto, a partir de ahora se usará la propiedad 5.2 para exponentes tanto racionales como enteros.

Algunos problemas se pueden manejar mejor en forma exponencial y otros en forma radical. Por ende, debe poder cambiar de formas con cierta facilidad. Considere algunos ejemplos donde se cambia de una forma a la otra.

EJEMPLO 2

Escriba cada una de las siguientes expresiones en forma radical.

(a) $x^{\frac{3}{4}}$ **(b)** $3y^{\frac{2}{5}}$ **(c)** $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ **(d)** $(x+y)^{\frac{2}{3}}$

Solución

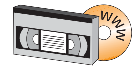
(a) $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ **(b)** $3y^{\frac{2}{5}} = 3\sqrt[5]{y^2}$

(c) $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} = (xy^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{xy^3}$ **(d)** $(x+y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x+y)^2}$ ■

EJEMPLO 3

Escriba cada una de las siguientes expresiones usando exponentes racionales positivos.

(a) $\sqrt{xy}$ **(b)** $\sqrt[4]{a^3b}$ **(c)** $4\sqrt[3]{x^2}$ **(d)** $\sqrt[5]{(x+y)^4}$



Solución

(a) $\sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ **(b)** $\sqrt[4]{a^3b} = (a^3b)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}$

(c) $4\sqrt[3]{x^2} = 4x^{\frac{2}{3}}$ **(d)** $\sqrt[5]{(x+y)^4} = (x+y)^{\frac{4}{5}}$ ■

Las propiedades de los exponentes proporcionan la base para simplificar expresiones algebraicas que contengan exponentes racionales, como ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4

Simplifique cada una de las siguientes expresiones. Exprese los resultados finales usando solamente exponentes positivos.

(a) $\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}\right)$ **(b)** $\left(5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ **(c)** $\dfrac{12y^{\frac{1}{3}}}{6y^{\frac{1}{2}}}$ **(d)** $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{5}}}{2y^{\frac{2}{3}}}\right)^4$

Solución

(a)
$$\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)\left(4x^{\frac{2}{3}}\right) = 3 \cdot 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$
$$= 12x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} \qquad b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$
$$= 12x^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} \qquad \text{Use 6 como MCD.}$$
$$= 12x^{\frac{7}{6}}$$

(b)
$$\left(5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^2 \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \qquad (ab)^n = a^nb^n$$
$$= 25a^{\frac{2}{3}}b \qquad (b^n)^m = b^{mn}$$

(c)
$$\frac{12y^{\frac{1}{3}}}{6y^{\frac{1}{2}}} = 2y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \qquad \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$
$$= 2y^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}}$$
$$= 2y^{-\frac{1}{6}}$$
$$= \frac{2}{y^{\frac{1}{6}}}$$

(d) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{5}}}{2y^{\frac{2}{3}}}\right)^4 = \dfrac{\left(3x^{\frac{2}{5}}\right)^4}{\left(2y^{\frac{2}{3}}\right)^4}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$= \dfrac{3^4 \cdot \left(x^{\frac{2}{5}}\right)^4}{2^4 \cdot \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^4}$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$= \dfrac{81x^{\frac{8}{5}}}{16y^{\frac{8}{3}}}$ $\qquad (b^n)^m = b^{mn}$ ■

El vínculo entre exponentes y raíces también proporciona una base para multiplicar y dividir algunos radicales, incluso si tienen diferentes índices. El procedimiento general es el siguiente:

1. Cambie de forma radical a forma exponencial.

2. Aplique las propiedades de los exponentes.

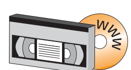
3. Luego cambie a forma radical.

Las tres partes del ejemplo 5 ilustran este proceso.

EJEMPLO 5

Realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma radical más simple.

(a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{2}}$



Solución

(a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}$ Use 6 como MCD.

$= 2^{\frac{5}{6}}$

$= \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

(b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{3}}}$

$= 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

$= 5^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ Use 6 como MCD.

$= 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

(c) $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$= \dfrac{(2^2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$= \dfrac{2^1}{2^{\frac{1}{3}}}$

$= 2^{1-\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ ■

Conjunto de problemas 5.6

Para los problemas 1-30 evalúe cada expresión numérica.

1. $81^{\frac{1}{2}}$
2. $64^{\frac{1}{2}}$
3. $27^{\frac{1}{3}}$
4. $(-32)^{\frac{1}{5}}$
5. $(-8)^{\frac{1}{3}}$
6. $\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$
7. $-25^{\frac{1}{2}}$
8. $-64^{\frac{1}{3}}$
9. $36^{-\frac{1}{2}}$
10. $81^{-\frac{1}{2}}$
11. $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
12. $\left(-\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
13. $4^{\frac{3}{2}}$
14. $64^{\frac{2}{3}}$
15. $27^{\frac{4}{3}}$
16. $4^{\frac{7}{2}}$
17. $(-1)^{\frac{7}{3}}$
18. $(-8)^{\frac{4}{3}}$
19. $-4^{\frac{5}{2}}$
20. $-16^{\frac{3}{2}}$
21. $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$
22. $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$
23. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$
24. $\left(-\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$
25. $64^{-\frac{7}{6}}$
26. $32^{-\frac{4}{5}}$
27. $-25^{\frac{3}{2}}$
28. $-16^{\frac{3}{4}}$
29. $125^{\frac{4}{3}}$
30. $81^{\frac{5}{4}}$

Para los problemas 31-44 escriba cada una de las siguientes expresiones en forma radical. Por ejemplo,

$$3x^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{x^2}$$

31. $x^{\frac{4}{3}}$
32. $x^{\frac{2}{5}}$
33. $3x^{\frac{1}{2}}$
34. $5x^{\frac{1}{4}}$
35. $(2y)^{\frac{1}{3}}$
36. $(3xy)^{\frac{1}{2}}$
37. $(2x - 3y)^{\frac{1}{2}}$
38. $(5x + y)^{\frac{1}{3}}$
39. $(2a - 3b)^{\frac{2}{3}}$
40. $(5a + 7b)^{\frac{3}{5}}$
41. $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$
42. $x^{\frac{3}{7}}y^{\frac{5}{7}}$
43. $-3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{5}}$
44. $-4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$

Para los problemas 45-58 escriba cada una de las siguientes expresiones usando exponentes racionales positivos. Por ejemplo,

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

45. $\sqrt{5y}$
46. $\sqrt{2xy}$
47. $3\sqrt{y}$
48. $5\sqrt{ab}$
49. $\sqrt[3]{xy^2}$
50. $\sqrt[5]{x^2y^4}$
51. $\sqrt[4]{a^2b^3}$
52. $\sqrt[6]{ab^5}$
53. $\sqrt[5]{(2x - y)^3}$
54. $\sqrt[7]{(3x - y)^4}$
55. $5x\sqrt{y}$
56. $4y\sqrt[3]{x}$
57. $-\sqrt[3]{x + y}$
58. $-\sqrt[5]{(x - y)^2}$

Para los problemas 59-80 simplifique cada una de las siguientes. Exprese los resultados finales usando solamente exponentes positivos. Por ejemplo,

$$\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}\right) = 6x^{\frac{5}{6}}$$

59. $\left(2x^{\frac{2}{5}}\right)\left(6x^{\frac{1}{4}}\right)$
60. $\left(3x^{\frac{1}{4}}\right)\left(5x^{\frac{1}{3}}\right)$
61. $\left(y^{\frac{2}{3}}\right)\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)$
62. $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)$
63. $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)\left(4x^{-\frac{1}{2}}\right)$
64. $\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$
65. $\left(4x^{\frac{1}{2}}y\right)^2$
66. $\left(3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{5}}\right)^3$
67. $(8x^6y^3)^{\frac{1}{3}}$
68. $(9x^2y^4)^{\frac{1}{2}}$
69. $\dfrac{24x^{\frac{3}{5}}}{6x^{\frac{1}{3}}}$
70. $\dfrac{18x^{\frac{1}{2}}}{9x^{\frac{1}{3}}}$
71. $\dfrac{48b^{\frac{1}{3}}}{12b^{\frac{3}{4}}}$
72. $\dfrac{56a^{\frac{1}{6}}}{8a^{\frac{1}{4}}}$
73. $\left(\dfrac{6x^{\frac{2}{5}}}{7y^{\frac{2}{3}}}\right)^2$
74. $\left(\dfrac{2x^{\frac{1}{3}}}{3y^{\frac{1}{4}}}\right)^4$
75. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{-\frac{1}{2}}$
76. $\left(\dfrac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

77. $\left(\dfrac{18x^{\frac{1}{3}}}{9x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$

78. $\left(\dfrac{72x^{\frac{3}{4}}}{6x^{\frac{1}{2}}}\right)^2$

79. $\left(\dfrac{60a^{\frac{1}{5}}}{15a^{\frac{3}{4}}}\right)^2$

80. $\left(\dfrac{64a^{\frac{1}{3}}}{16a^{\frac{5}{9}}}\right)^3$

Para los problemas 81-90 realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma radical más simple. (Vea el ejemplo 5.)

81. $\sqrt[3]{3}\sqrt{3}$

82. $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}$

83. $\sqrt[4]{6}\sqrt{6}$

84. $\sqrt[3]{5}\sqrt{5}$

85. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

86. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

87. $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[4]{4}}$

88. $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$

89. $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

90. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

91. Su amigo todavía obtiene un mensaje de error cuando evalúa $-4^{\frac{5}{2}}$ en su calculadora. ¿Qué error comete?

92. Explique cómo evaluaría $27^{\frac{2}{3}}$ sin una calculadora.

MÁS INVESTIGACIÓN

93. Use su calculadora para evaluar cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt[3]{1728}$ **(b)** $\sqrt[3]{5832}$

(c) $\sqrt[4]{2401}$ **(d)** $\sqrt[4]{65\,536}$

(e) $\sqrt[5]{161\,051}$ **(f)** $\sqrt[5]{6\,436\,343}$

94. La definición 5.7 afirma que

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$$

Use su calculadora para verificar cada una de las siguientes expresiones.

(a) $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2$ **(b)** $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5$

(c) $\sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3$ **(d)** $\sqrt[3]{16^2} = (\sqrt[3]{16})^2$

(e) $\sqrt[5]{9^4} = (\sqrt[5]{9})^4$ **(f)** $\sqrt[3]{12^4} = (\sqrt[3]{12})^4$

95. Use su calculadora para evaluar cada una de las siguientes expresiones.

(a) $16^{\frac{5}{2}}$ **(b)** $25^{\frac{7}{2}}$

(c) $16^{\frac{9}{4}}$ **(d)** $27^{\frac{5}{3}}$

(e) $343^{\frac{2}{3}}$ **(f)** $512^{\frac{4}{3}}$

96. Use su calculadora para estimar cada una de las siguientes a la milésima más cercana.

(a) $7^{\frac{4}{3}}$ **(b)** $10^{\frac{4}{5}}$

(c) $12^{\frac{3}{5}}$ **(d)** $19^{\frac{2}{5}}$

(e) $7^{\frac{3}{4}}$ **(f)** $10^{\frac{5}{4}}$

97. **(a)** Puesto que $\dfrac{4}{5} = 0.8$ se puede evaluar $10^{\frac{4}{5}}$ al valorar $10^{0.8}$, que implica una secuencia más corta de "pasos de calculadora". Evalúe las partes (b), (c), (d), (e) y (f) del problema 96 y saque ventaja de los exponentes decimales.

(b) ¿Qué problema se crea cuando se intenta evaluar $7^{\frac{4}{3}}$ al cambiar el exponente a forma decimal?

5.7 Notación científica

Muchas aplicaciones de matemáticas implican el uso de números o muy grandes o muy pequeños.

1. La rapidez de la luz es aproximadamente 29 979 200 000 centímetros por segundo.
2. Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es aproximadamente 5 865 696 000 000 millas.
3. Un milimicrón es igual a 0.000000001 de metro.

Trabajar con números de este tipo en forma decimal estándar es muy complicado. Es mucho más conveniente representar números muy pequeños y muy grandes en **notación científica**. La expresión $(N)(10)^k$, donde N es un número mayor que o igual a 1 y menor que 10, escrito en forma decimal, y k es cualquier entero, comúnmente se llama notación científica o forma científica de un número. Considere los siguientes ejemplos, que muestran una comparación entre notación decimal ordinaria y notación científica.

Notación ordinaria	Notación científica
2.14	$(2.14)(10)^0$
31.78	$(3.178)(10)^1$
412.9	$(4.129)(10)^2$
8 000 000	$(8)(10)^6$
0.14	$(1.4)(10)^{-1}$
0.0379	$(3.79)(10)^{-2}$
0.00000049	$(4.9)(10)^{-7}$

Para cambiar de notación ordinaria a notación científica puede usar el siguiente procedimiento.

Escriba el número dado como el producto de un número mayor que o igual a 1 y menor que 10, y una potencia de 10. El exponente de 10 se determina al contar el número de lugares que se movió el punto decimal cuando se pasó del número original al número mayor que o igual a 1 y menor que 10. Este exponente es (a) negativo si el número original es menor que 1, (b) positivo si el número original es mayor que 10 y (c) 0 si el número original está entre 1 y 10.

Por tanto, se puede escribir

$$0.00467 = (4.67)(10)^{-3}$$
$$87\ 000 = (8.7)(10)^{4}$$
$$3.1416 = (3.1416)(10)^{0}$$

Es posible expresar las aplicaciones dadas con anterioridad en notación científica, del modo siguiente:

Rapidez de la luz $29\ 979\ 200\ 000 = (2.99792)(10)^{10}$ centímetros por segundo.

Año luz $5\ 865\ 696\ 000\ 000 = (5.865696)(10)^{12}$ millas.

Unidades métricas Un milimicrón es $0.000000001 = (1)(10)^{-9}$ metros.

Para cambiar de notación científica a notación decimal ordinaria puede usar el siguiente procedimiento.

> Mueva el punto decimal el número de lugares indicado por el exponente de 10. El punto decimal se mueve hacia la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si el exponente es negativo.

Por tanto, se puede escribir

$$(4.78)(10)^{4} = 47\ 800$$
$$(8.4)(10)^{-3} = 0.0084$$

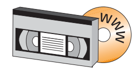
La notación científica se usa para simplificar cálculos numéricos. Basta con cambiar los números a notación científica y usar las propiedades adecuadas de los exponentes. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Realice las operaciones indicadas.

(a) $(0.00024)(20\ 000)$ **(b)** $\dfrac{7\ 800\ 000}{0.0039}$

(c) $\dfrac{(0.00069)(0.0034)}{(0.0000017)(0.023)}$ **(d)** $\sqrt{0.000004}$



Solución

(a)
$$\begin{aligned}(0.00024)(20{,}000) &= (2.4)(10)^{-4}(2)(10)^{4}\\ &= (2.4)(2)(10)^{-4}(10)^{4}\\ &= (4.8)(10)^{0}\\ &= (4.8)(1)\\ &= 4.8\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{7\,800\,000}{0.0039} = \dfrac{(7.8)(10)^6}{(3.9)(10)^{-3}}$

$= (2)(10)^9$

$= 2\,000\,000\,000$

(c) $\dfrac{(0.00069)(0.0034)}{(0.0000017)(0.023)} = \dfrac{(6.9)(10)^{-4}(3.4)(10)^{-3}}{(1.7)(10)^{-6}(2.3)(10)^{-2}}$

$= \dfrac{\overset{3}{(\cancel{6.9})}\overset{2}{(\cancel{3.4})}(10)^{-7}}{(\cancel{1.7})(\cancel{2.3})(10)^{-8}}$

$= (6)(10)^1$

$= 60$

(d) $\sqrt{0.00004} = \sqrt{(4)(10)^{-6}}$

$= ((4)(10)^{-6})^{\frac{1}{2}}$

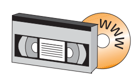
$= 4^{\frac{1}{2}}((10)^{-6})^{\frac{1}{2}}$

$= (2)(10)^{-3}$

$= 0.002$ ■

EJEMPLO 2

La rapidez de la luz es aproximadamente $(1.86)(10^5)$ millas por segundo. Cuando la Tierra está a $(9.3)(10^7)$ millas de distancia del Sol, ¿cuánto tardará la luz del Sol en llegar a la Tierra?



Solución

Se usará la fórmula $t = \dfrac{d}{r}$.

$$t = \frac{(9.3)(10^7)}{(1.86)(10^5)}$$

$$t = \frac{(9.3)}{(1.86)}(10^2) \qquad \text{Reste exponentes.}$$

$$t = (5)(10^2) = 500 \text{ segundos}$$

A esta distancia la luz tarda aproximadamente 500 segundos en viajar del Sol a la Tierra. Para encontrar la respuesta en minutos divida 500 segundos entre 60 segundos/minuto. Esto da un resultado de aproximadamente 8.33 minutos. ■

Muchas calculadoras están equipadas para mostrar números en notación científica. La pantalla muestra el número entre 1 y 10 y el exponente adecuado de 10. Por ejemplo, evaluar $(3\,800\,000)^2$ produce

1.444E13

Por tanto, $(3\,800\,000)^2 = (1.444)\,(10)^{13} = 14\,440\,000\,000\,000$.

De manera similar, la respuesta para $(0.000168)^2$ se muestra como

[2.8224E-8]

En consecuencia, $(0.000168)^2 = (2.8224)(10)^{-8} = 0.000000028224$.

Las calculadoras varían en el número de dígitos desplegados en el número, entre 1 y 10 cuando se usa notación científica. Por ejemplo, se usaron dos calculadoras diferentes para estimar $(6729)^6$ y se obtuvieron los siguientes resultados.

[9.2833E22]

[9.283316768E22]

Obvio, es necesario conocer las capacidades de la calculadora cuando se trabaja con problemas en notación científica. Muchas calculadoras también permiten el ingreso de un número en notación científica. Tales calculadoras cuentan con una tecla de ingreso de exponente (con frecuencia marcada como [EE] o [EEX]. Por tanto, ingrese un número como $(3.14)(10)^8$ del modo siguiente:

Ingrese	Oprima	Pantalla
3.14	[EE]	3.14E
8		3.14E8

o

Ingrese	Oprima	Pantalla
3.14	[EE]	$3.14^{\ 00}$
8		$3.14^{\ 08}$

Con frecuencia, en las calculadoras se usa una tecla [MODE] para que pueda elegir notación decimal normal, notación científica o notación de ingeniería. (Las abreviaturas Norm, Sci y Eng son de uso común.) Si la calculadora está en modo científico, entonces un número se puede ingresar y cambiar a forma científica al oprimir la tecla [ENTER]. Por ejemplo, cuando ingresa 589 y oprime la tecla [ENTER] la pantalla mostrará 5.89E2. Del mismo modo, cuando la calculadora está en modo científico, las respuestas a problemas de cálculo se dan en forma científica. Por ejemplo, la respuesta para (76)(533) se da como 4.0508E4.

A partir de esta breve discusión debe ser evidente que, aun cuando use una calculadora, necesita tener amplia comprensión de la notación científica.

Conjunto de problemas 5.7

Para los problemas 1-18 escriba cada una de las siguientes expresiones en notación científica. Por ejemplo

$$27\,800 = (2.78)(10)^4$$

1. 89

2. 117

3. 4290

4. 812 000

5. 6 120 000

6. 72 400 000

7. 40 000 000

8. 500 000 000

9. 376.4

10. 9126.21

11. 0.347

12. 0.2165

13. 0.0214

14. 0.0037

15. 0.00005

16. 0.00000082

17. 0.00000000194

18. 0.00000000003

Para los problemas 19-32 escriba cada una de las siguientes expresiones en notación decimal ordinaria. Por ejemplo,

$$(3.18)(10)^2 = 318$$

19. $(2.3)(10)^1$

20. $(1.62)(10)^2$

21. $(4.19)(10)^3$

22. $(7.631)(10)^4$

23. $(5)(10)^8$

24. $(7)(10)^9$

25. $(3.14)(10)^{10}$

26. $(2.04)(10)^{12}$

27. $(4.3)(10)^{-1}$

28. $(5.2)(10)^{-2}$

29. $(9.14)(10)^{-4}$

30. $(8.76)(10)^{-5}$

31. $(5.123)(10)^{-8}$

32. $(6)(10)^{-9}$

Para los problemas 33-50 use notación científica y las propiedades de los exponentes para realizar las siguientes operaciones.

33. $(0.0037)(0.00002)$

34. $(0.00003)(0.00025)$

35. $(0.00007)(11\,000)$

36. $(0.000004)(120\,000)$

37. $\dfrac{360\,000\,000}{0.0012}$

38. $\dfrac{66\,000\,000\,000}{0.022}$

39. $\dfrac{0.000064}{16\,000}$

40. $\dfrac{0.00072}{0.0000024}$

41. $\dfrac{(60\,000)(0.006)}{(0.0009)(400)}$

42. $\dfrac{(0.00063)(960\,000)}{(3200)(0.0000021)}$

43. $\dfrac{(0.0045)(60\,000)}{(1800)(0.00015)}$

44. $\dfrac{(0.00016)(300)(0.028)}{0.064}$

45. $\sqrt{9\,000\,000}$

46. $\sqrt{0.00000009}$

47. $\sqrt[3]{8000}$

48. $\sqrt[3]{0.001}$

49. $(90\,000)^{\frac{3}{2}}$

50. $(8000)^{\frac{2}{3}}$

51. El número de Avogadro, 602 000 000 000 000 000 000 000, es el número de átomos en 1 mol de sustancia. Exprese este número en notación científica.

52. El programa de Seguridad Social pagó aproximadamente \$33 200 000 000 en beneficios en mayo de 2000. Exprese este número en notación científica.

53. La primera computadora de Carlos tenía una rapidez de procesamiento de $(1.6)(10^6)$ hertz. Recién compró una laptop con una rapidez de procesamiento de $(1.33)(10^9)$ hertz. ¿Aproximadamente cuántas veces es mayor la rapidez de procesamiento de su laptop que la de su primera computadora? Exprese el resultado en forma decimal.

54. Alaska tiene un área de aproximadamente $(6.15)(10^5)$ millas cuadradas. En 1999 el estado tenía una población de alrededor de 619 000 personas. Calcule la densidad de población a la centésima más cercana. La densidad de población es el número de personas por milla cuadrada. Exprese el resultado en forma decimal redondeada a la centésima más cercana.

55. En el año 2000 la deuda pública de Estados Unidos era de aproximadamente \$5 700 000 000 000. Para julio de 2000, el censo reportó que 275 000 000 personas vivían en Estados Unidos. Convierta estas cifras a notación científica y calcule la deuda promedio por persona. Exprese el resultado en notación científica.

56. El trasbordador espacial puede viajar a aproximadamente 410 000 millas por día. Si el trasbordador pudiera viajar a Marte, y Marte estuviera a 140 000 000 millas de distancia, ¿cuántos días tardaría el trasbordador en llegar a Marte? Exprese el resultado en forma decimal.

57. Las masas atómicas se miden en unidades de masa atómica (uma). La uma $(1.67)(10^{-27})$ kilogramos se define como $\frac{1}{12}$ la masa de un átomo de carbono común. Encuentre la masa de un átomo de carbono en kilogramos. Exprese el resultado en notación científica.

58. El campo de visión de un microscopio es $(4)(10^{-4})$ metros. Si un solo organismo celular ocupa $\frac{1}{5}$ del campo de visión, encuentre la longitud del organismo en metros. Exprese el resultado en notación científica.

59. La masa de un electrón es $(9.11)(10^{-31})$ kilogramos y la masa de un protón es $(1.67)(10^{-27})$ kilogramos. ¿Aproximadamente cuántas veces es más pesado un protón que un electrón? Exprese el resultado en forma decimal.

60. Un píxel cuadrado en una pantalla de computadora tiene un lado con longitud $(1.17)(10^{-2})$ pulgadas. Encuentre el área aproximada del píxel en pulgadas. Exprese el resultado en forma decimal.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

61. Explique la importancia de la notación científica.

62. ¿Por qué es necesaria la notación científica aun cuando se usen calculadoras y computadoras?

MÁS INVESTIGACIÓN

63. En ocasiones es más conveniente expresar un número como un producto de una potencia de 10 y un número que no está entre 1 y 10. Por ejemplo, suponga que se quiere calcular $\sqrt{640\,000}$. Se puede proceder del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\sqrt{640\,000} &= \sqrt{(64)(10)^4}\\ &= ((64)(10)^4)^{\frac{1}{2}}\\ &= (64)^{\frac{1}{2}}(10^4)^{\frac{1}{2}}\\ &= (8)(10)^2\\ &= 8(100) = 800\end{aligned}$$

Calcule cada una de las siguientes sin calculadora, y luego use una calculadora para comprobar sus respuestas.

(a) $\sqrt{49\,000\,000}$ **(b)** $\sqrt{0.0025}$

(c) $\sqrt{14\,400}$ **(d)** $\sqrt{0.000121}$

(e) $\sqrt[3]{27\,000}$ **(f)** $\sqrt[3]{0.000064}$

64. Use su calculadora para evaluar cada una de las siguientes. Exprese las respuestas finales en notación ordinaria.

(a) $(27\,000)^2$ **(b)** $(450\,000)^2$

(c) $(14\,800)^2$ **(d)** $(1700)^3$

(e) $(900)^4$ **(f)** $(60)^5$

(g) $(0.0213)^2$ **(h)** $(0.000213)^2$

(i) $(0.000198)^2$ **(j)** $(0.000009)^3$

65. Use su calculadora para estimar cada una de las siguientes expresiones. Exprese las respuestas finales en notación científica con el número entre 1 y 10 redondeado a la milésima más cercana.

(a) $(4576)^4$ **(b)** $(719)^{10}$

(c) $(28)^{12}$ **(d)** $(8619)^6$

(e) $(314)^5$ **(f)** $(145\,723)^2$

66. Use su calculadora para estimar cada una de las siguientes expresiones. Exprese las respuestas finales en notación ordinaria redondeada a la milésima más cercana.

(a) $(1.09)^5$ **(b)** $(1.08)^{10}$

(c) $(1.14)^7$ **(d)** $(1.12)^{20}$

(e) $(0.785)^4$ **(f)** $(0.492)^5$

Capítulo 5 Resumen

(5.1) Las siguientes propiedades forman la base para el manejo de exponentes.

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ — Producto de dos potencias
2. $(b^n)^m = b^{mn}$ — Potencia de una potencia
3. $(ab)^n = a^n b^n$ — Potencia de un producto
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — Potencia de un cociente
5. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ — Cociente de dos potencias

(5.2) y (5.3) La **raíz *n*-ésima principal de *b*** se designa mediante $\sqrt[n]{b}$, donde n es el **índice** y b es el **radicando**.

Una expresión radical está en la **forma radical más simple** si

1. Un radicando no contiene factor polinomial elevado a una potencia igual a o mayor que el índice del radical.
2. No aparecen fracciones dentro de un signo radical y
3. No aparecen radicales en el denominador.

Las siguientes propiedades se usan para expresar radicales en la forma más simple.

$$\sqrt[n]{bc} = \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c} \qquad \sqrt[n]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}}$$

Simplificar mediante combinación de radicales en ocasiones requiere que primero se expresen los radicales dados en forma más simple y luego aplicar la propiedad distributiva.

(5.4) La propiedad distributiva así como la propiedad $\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{bc}$ se usan para encontrar productos de expresiones que implican radicales.

El patrón de producto especial $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ sugiere un procedimiento para **racionalizar el denominador** de una expresión que contiene un denominador binomial con radicales.

(5.5) Las ecuaciones que contienen radicales con variables en un radicando se llaman **ecuaciones radicales**. La propiedad "si $a = b$ entonces $a^n = b^n$" forma la base para resolver ecuaciones radicales. Elevar ambos lados de una ecuación a una potencia entera positiva puede producir **soluciones extrañas**; esto es, soluciones que no satisfacen la ecuación original. Por tanto, debe comprobar cada solución potencial.

(5.6) Si b es un número real, n es un entero positivo mayor que 1 y existe $\sqrt[n]{b}$ entonces

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

Por tanto, $b^{\frac{1}{n}}$ significa **la raíz *n*-ésima de *b***.

Si $\frac{m}{n}$ es un número racional, n es un entero positivo mayor que 1 y b es un número real tal que existe $\sqrt[n]{b}$, entonces

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$$

Tanto $\sqrt[n]{b^m}$ y $(\sqrt[n]{b})^m$ se pueden usar con propósitos de cálculo.

Es necesario poder intercambiar entre **forma exponencial** y **forma radical**. El vínculo entre exponentes y raíces proporciona una base para multiplicar y dividir algunos radicales incluso si tienen diferentes índices.

(5.7) La **forma científica** de un número se expresa como

$$(N)(10)^k$$

donde N es un número mayor que o igual a 1 y menor que 10, escrito en forma decimal, y k es un entero. Con frecuencia es conveniente la notación científica para usar con números muy pequeños y muy grandes. Por ejemplo, 0.000 046 se puede expresar como $(4.6)(10^{-5})$ y 92 000 000 se puede escribir como $(9.2)(10^7)$.

La notación científica se usa frecuentemente para simplificar cálculos numéricos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(0.000016)(30\,000) &= (1.6)(10)^{-5}(3)(10)^4 \\ &= (4.8)(10)^{-1} = 0.48\end{aligned}$$

Capítulo 5 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-12 evalúe cada una de las siguientes expresiones numéricas.

1. 4^{-3}
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
3. $(3^2 \cdot 3^{-3})^{-1}$
4. $\sqrt[3]{-8}$
5. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
6. $4^{\frac{5}{2}}$
7. $(-1)^{\frac{2}{3}}$
8. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$
9. $-16^{\frac{3}{2}}$
10. $\frac{2^3}{2^{-2}}$
11. $(4^{-2} \cdot 4^2)^{-1}$
12. $\left(\frac{3^{-1}}{3^2}\right)^{-1}$

Para los problemas 13-24 exprese cada uno de los siguientes radicales en la forma radical más simple. Suponga que las variables representan números reales positivos.

13. $\sqrt{54}$
14. $\sqrt{48x^3y}$
15. $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
16. $\sqrt{\frac{5}{12x^3}}$
17. $\sqrt[3]{56}$
18. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}$
19. $\sqrt{\frac{9}{5}}$
20. $\sqrt{\frac{3x^3}{7}}$
21. $\sqrt[3]{108x^4y^8}$
22. $\frac{3}{4}\sqrt{150}$
23. $\frac{2}{3}\sqrt{45xy^3}$
24. $\frac{\sqrt{8x^2}}{\sqrt{2x}}$

Para los problemas 25-32 multiplique y simplifique. Suponga que las variables representan números reales no negativos.

25. $(3\sqrt{8})(4\sqrt{5})$
26. $(5\sqrt[3]{2})(6\sqrt[3]{4})$
27. $3\sqrt{2}(4\sqrt{6} - 2\sqrt{7})$
28. $(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 5)$
29. $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})(2\sqrt{5} + \sqrt{3})$
30. $(3\sqrt{2} + \sqrt{6})(5\sqrt{2} - 3\sqrt{6})$
31. $(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(3\sqrt{a} - 4\sqrt{b})$
32. $(4\sqrt{8} - \sqrt{2})(\sqrt{8} + 3\sqrt{2})$

Para los problemas 33-36 racionalice el denominador y simplifique.

33. $\frac{4}{\sqrt{7} - 1}$
34. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8} + \sqrt{5}}$
35. $\frac{3}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}$
36. $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6} - \sqrt{10}}$

Para los problemas 37-42 simplifique cada una de las siguientes y exprese los resultados finales usando exponentes positivos.

37. $(x^{-3}y^4)^{-2}$
38. $\left(\frac{2a^{-1}}{3b^4}\right)^{-3}$
39. $(4x^{\frac{1}{2}})(5x^{\frac{1}{5}})$
40. $\frac{42a^{\frac{3}{4}}}{6a^{\frac{1}{3}}}$
41. $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^{-\frac{1}{3}}$
42. $\left(\frac{6x^{-2}}{2x^4}\right)^{-2}$

Para los problemas 43-46 use la propiedad distributiva para auxiliarse a simplificar cada una de las siguientes.

43. $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} - \sqrt{80}$
44. $4\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{81}$
45. $3\sqrt{24} - \frac{2\sqrt{54}}{5} + \frac{\sqrt{96}}{4}$
46. $-2\sqrt{12x} + 3\sqrt{27x} - 5\sqrt{48x}$

Para los problemas 47 y 48 exprese cada una como una sola fracción que implique solamente exponentes positivos.

47. $x^{-2} + y^{-1}$
48. $a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1}$

Para los problemas 49-56 resuelva cada ecuación.

49. $\sqrt{7x - 3} = 4$

50. $\sqrt{2y + 1} = \sqrt{5y - 11}$

51. $\sqrt{2x} = x - 4$

52. $\sqrt{n^2 - 4n - 4} = n$

53. $\sqrt[3]{2x - 1} = 3$

54. $\sqrt{t^2 + 9t - 1} = 3$

55. $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = x$

56. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x} = -1$

Para los problemas 57-64 use notación científica y las propiedades de los exponentes para auxiliarse a realizar los siguientes cálculos.

57. $(0.00002)(0.0003)$

58. $(120\,000)(300\,000)$

59. $(0.000015)(400\,000)$

60. $\dfrac{0.000045}{0.0003}$

61. $\dfrac{(0.00042)(0.0004)}{0.006}$

62. $\sqrt{0.000004}$

63. $\sqrt[3]{0.000000008}$

64. $(4\,000\,000)^{\frac{3}{2}}$

Capítulo 5 Examen

Para los problemas 1-4 simplifique cada una de las expresiones numéricas.

1. $(4)^{-\frac{5}{2}}$

2. $-16^{\frac{5}{4}}$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

4. $\left(\frac{2^{-1}}{2^{-2}}\right)^{-2}$

Para los problemas 5-9 exprese cada expresión radical en forma radical más simple. Suponga que las variables representan números reales positivos.

5. $\sqrt{63}$

6. $\sqrt[3]{108}$

7. $\sqrt{52x^4y^3}$

8. $\frac{5\sqrt{18}}{3\sqrt{12}}$

9. $\sqrt{\frac{7}{24x^3}}$

10. Multiplique y simplifique: $(4\sqrt{6})(3\sqrt{12})$

11. Multiplique y simplifique: $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

12. Simplifique mediante combinación de radicales semejantes: $2\sqrt{50} - 4\sqrt{18} - 9\sqrt{32}$

13. Racionalice el denominador y simplifique:

$$\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - \sqrt{8}}$$

14. Simplifique y exprese la respuesta usando exponentes positivos: $\left(\frac{2x^{-1}}{3y}\right)^{-2}$

15. Simplifique y exprese la respuesta usando exponentes positivos: $\frac{-84a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{4}{5}}}$

16. Exprese $x^{-1} + y^{-3}$ como una sola fracción que implique exponentes positivos.

17. Multiplique y exprese la respuesta usando exponentes positivos: $\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(4x^{\frac{3}{4}}\right)$

18. Multiplique y simplifique:

$(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$

Para los problemas 19 y 20 utilice notación científica y las propiedades de los exponentes para auxiliarse con los cálculos.

19. $\frac{(0.00004)(300)}{0.00002}$

20. $\sqrt{0.000009}$

Para los problemas 21-25 resuelva cada ecuación.

21. $\sqrt{3x + 1} = 3$

22. $\sqrt[3]{3x + 2} = 2$

23. $\sqrt{x} = x - 2$

24. $\sqrt{5x - 2} = \sqrt{3x + 8}$

25. $\sqrt{x^2 - 10x + 28} = 2$

6

Ecuaciones cuadráticas y desigualdades

El teorema de Pitágoras es ampliamente aplicado en la industria de la construcción cuando se involucran ángulos rectos.

Una página para una revista contiene 70 pulgadas cuadradas de tipografía. La altura de la página es el doble del ancho. Si el margen uniforme alrededor de la tipografía es de 2 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la página? Con la ecuación cuadrática $(x - 4)(2x - 4) = 70$ puede determinar que la página mide 9 por 18 pulgadas.

Resolver ecuaciones es uno de los temas centrales de este texto. Deténgase por un momento y reflexione acerca de los diferentes tipos de ecuaciones que ha resuelto en los cinco capítulos anteriores.

Como muestra la tabla de la siguiente página, ha resuelto ecuaciones de segundo grado con una variable, mas sólo aquellas para las cuales el polinomio es factorizable. En este capítulo se ampliará el trabajo para incluir tipos más generales de ecuaciones de segundo grado, así como desigualdades con una variable.

Tipo de ecuación	Ejemplos
Ecuaciones de primer grado con una variable	$3x + 2x = x - 4$; $5(x + 4) = 12$; $\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{4} = 2$
Ecuaciones de segundo grado con una variable *que son factorizables*	$x^2 + 5x = 0$; $x^2 + 5x + 6 = 0$; $x^2 - 9 = 0$; $x^2 - 10x + 25 = 0$
Ecuaciones fraccionarias	$\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 4$; $\frac{5}{a-1} = \frac{6}{a-2}$; $\frac{2}{x^2-9} + \frac{3}{x+3} = \frac{4}{x-3}$
Ecuaciones radicales	$\sqrt{x} = 2$; $\sqrt{3x-2} = 5$; $\sqrt{5y+1} = \sqrt{3y+4}$

6.1 Números complejos

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, una ecuación simple como $x^2 = -4$ no tiene soluciones en el conjunto de los números reales. Para manejar esta situación, puede expandirse el conjunto de los números reales en un conjunto más grande llamado **números complejos**. En esta sección se le instruirá acerca de cómo manejar números complejos.

Para proporcionar una solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se usa el número i, como

$$i^2 = -1$$

El número i no es un número real y con frecuencia se llama **unidad imaginaria**, pero el número i^2 es el número real -1. La unidad imaginaria i se usa para definir un número complejo del modo siguiente:

Definición 6.1

Un **número complejo** es cualquier número que se expresa en la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales.

La forma $a + bi$ se llama **forma estándar** de un número complejo. El número real a se llama **parte real** del número complejo y b se llama **parte imaginaria**. (Note que b es un número real aun cuando se le llame parte imaginaria.) La siguiente lista ejemplifica esta terminología.

1. El número $7 + 5i$ es una número complejo que tiene una parte real de 7 y una parte imaginaria de 5.

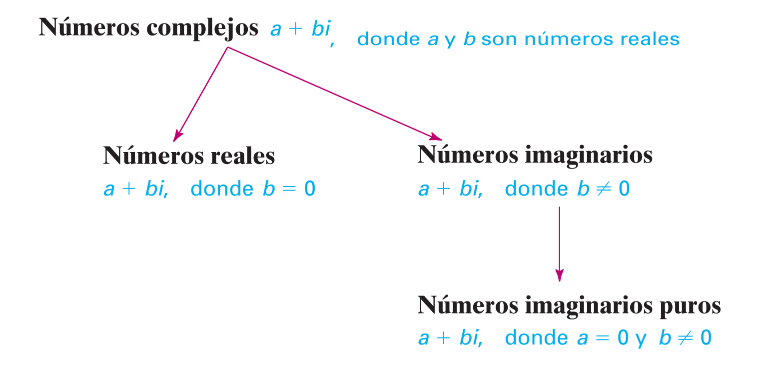
2. El número $\frac{2}{3} + i\sqrt{2}$ es un número complejo que tiene una parte real de $\frac{2}{3}$ y una parte imaginaria de $\sqrt{2}$. (Es fácil confundir $\sqrt{2i}$ con $\sqrt{2}i$. Por tanto, se escribe $i\sqrt{2}$ en lugar de $\sqrt{2}i$, para evitar cualquier dificultad con el signo radical.)

3. El número $-4 - 3i$ se puede escribir en la forma estándar $-4 + (-3i)$ y por tanto es un número complejo que tiene una parte real de -4 y una parte imaginaria de -3. [Con frecuencia se usa la forma $-4 - 3i$, pero se sabe que significa $-4 + (-3i)$.]

4. El número $-9i$ se puede escribir como $0 + (-9i)$; por ende, es un número complejo que tiene una parte real de 0 y una parte imaginaria de -9. (Los números complejos, como $-9i$, para el cual $a = 0$ y $b \neq 0$ se llaman **números imaginarios puros**.)

5. El número real 4 se puede escribir como $4 + 0i$ y por ende es un número complejo que tiene una parte real de 4 y una parte imaginaria de 0.

Observe el punto 5 de la lista. Se ve que el conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos. El siguiente diagrama indica el formato organizativo de los números complejos.



Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Suma y resta de números complejos

Sumar números complejos es simple; se suman sus partes reales y se suman sus partes imaginarias. Por tanto

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Los siguientes ejemplos muestran la suma de dos números complejos.

1. $(4 + 3i) + (5 + 9i) = (4 + 5) + (3 + 9)i = 9 + 12i$

2. $(-6 + 4i) + (8 - 7i) = (-6 + 8) + (4 - 7)i$

$$= 2 - 3i$$

3. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right)i$

$$= \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right)i$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{19}{20}i$$

El conjunto de los números complejos es cerrado con respecto a la suma; esto es, la suma de dos números complejos es un número complejo. Más aún, las propiedades conmutativa y asociativa de la suma son válidas para todos los números complejos. El elemento identidad de la suma es $0 + 0i$ (o simplemente el número real 0). El inverso aditivo de $a + bi$ es $-a - bi$, porque

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0$$

Para **restar números complejos**, $c + di$ de $a + bi$, sume el inverso aditivo de $c + di$. Por tanto.

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

En otras palabras, se restan las partes reales y también las partes imaginarias, como en los siguientes ejemplos.

1. $(9 + 8i) - (5 + 3i) = (9 - 5) + (8 - 3)i$

$$= 4 + 5i$$

2. $(3 - 2i) - (4 - 10i) = (3 - 4) + (-2 - (-10))i$

$$= -1 + 8i$$

Productos y cocientes de números complejos

Puesto que $i^2 = -1$, i es una raíz cuadrada de -1, así que se hace $i = \sqrt{-1}$. También debe ser evidente que $-i$ es una raíz cuadrada de -1, porque

$$(-i)^2 = (-i)(-i) = i^2 = -1$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos, -1 tiene dos raíces cuadradas, i y $-i$. Esto se expresa simbólicamente como

$$\sqrt{-1} = i \quad \text{y} \quad -\sqrt{-1} = -i$$

La definición se extiende de modo que, en el conjunto de los números complejos, todo número real negativo tiene dos raíces cuadradas. Simplemente se define $\sqrt{-b}$, donde b es un número real positivo, como el número cuyo cuadrado es $-b$. Por tanto,

$$(\sqrt{-b})^2 = -b, \text{ para } b > 0$$

Más aún, puesto que $(i\sqrt{b})(i\sqrt{b}) = i^2(b) = -1(b) = -b$, se ve que

$$\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$$

En otras palabras, una raíz cuadrada de cualquier número real negativo se puede representar como el producto de un número real y la unidad imaginaria i. Considere los siguientes ejemplos.

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$$

$$\sqrt{-17} = i\sqrt{17}$$

$$\sqrt{-24} = i\sqrt{24} = i\sqrt{4}\sqrt{6} = 2i\sqrt{6}$$

Note que se simplificó el radical $\sqrt{24}$ a $2\sqrt{6}$.

También debe observar que $-\sqrt{-b}$, donde $b > 0$ es una raíz cuadrada de $-b$ porque

$$(-\sqrt{-b})^2 = (-i\sqrt{b})^2 = i^2(b) = -1(b) = -b$$

Por tanto, en el conjunto de los números complejos, $-b$ (donde $b > 0$) tiene dos raíces cuadradas, $i\sqrt{b}$ y $-i\sqrt{b}$. Esto se expresa simbólicamente como

$$\sqrt{-b} = i\sqrt{b} \quad \text{y} \quad -\sqrt{-b} = -i\sqrt{b}$$

Debe tener mucho cuidado con el uso del símbolo $\sqrt{-b}$, donde $b > 0$. Algunas propiedades de los números reales que implican el símbolo de raíz cuadrada no son válidas si el símbolo de raíz cuadrada no representa un número real. Por ejemplo, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ no aplica si a y b son números negativos.

Correcto $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = (2i)(3i) = 6i^2 = 6(-1) = -6$

Incorrecto $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6$

Para evitar lo complicado de esta idea reescriba todas las expresiones de la forma $\sqrt{-b}$, donde $b > 0$, en la forma $i\sqrt{b}$ antes de realizar cualquier cálculo. Los siguientes ejemplos demuestran aún más este punto.

1. $\sqrt{-5}\sqrt{-7} = (i\sqrt{5})(i\sqrt{7}) = i^2\sqrt{35} = (-1)\sqrt{35} = -\sqrt{35}$

2. $\sqrt{-2}\sqrt{-8} = (i\sqrt{2})(i\sqrt{8}) = i^2\sqrt{16} = (-1)(4) = -4$

3. $\sqrt{-6}\sqrt{-8} = (i\sqrt{6})(i\sqrt{8}) = i^2\sqrt{48} = (-1)\sqrt{16}\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

4. $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{i\sqrt{75}}{i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

5. $\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{12}} = \dfrac{i\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = i\sqrt{\dfrac{48}{12}} = i\sqrt{4} = 2i$

Los números complejos tienen una forma binomial, así que el producto de dos números complejos se obtiene en la misma forma en que se encuentra el producto de dos binomios. Entonces, al sustituir i^2 con -1 es posible simplificar y expresar el resultado final en forma estándar. Considere los siguientes ejemplos.

6. $(2 + 3i)(4 + 5i) = 2(4 + 5i) + 3i(4 + 5i)$
$$= 8 + 10i + 12i + 15i^2$$
$$= 8 + 22i + 15i^2$$
$$= 8 + 22i + 15(-1) = -7 + 22i$$

7. $(-3 + 6i)(2 - 4i) = -3(2 - 4i) + 6i(2 - 4i)$
$$= -6 + 12i + 12i - 24i^2$$
$$= -6 + 24i - 24(-1)$$
$$= -6 + 24i + 24 = 18 + 24i$$

8. $(1 - 7i)^2 = (1 - 7i)(1 - 7i)$
$$= 1(1 - 7i) - 7i(1 - 7i)$$
$$= 1 - 7i - 7i + 49i^2$$
$$= 1 - 14i + 49(-1)$$
$$= 1 - 14i - 49$$
$$= -48 - 14i$$

9. $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2(2 - 3i) + 3i(2 - 3i)$
$$= 4 - 6i + 6i - 9i^2$$
$$= 4 - 9(-1)$$
$$= 4 + 9$$
$$= 13$$

El ejemplo 9 ilustra una situación importante: los números complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ son conjugados uno del otro. En general, dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ se llaman **conjugados** mutuos. *El producto de un número complejo y su conjugado siempre es un número real*, lo que se puede demostrar del modo siguiente:

$$(a + bi)(a - bi) = a(a - bi) + bi(a - bi)$$
$$= a^2 - abi + abi - b^2i^2$$
$$= a^2 - b^2(-1)$$
$$= a^2 + b^2$$

Los conjugados se usan para simplificar expresiones como $\frac{3i}{5 + 2i}$ que indican el cociente de dos números complejos. Para eliminar i en el denominador y cambiar el cociente indicado a la forma estándar de un número complejo, puede

multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{3i}{5+2i} &= \frac{3i(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}\\ &= \frac{15i-6i^2}{25-4i^2}\\ &= \frac{15i-6(-1)}{25-4(-1)}\\ &= \frac{15i+6}{29}\\ &= \frac{6}{29}+\frac{15}{29}i\end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos clarifican más el proceso de dividir números complejos.

10. $\frac{2-3i}{4-7i} = \frac{(2-3i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}$ $\quad$ $4+7i$ es el conjugado de $4-7i$.

$$\begin{aligned} &= \frac{8+14i-12i-21i^2}{16-49i^2}\\ &= \frac{8+2i-21(-1)}{16-49(-1)}\\ &= \frac{8+2i+21}{16+49}\\ &= \frac{29+2i}{65}\\ &= \frac{29}{65}+\frac{2}{65}i\end{aligned}$$

11. $\frac{4-5i}{2i} = \frac{(4-5i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$ $\quad$ $-2i$ es el conjugado de $2i$.

$$\begin{aligned} &= \frac{-8i+10i^2}{-4i^2}\\ &= \frac{-8i+10(-1)}{-4(-1)}\\ &= \frac{-8i-10}{4}\\ &= -\frac{5}{2}-2i\end{aligned}$$

En el ejemplo 11, donde el denominador es un número imaginario puro, puede cambiar a forma estándar al elegir un multiplicador distinto al conjugado. Considere el siguiente abordaje alterno para el ejemplo 11.

$$\begin{aligned}\frac{4-5i}{2i} &= \frac{(4-5i)(i)}{(2i)(i)}\\ &= \frac{4i-5i^2}{2i^2}\\ &= \frac{4i-5(-1)}{2(-1)}\\ &= \frac{4i+5}{-2}\\ &= -\frac{5}{2}-2i\end{aligned}$$

Conjunto de problemas 6.1

Para los problemas 1-8 marque cada enunciado como verdadero o falso.

1. Todo número complejo es un número real.
2. Todo número real es un número complejo.
3. La parte real del número complejo $6i$ es 0.
4. Todo número complejo es un número imaginario puro.
5. La suma de dos números complejos siempre es un número complejo.
6. La parte imaginaria del número complejo 7 es 0.
7. La suma de dos números complejos en ocasiones es un número real.
8. La suma de dos números imaginarios puros siempre es un número imaginario puro.

Para los problemas 9-26 sume o reste como se indica.

9. $(6+3i)+(4+5i)$
10. $(5+2i)+(7+10i)$
11. $(-8+4i)+(2+6i)$
12. $(5-8i)+(-7+2i)$
13. $(3+2i)-(5+7i)$
14. $(1+3i)-(4+9i)$
15. $(-7+3i)-(5-2i)$
16. $(-8+4i)-(9-4i)$
17. $(-3-10i)+(2-13i)$
18. $(-4-12i)+(-3+16i)$
19. $(4-8i)-(8-3i)$
20. $(12-9i)-(14-6i)$
21. $(-1-i)-(-2-4i)$
22. $(-2-3i)-(-4-14i)$
23. $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}i\right)$
24. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}i\right)$
25. $\left(-\frac{5}{9}+\frac{3}{5}i\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}i\right)$
26. $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{2}i\right)-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{7}i\right)$

Para los problemas 27-42 escriba cada una de las siguientes en términos de i y simplifique. Por ejemplo,

$$\sqrt{-20}=i\sqrt{20}=i\sqrt{4}\sqrt{5}=2i\sqrt{5}$$

27. $\sqrt{-81}$
28. $\sqrt{-49}$
29. $\sqrt{-14}$
30. $\sqrt{-33}$
31. $\sqrt{-\frac{16}{25}}$
32. $\sqrt{-\frac{64}{36}}$
33. $\sqrt{-18}$
34. $\sqrt{-84}$
35. $\sqrt{-75}$
36. $\sqrt{-63}$
37. $3\sqrt{-28}$
38. $5\sqrt{-72}$
39. $-2\sqrt{-80}$
40. $-6\sqrt{-27}$
41. $12\sqrt{-90}$
42. $9\sqrt{-40}$

Para los problemas 43-60 escriba cada una de las siguientes en términos de i, realice las operaciones indicadas y simplifique. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\sqrt{-3}\sqrt{-8} &= (i\sqrt{3})(i\sqrt{8}) \\ &= i^2\sqrt{24} \\ &= (-1)\sqrt{4}\sqrt{6} \\ &= -2\sqrt{6}\end{aligned}$$

43. $\sqrt{-4}\sqrt{-16}$

44. $\sqrt{-81}\sqrt{-25}$

45. $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$

46. $\sqrt{-7}\sqrt{-10}$

47. $\sqrt{-9}\sqrt{-6}$

48. $\sqrt{-8}\sqrt{-16}$

49. $\sqrt{-15}\sqrt{-5}$

50. $\sqrt{-2}\sqrt{-20}$

51. $\sqrt{-2}\sqrt{-27}$

52. $\sqrt{-3}\sqrt{-15}$

53. $\sqrt{6}\sqrt{-8}$

54. $\sqrt{-75}\sqrt{3}$

55. $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$

56. $\dfrac{\sqrt{-81}}{\sqrt{-9}}$

57. $\dfrac{\sqrt{-56}}{\sqrt{-7}}$

58. $\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-6}}$

59. $\dfrac{\sqrt{-24}}{\sqrt{6}}$

60. $\dfrac{\sqrt{-96}}{\sqrt{2}}$

Para los problemas 61-84 encuentre cada uno de los productos y exprese las respuestas en la forma estándar de un número complejo.

61. $(5i)(4i)$

62. $(-6i)(9i)$

63. $(7i)(-6i)$

64. $(-5i)(-12i)$

65. $(3i)(2 - 5i)$

66. $(7i)(-9 + 3i)$

67. $(-6i)(-2 - 7i)$

68. $(-9i)(-4 - 5i)$

69. $(3 + 2i)(5 + 4i)$

70. $(4 + 3i)(6 + i)$

71. $(6 - 2i)(7 - i)$

72. $(8 - 4i)(7 - 2i)$

73. $(-3 - 2i)(5 + 6i)$

74. $(-5 - 3i)(2 - 4i)$

75. $(9 + 6i)(-1 - i)$

76. $(10 + 2i)(-2 - i)$

77. $(4 + 5i)^2$

78. $(5 - 3i)^2$

79. $(-2 - 4i)^2$

80. $(-3 - 6i)^2$

81. $(6 + 7i)(6 - 7i)$

82. $(5 - 7i)(5 + 7i)$

83. $(-1 + 2i)(-1 - 2i)$

84. $(-2 - 4i)(-2 + 4i)$

Para los problemas 85-100 encuentre cada uno de los siguientes cocientes y exprese las respuestas en la forma estándar de un número complejo.

85. $\dfrac{3i}{2 + 4i}$

86. $\dfrac{4i}{5 + 2i}$

87. $\dfrac{-2i}{3 - 5i}$

88. $\dfrac{-5i}{2 - 4i}$

89. $\dfrac{-2 + 6i}{3i}$

90. $\dfrac{-4 - 7i}{6i}$

91. $\dfrac{2}{7i}$

92. $\dfrac{3}{10i}$

93. $\dfrac{2 + 6i}{1 + 7i}$

94. $\dfrac{5 + i}{2 + 9i}$

95. $\dfrac{3 + 6i}{4 - 5i}$

96. $\dfrac{7 - 3i}{4 - 3i}$

97. $\dfrac{-2 + 7i}{-1 + i}$

98. $\dfrac{-3 + 8i}{-2 + i}$

99. $\dfrac{-1 - 3i}{-2 - 10i}$

100. $\dfrac{-3 - 4i}{-4 - 11i}$

101. Algunos de los conjuntos solución para las ecuaciones cuadráticas en las siguientes secciones contendrán números complejos como $(-4 + \sqrt{-12})/2$ y $(-4 - \sqrt{-12})/2$. El primer número se puede simplificar del modo siguiente.

$$\frac{-4 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{-4 + i\sqrt{12}}{2} =$$

$$\frac{-4 + 2i\sqrt{3}}{2} = \frac{\not{2}(-2 + i\sqrt{3})}{\not{2}} = -2 + i\sqrt{3}$$

Simplifique cada uno de los siguientes números complejos.

(a) $\dfrac{-4 - \sqrt{-12}}{2}$

(b) $\dfrac{6 + \sqrt{-24}}{4}$

(c) $\dfrac{-1 - \sqrt{-18}}{2}$

(d) $\dfrac{-6 + \sqrt{-27}}{3}$

(e) $\dfrac{10 + \sqrt{-45}}{4}$

(f) $\dfrac{4 - \sqrt{-48}}{2}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

102. ¿Por qué el conjunto de los números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos?

103. ¿La suma de dos números complejos no reales puede ser un número real? Defienda su respuesta.

104. ¿El producto de dos números complejos no reales puede ser un número real? Defienda su respuesta.

6.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado con una variable contiene la variable con un exponente de 2, mas no potencias superiores. Tales ecuaciones también se llaman **ecuaciones cuadráticas**. Las siguientes son ejemplos de ecuaciones cuadráticas.

$$x^2 = 36 \qquad y^2 + 4y = 0 \qquad x^2 + 5x - 2 = 0$$
$$3n^2 + 2n - 1 = 0 \qquad 5x^2 + x + 2 = 3x^2 - 2x - 1$$

Una ecuación cuadrática en la variable x también se define como cualquier ecuación que se escriba en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. La forma $ax^2 + bx + c = 0$ se llama **forma estándar** de una ecuación cuadrática.

En capítulos anteriores se resolvieron ecuaciones cuadráticas (en esa ocasión no se utilizó el término *cuadrático*) al factorizar y aplicar la propiedad, $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Revise algunos de tales ejemplos.

EJEMPLO 1 Resuelva $3n^2 + 14n - 5 = 0$

Solución

$$3n^2 + 14n - 5 = 0$$
$$(3n - 1)(n + 5) = 0 \qquad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$
$$3n - 1 = 0 \quad \text{o} \quad n + 5 = 0 \qquad \text{Aplique: } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$
$$3n = 1 \quad \text{o} \quad n = -5$$
$$n = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad n = -5$$

El conjunto solución es $\left\{-5, \frac{1}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $x^2 + 3kx - 10k^2 = 0$ para x

Solución

$$x^2 + 3kx - 10k^2 = 0$$

$$(x + 5k)(x - 2k) = 0 \qquad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$

$$x + 5k = 0 \quad \text{o} \quad x - 2k = 0 \qquad \text{Aplique: } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

$$x = -5k \quad \text{o} \quad x = 2k$$

El conjunto solución es $\{-5k, 2k\}$.

EJEMPLO 3

Resuelva $2\sqrt{x} = x - 8$

Solución

$$2\sqrt{x} = x - 8$$

$$(2\sqrt{x})^2 = (x - 8)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$4x = x^2 - 16x + 64$$

$$0 = x^2 - 20x + 64$$

$$0 = (x - 16)(x - 4) \qquad \text{Factorice el lado derecho.}$$

$$x - 16 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \qquad \text{Aplique: } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

$$x = 16 \quad \text{o} \quad x = 4$$

✔ **Comprobación**

$$2\sqrt{x} = x - 8 \qquad\qquad 2\sqrt{x} = x - 8$$

$$2\sqrt{16} \stackrel{?}{=} 16 - 8 \quad \text{o} \quad 2\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 4 - 8$$

$$2(4) \stackrel{?}{=} 8 \qquad\qquad 2(2) \stackrel{?}{=} -4$$

$$8 = 8 \qquad\qquad 4 \neq -4$$

El conjunto solución es $\{16\}$. ■

Es necesario realizar dos comentarios acerca del ejemplo 3. Primero, recuerde que al aplicar la propiedad si $a = b$, entonces $a^n = b^n$, puede producir soluciones extrañas. Por tanto, *debe* comprobar todas las potenciales soluciones. Segundo, se dice que la ecuación $2\sqrt{x} = x - 8$ es de **forma cuadrática** porque se puede escribir como $2x^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 8$. Más tarde se abundará acerca de la frase *forma cuadrática*.

Considere ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = a$, donde x es la variable y a es cualquier número real. Puede resolver $x^2 = a$ del modo siguiente:

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \qquad a = (\sqrt{a})^2$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \qquad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{o} \quad x + \sqrt{a} = 0 \qquad \text{Aplique: } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

$$x = \sqrt{a} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Las soluciones son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. Este resultado se puede enunciar como una propiedad general y usarla para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.

Propiedad 6.1

Para cualquier número real a,

$$x^2 = a \text{ si y sólo si } x = \sqrt{a} \text{ o } x = -\sqrt{a}$$

(El enunciado $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$ se pueden escribir como $x = \pm\sqrt{a}$.)

La propiedad 6.1, junto con el conocimiento de las raíces cuadradas, facilita mucho la resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = a$.

EJEMPLO 4 Resuelva $x^2 = 45$

Solución

$$x^2 = 45$$

$$x = \pm\sqrt{45}$$

$$x = \pm 3\sqrt{5} \qquad \sqrt{45} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

El conjunto solución es $\{\pm 3\sqrt{5}\}$. ■

EJEMPLO 5 Resuelva $x^2 = -9$

Solución

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

$$x = \pm 3i$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{\pm 3i\}$. ■

EJEMPLO 6

Resuelva $7n^2 = 12$

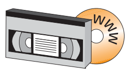
Solución

$$7n^2 = 12$$
$$n^2 = \frac{12}{7}$$
$$n = \pm\sqrt{\frac{12}{7}}$$
$$n = \pm\frac{2\sqrt{21}}{7} \qquad \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{84}}{7} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{21}}{7} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

El conjunto solución es $\left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{7}\right\}$. ■

EJEMPLO 7

Resuelva $(3n + 1)^2 = 25$



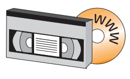
Solución

$$(3n + 1)^2 = 25$$
$$(3n + 1) = \pm\sqrt{25}$$
$$3n + 1 = \pm 5$$
$$3n + 1 = 5 \quad \text{o} \quad 3n + 1 = -5$$
$$3n = 4 \quad \text{o} \quad 3n = -6$$
$$n = \frac{4}{3} \quad \text{o} \quad n = -2$$

El conjunto solución es $\left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$.

EJEMPLO 8

Resuelva $(x - 3)^2 = -10$



Solución

$$(x - 3)^2 = -10$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{-10}$$
$$x - 3 = \pm i\sqrt{10}$$
$$x = 3 \pm i\sqrt{10}$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{3 \pm i\sqrt{10}\}$. ■

Observaciones: Revise una vez más las ecuaciones de los ejemplos 5 y 8. De inmediato debe darse cuenta que los conjuntos solución sólo consistirán de números complejos no reales, porque cualquier número real distinto de cero elevado al cuadrado es positivo.

En ocasiones puede ser necesario cambiar la forma antes de poder aplicar la propiedad 6.1. Considere un ejemplo para ilustrar esta idea.

EJEMPLO 9

Resuelva $3(2x - 3)^2 + 8 = 44$

Solución

$$3(2x - 3)^2 + 8 = 44$$
$$3(2x - 3)^2 = 36$$
$$(2x - 3)^2 = 12$$
$$2x - 3 = \pm\sqrt{12}$$
$$2x - 3 = \pm 2\sqrt{3}$$
$$2x = 3 \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2}\right\}$. ■

■ Regreso al teorema de Pitágoras

El trabajo con radicales, la propiedad 6.1 y el teorema de Pitágoras forman una base para resolver varios tipos de problemas que pertenecen a triángulos rectángulos.

EJEMPLO 10

Una soga de 50 pies cuelga desde la parte superior de un asta. Cuando se tensa a toda su longitud, la soga llega a un punto en el suelo a 18 pies de la base del asta. Encuentre la altura del asta a la décima más cercana de un pie.

50 pies
p
18 pies
p representa la altura del asta

Figura 6.1

Solución

Elabore un bosquejo (figura 6.1) y registre la información dada.

Use el teorema de Pitágoras para resolver p del modo siguiente:

$$p^2 + 18^2 = 50^2$$
$$p^2 + 324 = 2500$$
$$p^2 = 2176$$
$$p = \sqrt{2176} = 46.6, \quad \text{a la décima más cercana}$$

La altura del asta es aproximadamente 46.6 pies. ■

Hay dos tipos especiales de triángulos rectángulos de amplio uso en cursos de matemáticas superiores. El primero es el **triángulo rectángulos isósceles**, que es un triángulo rectángulo que tiene dos catetos de la misma longitud. Considere un problema que implica un triángulo rectángulo isósceles.

EJEMPLO 11

Encuentre la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles que tiene una hipotenusa de 5 metros de longitud.

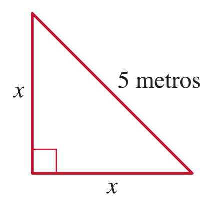


Figura 6.2

Solución

Bosqueje un triángulo rectángulo isósceles y sea x la longitud de cada cateto (figura 6.2). Entonces se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + x^2 = 5^2$$
$$2x^2 = 25$$
$$x^2 = \frac{25}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Cada cateto tiene $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ metros de longitud. ■

Observaciones: En el ejemplo 10 no se intentó expresar $\sqrt{2176}$ en forma radical más simple porque la respuesta debía darse como una aproximación racional a la décima más cercana. Sin embargo, en el ejemplo 11 la respuesta final se dejó en forma radical y por tanto se expresó en forma radical más simple.

El segundo tipo especial de triángulo rectángulo que se usa con frecuencia es aquel que contiene ángulos agudos de 30 y 60º. En tal triángulo rectángulo, que se conoce como **triángulo rectángulo 30º-60º**, el lado opuesto al ángulo de 30º es igual en longitud a la mitad de la longitud de la hipotenusa. Esta relación, junto con el teorema de Pitágoras, proporciona otra técnica para resolver problemas.

EJEMPLO 12

Suponga que una escalera de 20 pies se recarga contra un edificio y forma un ángulo de 60º con el suelo. ¿Qué tan alto sobre el edificio llega la parte superior de la escalera? Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

Figura 6.3

Solución

La figura 6.3 muestra esta situación. El lado opuesto al ángulo de 30º es igual a la mitad de la hipotenusa, de modo que su longitud es $\frac{1}{2}(20) = 10$ pies. Ahora puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$h^2 + 10^2 = 20^2$$
$$h^2 + 100 = 400$$
$$h^2 = 300$$
$$h = \sqrt{300} = 17.3, \quad \text{a la décima más cercana}$$

La parte superior de la escalera toca el edificio en un punto aproximadamente a 17.3 pies del suelo. ■

Conjunto de problemas 6.2

Para los problemas 1-20 resuelva cada una de las ecuaciones cuadráticas al factorizar y aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Si es necesario regrese al capítulo 3 y revise las técnicas de factorización que ahí se presentan.

1. $x^2 - 9x = 0$
2. $x^2 + 5x = 0$
3. $x^2 = -3x$
4. $x^2 = 15x$
5. $3y^2 + 12y = 0$
6. $6y^2 - 24y = 0$
7. $5n^2 - 9n = 0$
8. $4n^2 + 13n = 0$
9. $x^2 + x - 30 = 0$
10. $x^2 - 8x - 48 = 0$
11. $x^2 - 19x + 84 = 0$
12. $x^2 - 21x + 104 = 0$
13. $2x^2 + 19x + 24 = 0$
14. $4x^2 + 29x + 30 = 0$
15. $15x^2 + 29x - 14 = 0$
16. $24x^2 + x - 10 = 0$
17. $25x^2 - 30x + 9 = 0$
18. $16x^2 - 8x + 1 = 0$
19. $6x^2 - 5x - 21 = 0$
20. $12x^2 - 4x - 5 = 0$

Para los problemas 21-26 resuelva cada ecuación radical. No olvide que *debe* comprobar las soluciones potenciales.

21. $3\sqrt{x} = x + 2$
22. $3\sqrt{2x} = x + 4$
23. $\sqrt{2x} = x - 4$
24. $\sqrt{x} = x - 2$
25. $\sqrt{3x} + 6 = x$
26. $\sqrt{5x} + 10 = x$

Para los problemas 27-34 resuelva cada ecuación para x al factorizar y aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

27. $x^2 - 5kx = 0$
28. $x^2 + 7kx = 0$
29. $x^2 = 16k^2x$
30. $x^2 = 25k^2x$
31. $x^2 - 12kx + 35k^2 = 0$
32. $x^2 - 3kx - 18k^2 = 0$
33. $2x^2 + 5kx - 3k^2 = 0$
34. $3x^2 - 20kx - 7k^2 = 0$

Para los problemas 35-70 use la propiedad 6.1 para auxiliarse a resolver cada ecuación cuadrática.

35. $x^2 = 1$
36. $x^2 = 81$
37. $x^2 = -36$
38. $x^2 = -49$
39. $x^2 = 14$
40. $x^2 = 22$
41. $n^2 - 28 = 0$
42. $n^2 - 54 = 0$
43. $3t^2 = 54$
44. $4t^2 = 108$
45. $2t^2 = 7$
46. $3t^2 = 8$
47. $15y^2 = 20$
48. $14y^2 = 80$
49. $10x^2 + 48 = 0$
50. $12x^2 + 50 = 0$
51. $24x^2 = 36$
52. $12x^2 = 49$
53. $(x - 2)^2 = 9$
54. $(x + 1)^2 = 16$
55. $(x + 3)^2 = 25$
56. $(x - 2)^2 = 49$
57. $(x + 6)^2 = -4$
58. $(3x + 1)^2 = 9$
59. $(2x - 3)^2 = 1$
60. $(2x + 5)^2 = -4$
61. $(n - 4)^2 = 5$
62. $(n - 7)^2 = 6$
63. $(t + 5)^2 = 12$
64. $(t - 1)^2 = 18$
65. $(3y - 2)^2 = -27$
66. $(4y + 5)^2 = 80$
67. $3(x + 7)^2 + 4 = 79$
68. $2(x + 6)^2 - 9 = 63$
69. $2(5x - 2)^2 + 5 = 25$
70. $3(4x - 1)^2 + 1 = -17$

Para los problemas 71-76 a y b representan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c representa la longitud de la hipotenusa. Exprese las respuestas en la forma radical más simple.

71. Encuentre c si $a = 4$ centímetros y $b = 6$ centímetros.
72. Encuentre c si $a = 3$ metros y $b = 7$ metros.
73. Encuentre a si $c = 12$ pulgadas y $b = 8$ pulgadas.
74. Encuentre a si $c = 8$ pies y $b = 6$ pies.
75. Encuentre b si $c = 17$ yardas y $a = 15$ yardas.
76. Encuentre b si $c = 14$ metros y $a = 12$ metros.

Para los problemas 77-80 use el triángulo rectángulo isósceles en la figura 6.4. Exprese sus respuestas en la forma radical más simple.

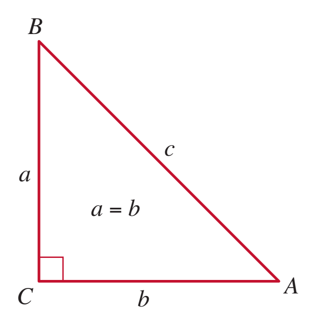


Figura 6.4

77. Si $b = 6$ pulgadas, encuentre c.

78. Si $a = 7$ centímetros, encuentre c.

79. Si $c = 8$ metros, encuentre a y b.

80. Si $c = 9$ pies, encuentre a y b.

Para los problemas 81-86 use el triángulo en la figura 6.5. Exprese sus respuestas en la forma radical más simple.

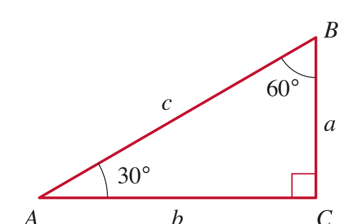


Figura 6.5

81. Si $a = 3$ pulgadas, encuentre b y c.

82. Si $a = 6$ pies, encuentre b y c.

83. Si $c = 14$ centímetros, encuentre a y b.

84. Si $c = 9$ centímetros, encuentre a y b.

85. Si $b = 10$ pies, encuentre a y c.

86. Si $b = 8$ metros, encuentre a y c.

87. Una escalera de 24 pies, que descansa contra una casa, alcanza el alféizar de una ventana a 16 pies sobre el suelo. ¿Cuán lejos de los cimientos de la casa se encuentra el pie de la escalera? Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

88. Un cable de sujeción de 62 pies forma un ángulo de 60º con el suelo y se une a un poste telefónico (vea la figura 6.6). Encuentre la distancia desde la base del poste hasta el punto en el poste donde se une el alambre. Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

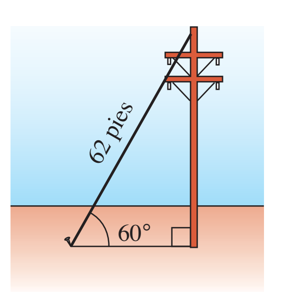


Figura 6.6

89. Un lote rectangular mide 16 por 34 metros. Encuentre, al metro más cercano, la distancia de una esquina del lote a la esquina diagonalmente opuesta.

90. Las bases consecutivas de un diamante de béisbol con forma cuadrada están separadas 90 pies (vea la figura 6.7). Encuentre, a la décima de pie más cercana, la distancia desde la primera base, diagonalmente a través del diamante, hasta la tercera base.

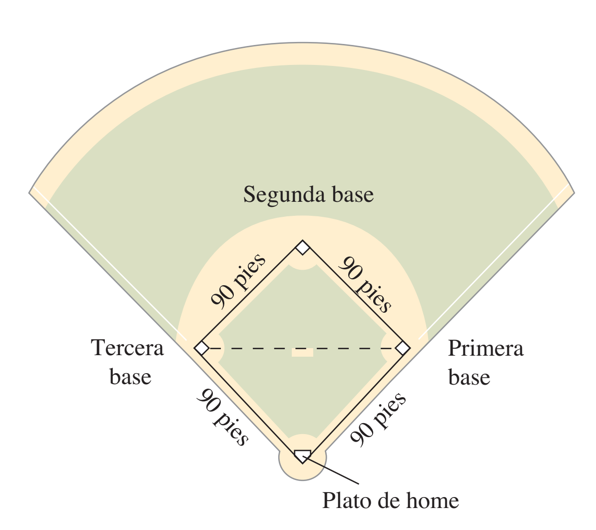


Figura 6.7

91. La diagonal de un lote de estacionamiento cuadrado mide 75 metros. Encuentre, al metro más cercano, la longitud de un lado del lote.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

92. Explique por qué la ecuación $(x + 2)^2 + 5 = 1$ no tiene soluciones en números reales.

93. Suponga que su amigo resolvió la ecuación $(x + 3)^2 = 25$ del modo siguiente:

$$(x + 3)^2 = 25$$
$$x^2 + 6x + 9 = 25$$
$$x^2 + 6x - 16 = 0$$
$$(x + 8)(x - 2) = 0$$
$$x + 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -8 \quad \text{o} \quad x = 2$$

¿Este método es correcto para el problema? ¿Ofrecería usted alguna sugerencia acerca de un método más sencillo al problema?

MÁS INVESTIGACIÓN

94. Suponga que le entregan un cubo con bordes de 12 centímetros de longitud. Encuentre la longitud de una diagonal desde una esquina inferior a la esquina superior diagonalmente opuesta. Exprese su respuesta a la décima de centímetro más cercana.

95. Suponga que le entregan una caja rectangular con una longitud de 8 centímetros, un ancho de 6 centímetros y una altura de 4 centímetros. Encuentre la longitud de una diagonal desde una esquina inferior hasta la esquina superior diagonalmente opuesta. Exprese su respuesta a la décima de centímetro más cercana.

96. El inverso del teorema de Pitágoras también es verdadero: "si las medidas a, b y c de los lados de un triángulo son tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con a y b como medidas de los catetos y c como medida de la hipotenusa". Utilice el inverso del teorema de Pitágoras para determinar cuál de los triángulos con lados de las siguientes medidas son triángulos rectángulos.

(a) 9, 40, 41 **(b)** 20, 48, 52

(c) 19, 21, 26 **(d)** 32, 37, 49

(e) 65, 156, 169 **(f)** 21, 72, 75

97. Encuentre la longitud de la hipotenusa (h) de un triángulo rectángulo isósceles si cada cateto tiene s unidades de largo. Luego use esta relación para volver a resolver los problemas 77-80.

98. Suponga que el lado opuesto al ángulo de 30º en un triángulo rectángulo 30º-60º tiene s unidades de largo. Exprese la longitud de la hipotenusa y la longitud del otro cateto en términos de s. Luego use la relación y vuelva a resolver los problemas 81-86.

6.3 Completar el cuadrado

Hasta el momento las ecuaciones cuadráticas se resolvieron mediante factorización y la aplicación de la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, o mediante la aplicación de la propiedad $x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{a}$. En esta sección se examina otro método llamado **completar el cuadrado**, que le dará el poder para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Una técnica de factorización que se estudió en el capítulo 3 se sustentó en el reconocimiento de **trinomios cuadrados perfectos**. En cada una de las siguientes, el trinomio cuadrado perfecto en el lado derecho es resultado de elevar al cuadrado el binomio en el lado izquierdo.

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16 \qquad (x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$$
$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49 \qquad (x - 9)^2 = x^2 - 18x + 81$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Observe que, en cada uno de los trinomios cuadrados, el término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término x. Esta relación le permite formar un trinomio cuadrado perfecto al sumar un término constante adecuado. Para encontrar el término constante, tome la mitad del coeficiente del término x y luego eleve al cuadrado el resultado. Por ejemplo, suponga que se quiere formar un trinomio cuadrado perfecto a partir de $x^2 + 10x$. El coeficiente del término x es 10. Dado que $\frac{1}{2}(10) = 5$, y $5^2 = 25$, el término constante debe ser 25. El trinomio cuadrado perfecto que se puede formar es $x^2 + 10x + 25$. Este trinomio cuadrado perfecto se puede factorizar y expresar como $(x + 5)^2$. Use las ideas anteriores para ayudarse a resolver algunas ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 1

Resuelva $x^2 + 10x - 2 = 0$

Solución

$x^2 + 10x - 2 = 0$

$x^2 + 10x = 2$ Aísle los términos x^2 y x.

$\frac{1}{2}(10) = 5$ y $5^2 = 25$ Tome $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y luego eleve al cuadrado el resultado.

$x^2 + 10x + 25 = 2 + 25$ Sume 25 a *ambos* lados de la ecuación.

$(x + 5)^2 = 27$ Factorice el trinomio cuadrado perfecto.

$x + 5 = \pm\sqrt{27}$ Ahora resuelva al aplicar la propiedad 6.1.

$x + 5 = \pm 3\sqrt{3}$

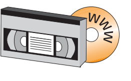
$x = -5 \pm 3\sqrt{3}$

El conjunto solución es $\{-5 \pm 3\sqrt{3}\}$. ■

Note del ejemplo 1 que el método de completar el cuadrado para resolver una ecuación cuadrática simplemente es lo que implica el nombre. Se forma un trinomio cuadrado perfecto, entonces la ecuación se cambia a la forma necesaria para aplicar la propiedad "$x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{a}$". Considere otro ejemplo.

EJEMPLO 2

Resuelva $x(x + 8) = -23$



Solución

$x(x + 8) = -23$

$x^2 + 8x = -23$ Aplique la propiedad distributiva.

$\frac{1}{2}(8) = 4$ y $4^2 = 16$ Tome $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y luego eleve al cuadrado el resultado.

$$x^2 + 8x + 16 = -23 + 16 \quad \text{Sume 16 a } \textit{ambos} \text{ lados de la ecuación.}$$

$$(x + 4)^2 = -7 \quad \text{Factorice el trinomio cuadrado perfecto.}$$

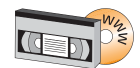
$$x + 4 = \pm\sqrt{-7} \quad \text{Ahora resuelva al aplicar la propiedad 6.1.}$$

$$x + 4 = \pm i\sqrt{7}$$

$$x = -4 \pm i\sqrt{7}$$

El conjunto solución es $\{-4 \pm i\sqrt{7}\}$. ■

EJEMPLO 3 Resuelva $x^2 - 3x + 1 = 0$



Solución

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2} \text{ y } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

En el ejemplo 3 preste atención, puesto que el coeficiente del término x es impar, obliga a ingresar al reino de las fracciones. Usar fracciones comunes en lugar de decimales permite la aplicación del trabajo previo con radicales.

La relación para un trinomio cuadrado perfecto que afirma que el término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término x, es válida sólo si el coeficiente de x^2 es 1. Por tanto, se debe hacer un ajuste cuando se resuelvan ecuaciones cuadráticas que tengan un coeficiente de x^2 distintos a 1. Necesitará aplicar la propiedad multiplicativa de la igualdad de modo que el coeficiente del término x^2 se convierta en 1. El siguiente ejemplo muestra cómo hacer este ajuste.

EJEMPLO 4

Resuelva $2x^2 + 12x - 5 = 0$

Solución

$$2x^2 + 12x - 5 = 0$$
$$2x^2 + 12x = 5$$
$$x^2 + 6x = \frac{5}{2} \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{2}.$$
$$x^2 + 6x + 9 = \frac{5}{2} + 9 \qquad \frac{1}{2}(6) = 3 \text{ y } 3^2 = 9$$
$$x^2 + 6x + 9 = \frac{23}{2}$$
$$(x + 3)^2 = \frac{23}{2}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{\frac{23}{2}}$$
$$x + 3 = \pm\frac{\sqrt{46}}{2} \qquad \sqrt{\frac{23}{2}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{46}}{2}$$
$$x = -3 \pm \frac{\sqrt{46}}{2}$$
$$x = \frac{-6}{2} \pm \frac{\sqrt{46}}{2} \qquad \text{Denominador común de 2.}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{46}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{-6 \pm \sqrt{46}}{2}\right\}$. ■

Como se mencionó anteriormente, puede usar el método de completar el cuadrado para resolver *cualquier* ecuación cuadrática. Para ilustrar, úselo para resolver una ecuación que también se pudiera resolver mediante factorización.

EJEMPLO 5

Resuelva $x^2 - 2x - 8 = 0$ para completar el cuadrado.

Solución

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 \qquad \frac{1}{2}(-2) = -1 \text{ y } (-1)^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x - 1 = 3 \quad \text{o} \quad x - 1 = -3$$
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -2$$

El conjunto solución es $\{-2, 4\}$. ■

Resolver la ecuación del ejemplo 5 mediante factorización sería más sencillo que completar el cuadrado. Sin embargo, recuerde que el método de completar el cuadrado funcionará con cualquier ecuación cuadrática.

Conjunto de problemas 6.3

Para los problemas 1-14 resuelva cada ecuación cuadrática con el uso de (a) el método de factorización y (b) el método de completar el cuadrado.

1. $x^2 - 4x - 60 = 0$
2. $x^2 + 6x - 16 = 0$
3. $x^2 - 14x = -40$
4. $x^2 - 18x = -72$
5. $x^2 - 5x - 50 = 0$
6. $x^2 + 3x - 18 = 0$
7. $x(x + 7) = 8$
8. $x(x - 1) = 30$
9. $2n^2 - n - 15 = 0$
10. $3n^2 + n - 14 = 0$
11. $3n^2 + 7n - 6 = 0$
12. $2n^2 + 7n - 4 = 0$
13. $n(n + 6) = 160$
14. $n(n - 6) = 216$

Para los problemas 15-38 use el método de completar el cuadrado para resolver cada ecuación cuadrática.

15. $x^2 + 4x - 2 = 0$
16. $x^2 + 2x - 1 = 0$
17. $x^2 + 6x - 3 = 0$
18. $x^2 + 8x - 4 = 0$
19. $y^2 - 10y = 1$
20. $y^2 - 6y = -10$
21. $n^2 - 8n + 17 = 0$
22. $n^2 - 4n + 2 = 0$
23. $n(n + 12) = -9$
24. $n(n + 14) = -4$
25. $n^2 + 2n + 6 = 0$
26. $n^2 + n - 1 = 0$
27. $x^2 + 3x - 2 = 0$
28. $x^2 + 5x - 3 = 0$
29. $x^2 + 5x + 1 = 0$
30. $x^2 + 7x + 2 = 0$
31. $y^2 - 7y + 3 = 0$
32. $y^2 - 9y + 30 = 0$
33. $2x^2 + 4x - 3 = 0$
34. $2t^2 - 4t + 1 = 0$
35. $3n^2 - 6n + 5 = 0$
36. $3x^2 + 12x - 2 = 0$
37. $3x^2 + 5x - 1 = 0$
38. $2x^2 + 7x - 3 = 0$

Para los problemas 39-60 resuelva cada ecuación cuadrática usando el método que parezca más apropiado.

39. $x^2 + 8x - 48 = 0$
40. $x^2 + 5x - 14 = 0$
41. $2n^2 - 8n = -3$
42. $3x^2 + 6x = 1$
43. $(3x - 1)(2x + 9) = 0$
44. $(5x + 2)(x - 4) = 0$
45. $(x + 2)(x - 7) = 10$
46. $(x - 3)(x + 5) = -7$
47. $(x - 3)^2 = 12$
48. $x^2 = 16x$
49. $3n^2 - 6n + 4 = 0$
50. $2n^2 - 2n - 1 = 0$
51. $n(n + 8) = 240$
52. $t(t - 26) = -160$
53. $3x^2 + 5x = -2$
54. $2x^2 - 7x = -5$
55. $4x^2 - 8x + 3 = 0$
56. $9x^2 + 18x + 5 = 0$
57. $x^2 + 12x = 4$
58. $x^2 + 6x = -11$
59. $4(2x + 1)^2 - 1 = 11$
60. $5(x + 2)^2 + 1 = 16$

61. Use el método de completar el cuadrado para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ para x, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

62. Explique el proceso de completar el cuadrado para resolver una ecuación cuadrática.

63. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolver $3x^2 + 9x - 4 = 0$ usando completar al cuadrado.

MÁS INVESTIGACIÓN

Resuelva los problemas 64-67 para la variable indicada. Suponga que todas las literales representan números positivos.

64. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ para y

65. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ para x

66. $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ para t

67. $A = \pi r^2$ para r

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x.

68. $x^2 + 8ax + 15a^2 = 0$

69. $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$

70. $10x^2 - 31ax - 14a^2 = 0$

71. $6x^2 + ax - 2a^2 = 0$

72. $4x^2 + 4bx + b^2 = 0$

73. $9x^2 - 12bx + 4b^2 = 0$

6.4 Fórmula cuadrática

Como se vio en la última sección, el método de completar el cuadrado se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática. Por tanto, si se aplica el método de completar el cuadrado a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, puede producir una fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas. Esta fórmula sirve para resolver cualquier ecuación cuadrática. Resuelva $ax^2 + bx + c = 0$ usando completar al cuadrado.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$ Aísle los términos x^2 y x.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$ Multiplique ambos lados por $\frac{1}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$ $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{2a}$ y $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Complete el cuadrado al sumar $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos lados

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$ Denominador común de $4a^2$ en el lado derecho

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$ Propiedad conmutativa.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ El lado derecho se combina en una sola fracción.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ $\sqrt{4a^2} = |2a|$ pero se puede usar $2a$ por el uso de $\pm$.

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula cuadrática por lo general se enuncia del modo siguiente:

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad a \neq 0$$

La fórmula cuadrática se usa para resolver *cualquier* ecuación cuadrática al expresar la ecuación en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$ y sustituir los valores para a, b y c en la fórmula. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Resuelva $x^2 + 5x + 2 = 0$

Solución

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

La ecuación dada está en forma estándar con $a = 1$, $b = 5$ y $c = 2$. Sustituya estos valores en la fórmula y simplifique.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $x^2 - 2x - 4 = 0$

Solución

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

Necesita considerar $x^2 - 2x - 4 = 0$ como $x^2 + (-2)x + (-4) = 0$ para determinar los valores $a = 1$, $b = -2$, y $c = -4$. Sustituya estos valores en la fórmula cuadrática y simplifique.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

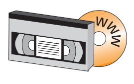
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{5})}{\cancel{2}} = (1 \pm \sqrt{5})$$

El conjunto solución es $\{1 \pm \sqrt{5}\}$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $x^2 - 2x + 19 = 0$



Solución

$$x^2 - 2x + 19 = 0$$

Puede sustituir $a = 1$, $b = -2$ y $c = 19$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(19)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 76}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-72}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 6i\sqrt{2}}{2} \qquad \sqrt{-72} = i\sqrt{72} = i\sqrt{36}\sqrt{2} = 6i\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\not{2}(1 \pm 3i\sqrt{2})}{\not{2}} = 1 \pm 3i\sqrt{2}$$

El conjunto solución es $\{1 \pm 3i\sqrt{2}\}$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $2x^2 + 4x - 3 = 0$

Solución

$$2x^2 + 4x - 3 = 0$$

Aquí, $a = 2$, $b = 4$ y $c = -3$. Resolver con el uso de la fórmula cuadrática es diferente a hacerlo usando completar al cuadrado en cuanto a que no hay necesidad de hacer igual a 1 el coeficiente de x^2.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4}$$

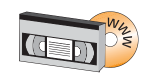
$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{2(-2 \pm \sqrt{10})}{4}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}\right\}$. ■

EJEMPLO 5 Resuelva $n(3n - 10) = 25$



Solución

$$n(3n - 10) = 25$$

Primero necesita cambiar la ecuación a la forma estándar $an^2 + bn + c = 0$.

$$n(3n - 10) = 25$$
$$3n^2 - 10n = 25$$
$$3n^2 - 10n - 25 = 0$$

Ahora puede sustituir $a = 3$, $b = -10$ y $c = -25$ en la fórmula cuadrática.

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(-25)}}{2(3)}$$

$$n = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{2(3)}$$

$$n = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6}$$

$$n = \frac{10 \pm 20}{6}$$

$$n = \frac{10 + 20}{6} \quad \text{o} \quad n = \frac{10 - 20}{6}$$

$$n = 5 \quad \text{o} \quad n = -\frac{5}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{5}{3}, 5\right\}$. ■

En el ejemplo 5 note que se usó la variable n. La fórmula cuadrática por lo general se enuncia en términos de x, pero ciertamente se puede aplicar a ecuaciones cuadráticas con otras variables. Advierta, también en el ejemplo 5, que el polinomio $3n^2 - 10n - 25$ se puede factorizar como $(3n + 5)(n - 5)$. Por tanto, también podría resolver la ecuación $3n^2 - 10n - 25 = 0$ con el uso del enfoque de factorización. La sección 6.5 ofrece una guía para decidir cuál abordaje usar para una ecuación particular.

Naturaleza de las raíces

La fórmula cuadrática facilita la determinación de la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática sin resolver por completo la ecuación. El número

$$b^2 - 4ac$$

que aparece bajo el signo radical en la fórmula cuadrática, se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. El discriminante es el indicador del tipo de raíces que tiene la ecuación. Por ejemplo, suponga que comienza a resolver la ecuación $x^2 - 4x + 7 = 0$ del modo siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

En esta etapa debe poder ver hacia delante y darse cuenta que obtendrá dos soluciones complejas para la ecuación. (Note, por cierto, que dichas soluciones son conjugadas complejas.) En otras palabras, el discriminante -12 indica qué tipo de raíces obtendrá.

Se hacen las siguientes afirmaciones generales en relación con las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones complejas no reales.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una solución real.
3. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales.

Los siguientes ejemplos ilustran cada una de estas situaciones. (Acaso quiera resolver las ecuaciones por completo para verificar las conclusiones.)

Ecuación	Discriminante	Naturaleza de las raíces
$x^2 - 3x + 7 = 0$	$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(7)$ $= 9 - 28$ $= -19$	Dos soluciones complejas no reales
$9x^2 - 12x + 4 = 0$	$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4)$ $= 144 - 144$ $= 0$	Una solución real
$2x^2 + 5x - 3 = 0$	$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-3)$ $= 25 + 24$ $= 49$	Dos soluciones reales

Existe otra relación muy útil que implica las raíces de una ecuación cuadrática y los números a, b y c de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Suponga que x_1 y x_2 son las dos raíces generadas por la fórmula cuadrática. Por ende, se tiene

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observaciones: En este momento es pertinente una aclaración. Anteriormente se hizo la afirmación de que, si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una solución real. Técnicamente, tal ecuación tiene dos soluciones, pero son iguales. Por ejemplo, cada factor de $(x - 2)(x - 2) = 0$ produce una solución, pero ambas soluciones son el número 2. En ocasiones a esto se le refiere como una solución real con una *multiplicidad de dos*. Al usar la idea de la multiplicidad de las raíces se puede decir que toda ecuación cuadrática tiene dos raíces.

Ahora considere la suma y el producto de las dos raíces.

Suma $$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}}$$

Producto $$\begin{aligned}(x_1)(x_2) &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}}\end{aligned}$$

Estas relaciones proporcionan otra forma de comprobar las soluciones potenciales cuando se resuelven ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, en el ejemplo 3 se resolvió la ecuación $x^2 - 2x + 19 = 0$ y se obtuvieron las soluciones de $1 + 3i\sqrt{2}$ y $1 - 3i\sqrt{2}$. Compruebe estas soluciones con el uso de las relaciones de suma y producto.

✔ Comprobación para el ejemplo 3

Suma de raíces $(1 + 3i\sqrt{2}) + (1 - 3i\sqrt{2}) = 2$ y $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

Producto de raíces $(1 + 3i\sqrt{2})(1 - 3i\sqrt{2}) = 1 - 18i^2 = 1 + 18 = 19$ y

$$\frac{c}{a} = \frac{19}{1} = 19$$

Del mismo modo, una comprobación para el ejemplo 4 es la siguiente:

✔ **Comprobación para el ejemplo 4**

Suma de raíces $\left(\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)+\left(\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)=-\dfrac{4}{2}=-2$ y

$$-\frac{b}{a}=-\frac{4}{2}=-2$$

Producto de raíces $\left(\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$ y

$$\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

Note que, para los ejemplos 3 y 4, era mucho más sencillo comprobar usando las relaciones de suma y producto, que la comprobación al sustituir de nuevo en la ecuación original. No olvide que los valores para a, b y c provienen de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En el ejemplo 5, si va a comprobar las soluciones potenciales con el uso de las relaciones de suma y producto, debe estar seguro de no cometer errores cuando cambie la ecuación dada $n(3n - 10) = 25$ a la forma $3n^2 - 10n - 25 = 0$.

Conjunto de problemas 6.4

Para cada ecuación cuadrática en los problemas 1-10 use primero el discriminante para determinar si la ecuación tiene dos soluciones complejas no reales, una solución real con una multiplicidad de dos o dos soluciones reales. Luego resuelva la ecuación.

1. $x^2 + 4x - 21 = 0$

2. $x^2 - 3x - 54 = 0$

3. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

4. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

5. $x^2 - 7x + 13 = 0$

6. $2x^2 - x + 5 = 0$

7. $15x^2 + 17x - 4 = 0$

8. $8x^2 + 18x - 5 = 0$

9. $3x^2 + 4x = 2$

10. $2x^2 - 6x = -1$

Para los problemas 11-50 use la fórmula cuadrática para resolver cada una de las ecuaciones cuadráticas. Compruebe sus soluciones con el uso de las relaciones de suma y producto.

11. $x^2 + 2x - 1 = 0$

12. $x^2 + 4x - 1 = 0$

13. $n^2 + 5n - 3 = 0$

14. $n^2 + 3n - 2 = 0$

15. $a^2 - 8a = 4$

16. $a^2 - 6a = 2$

17. $n^2 + 5n + 8 = 0$

18. $2n^2 - 3n + 5 = 0$

19. $x^2 - 18x + 80 = 0$

20. $x^2 + 19x + 70 = 0$

21. $-y^2 = -9y + 5$

22. $-y^2 + 7y = 4$

23. $2x^2 + x - 4 = 0$

24. $2x^2 + 5x - 2 = 0$

25. $4x^2 + 2x + 1 = 0$

26. $3x^2 - 2x + 5 = 0$

27. $3a^2 - 8a + 2 = 0$

28. $2a^2 - 6a + 1 = 0$

29. $-2n^2 + 3n + 5 = 0$

30. $-3n^2 - 11n + 4 = 0$

31. $3x^2 + 19x + 20 = 0$

32. $2x^2 - 17x + 30 = 0$

33. $36n^2 - 60n + 25 = 0$

34. $9n^2 + 42n + 49 = 0$

35. $4x^2 - 2x = 3$

36. $6x^2 - 4x = 3$

37. $5x^2 - 13x = 0$

38. $7x^2 + 12x = 0$

39. $3x^2 = 5$

40. $4x^2 = 3$

41. $6t^2 + t - 3 = 0$

42. $2t^2 + 6t - 3 = 0$

43. $n^2 + 32n + 252 = 0$

44. $n^2 - 4n - 192 = 0$

45. $12x^2 - 73x + 110 = 0$

46. $6x^2 + 11x - 255 = 0$

47. $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

48. $-2x^2 + 6x - 5 = 0$

49. $-6x^2 + 2x + 1 = 0$

50. $-2x^2 + 4x + 1 = 0$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

51. Su amiga afirma que la ecuación $-2x^2 + 4x - 1 = 0$ debe cambiarse a $2x^2 - 4x + 1 = 0$ (al multiplicar ambos lados por -1) antes de poder aplicar la fórmula cuadrática. ¿Ella tiene razón? Si no, ¿cómo la convencería de que está equivocada?

52. Otro de sus amigos afirma que la fórmula cuadrática se puede usar para resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$. ¿Cómo reaccionaría ante esta afirmación?

53. ¿Por qué debe cambiar la ecuación $3x^2 - 2x = 4$ a $3x^2 - 2x - 4 = 0$ antes de aplicar la fórmula cuadrática?

MÁS INVESTIGACIÓN

El conjunto solución para $x^2 - 4x - 37 = 0$ es $\{2 \pm \sqrt{41}\}$. Con una calculadora se encuentra una aproximación racional, a la milésima más cercana, para cada una de estas soluciones.

$$2 - \sqrt{41} = -4.403 \qquad \text{y} \qquad 2 + \sqrt{41} = 8.403$$

En consecuencia, el conjunto solución es $\{-4.403, 8.403\}$, en el que las respuestas se redondearon a la milésima más cercana.

Resuelva cada una de las ecuaciones en los problemas 54-63 y exprese las soluciones a la milésima más cercana.

54. $x^2 - 6x - 10 = 0$

55. $x^2 - 16x - 24 = 0$

56. $x^2 + 6x - 44 = 0$

57. $x^2 + 10x - 46 = 0$

58. $x^2 + 8x + 2 = 0$

59. $x^2 + 9x + 3 = 0$

60. $4x^2 - 6x + 1 = 0$

61. $5x^2 - 9x + 1 = 0$

62. $2x^2 - 11x - 5 = 0$

63. $3x^2 - 12x - 10 = 0$

Para los problemas 64-66 use el discriminante para auxiliarse a resolver cada problema.

64. Determine k de modo que las soluciones de $x^2 - 2x + k = 0$ sean complejas mas no reales.

65. Determine k de modo que $4x^2 - kx + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales iguales.

66. Determine k de modo que $3x^2 - kx - 2 = 0$ tenga soluciones reales.

6.5 Más ecuaciones cuadráticas y aplicaciones

¿Cuál método se debe usar para resolver una ecuación cuadrática particular? No hay una respuesta firme y rápida a dicha cuestión; depende del tipo de ecuación y de su preferencia personal. En los siguientes ejemplos se enunciarán razones para elegir una técnica específica. Sin embargo, tenga en mente que, por lo general, es una decisión que debe tomar según surja la necesidad. Por esto necesita familiarizarse con las fortalezas y las debilidades de cada método.

EJEMPLO 1

Resuelva $2x^2 - 3x - 1 = 0$

Solución

Debido al coeficiente inicial de 2 y al término constante de -1, existen muy pocas posibilidades de factorización a considerar. Por tanto, con tales problemas, primero intente el enfoque de factorización. Por desgracia, este polinomio particular no es factorizable usando enteros. Use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

✔ Comprobación

Puede usar las relaciones de suma de raíces y el producto de raíces para los propósitos de comprobación.

Suma de raíces $\frac{3 + \sqrt{17}}{4} + \frac{3 - \sqrt{17}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ y $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

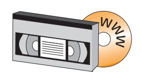
Producto de raíces $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) = \frac{9 - 17}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$ y

$$\frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}\right\}$ ■

EJEMPLO 2

Resuelva $\frac{3}{n} + \frac{10}{n + 6} = 1$



Solución

$$\frac{3}{n} + \frac{10}{n + 6} = 1, \qquad n \neq 0 \text{ y } n \neq -6$$

$$n(n + 6)\left(\frac{3}{n} + \frac{10}{n + 6}\right) = 1(n)(n + 6)$$ Multiplique ambos lados por $n(n + 6)$, que es el MCD.

$$3(n + 6) + 10n = n(n + 6)$$
$$3n + 18 + 10n = n^2 + 6n$$
$$13n + 18 = n^2 + 6n$$
$$0 = n^2 - 7n - 18$$

Esta ecuación es fácil de considerar para posible factorización, la cual se hace del modo siguiente:

$$0 = (n - 9)(n + 2)$$
$$n - 9 = 0 \quad \text{o} \quad n + 2 = 0$$
$$n = 9 \quad \text{o} \quad n = -2$$

Comprobación

Al sustituir de nuevo 9 y −2 en la ecuación original se obtiene

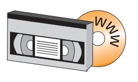
$$\frac{3}{n} + \frac{10}{n+6} = 1 \qquad\qquad \frac{3}{n} + \frac{10}{n+6} = 1$$
$$\frac{3}{9} + \frac{10}{9+6} \stackrel{?}{=} 1 \qquad\qquad \frac{3}{-2} + \frac{10}{-2+6} \stackrel{?}{=} 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{10}{15} \stackrel{?}{=} 1 \qquad \text{o} \qquad -\frac{3}{2} + \frac{10}{4} \stackrel{?}{=} 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} 1 \qquad\qquad -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1 \qquad\qquad \frac{2}{2} = 1$$

El conjunto solución es $\{-2, 9\}$. ■

Es necesario hacer dos comentarios acerca del ejemplo 2. Primero note la indicación de las restricciones iniciales $n \neq 0$ y $n \neq -6$. Recuerde que es necesario hacer esto cuando se resuelvan ecuaciones fraccionarias. Segundo, las relaciones de suma de raíces y producto de raíces no se usan con propósitos de comprobación en este problema. Dichas relaciones comprobarían la validez del trabajo sólo desde el paso $0 = n^2 - 7n - 18$ hasta el final. En otras palabras, un error cometido al cambiar la ecuación original a forma cuadrática no se detectaría al comprobar la suma y el producto de las raíces potenciales. Con tal problema, la única *comprobación absoluta* es sustituir las soluciones potenciales de nuevo en la ecuación original.

EJEMPLO 3

Resuelva $x^2 + 22x + 112 = 0$



Solución

El tamaño del término constante hace al método de factorización un tanto complicado para este problema. Más aún, dado que el coeficiente inicial es 1 y el coefi-

ciente del término x es par, el método de completar el cuadrado funcionará de manera efectiva.

$$x^2 + 22x + 112 = 0$$
$$x^2 + 22x = -112$$
$$x^2 + 22x + 121 = -112 + 121$$
$$(x + 11)^2 = 9$$
$$x + 11 = \pm\sqrt{9}$$
$$x + 11 = \pm 3$$
$$x + 11 = 3 \quad \text{o} \quad x + 11 = -3$$
$$x = -8 \quad \text{o} \quad x = -14$$

✔ **Comprobación**

Suma de raíces $-8 + (-14) = -22$ y $-\dfrac{b}{a} = -22$

Producto de raíces $(-8)(-14) = 112$ y $\dfrac{c}{a} = 112$

El conjunto solución es $\{-14, -8\}$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $x^4 - 4x^2 - 96 = 0$

Solución

Una ecuación como $x^4 - 4x^2 - 96 = 0$ no es una ecuación cuadrática, pero se le puede resolver con las técnicas que se usan en las ecuaciones cuadráticas. Esto es: se puede factorizar el polinomio y aplicar la propiedad "$ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$" del modo siguiente.

$$x^4 - 4x^2 - 96 = 0$$
$$(x^2 - 12)(x^2 + 8) = 0$$
$$x^2 - 12 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + 8 = 0$$
$$x^2 = 12 \quad \text{o} \quad x^2 = -8$$
$$x = \pm\sqrt{12} \quad \text{o} \quad x = \pm\sqrt{-8}$$
$$x = \pm 2\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = \pm 2i\sqrt{2}$$

El conjunto solución es $\{\pm 2\sqrt{3}, \pm 2i\sqrt{2}\}$. (¡La comprobación de este problema se dejará en sus manos!) ■

Observaciones: Otro método para el ejemplo 4 sería sustituir y por x^2 y y^2 por x^4. La ecuación $x^4 - 4x^2 - 96 = 0$ se convierte en la ecuación cuadrática

$y^2 - 4y - 96 = 0$. Por tanto, se dice que $x^4 - 4x^2 - 96 = 0$ es de la *forma cuadrática*. Entonces se podría resolver la ecuación cuadrática $y^2 - 4y - 96 = 0$ y usar la ecuación $y = x^2$ para determinar las soluciones para x.

Aplicaciones

Antes de concluir esta sección con algunos problemas verbales que se pueden resolver usando ecuaciones cuadráticas, se reformulan las sugerencias hechas en un capítulo anterior para resolver problemas verbales.

Sugerencias para resolver problemas verbales

1. Lea el problema cuidadosamente y asegúrese de que entiende el significado de todas las palabras. Esté especialmente alerta a cualquier término técnico utilizado en el enunciado del problema.
2. Lea el problema una segunda vez (quizás incluso una tercera vez) para obtener un panorama de la situación descrita y determinar los hechos conocidos, así como lo que debe encontrar.
3. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda serle útil para analizar el problema.
4. Elija una variable significativa para representar una cantidad desconocida en el problema (tal vez l, si la longitud de una rectángulo es una cantidad desconocida) y represente cualesquiera otras incógnitas en términos de dicha variable.
5. Busque una guía que pueda usar para establecer una ecuación. Una guía puede ser una fórmula como $A = lw$ o una relación tal como “la parte fraccionaria de un trabajo realizado por Bill, más la parte fraccionaria del trabajo realizado por Mary, es igual al trabajo total”.
6. Forme una ecuación que contenga la variable y que traduzca las condiciones de la guía del español al álgebra.
7. Resuelva la ecuación y use las soluciones para determinar todos los hechos requeridos en el problema.
8. **Compruebe todas las respuestas de vuelta en el enunciado original del problema.**

Tenga en mente estas sugerencias mientras considera algunos problemas verbales.

PROBLEMA 1

Una página para una revista contiene 70 pulgadas cuadradas de tipografía. La altura de una página es el doble de su ancho. Si el margen uniforme alrededor de la tipografía es de 2 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la página?

Solución

Sea x el ancho de una página. Entonces $2x$ representa la altura de una página. Ahora dibuje y marque un modelo de una página (figura 6.8).

$$(x - 4)(2x - 4) = 70$$
$$2x^2 - 12x + 16 = 70$$
$$2x^2 - 12x - 54 = 0$$
$$x^2 - 6x - 27 = 0$$
$$(x - 9)(x + 3) = 0$$
$$x - 9 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$$
$$x = 9 \quad \text{o} \quad x = -3$$

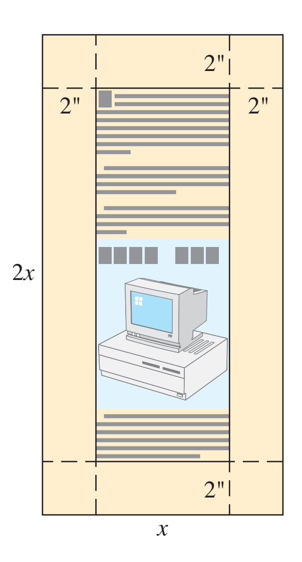


Figura 6.8

Descarte la solución negativa; la página debe tener 9 pulgadas de ancho y su altura es 2(9) = 18 pulgadas. ■

Use su conocimiento de las ecuaciones cuadráticas para analizar algunas aplicaciones al mundo de los negocios. Por ejemplo, si P dólares se invierten a una tasa de interés r compuesta anualmente durante t años, entonces la cantidad de dinero, A, acumulada al final de t años está dada por la fórmula

$$A = P(1 + r)^t$$

Esta fórmula de interés compuesto sirve como guía para el siguiente problema.

PROBLEMA 2

Suponga que se invierten \$100 a cierta tasa de interés compuesta anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado al final de 2 años es \$121, encuentre la tasa de interés.

Solución

Sea r la tasa de interés. Sustituya los valores conocidos en la fórmula de interés compuesto para producir

$$A = P(1 + r)^t$$
$$121 = 100(1 + r)^2$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$\frac{121}{100} = (1 + r)^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{121}{100}} = (1 + r)$$

$$\pm\frac{11}{10} = 1 + r$$

$$1 + r = \frac{11}{10} \quad \text{o} \quad 1 + r = -\frac{11}{10}$$

$$r = -1 + \frac{11}{10} \quad \text{o} \quad r = -1 - \frac{11}{10}$$

$$r = \frac{1}{10} \quad \text{o} \quad r = -\frac{21}{10}$$

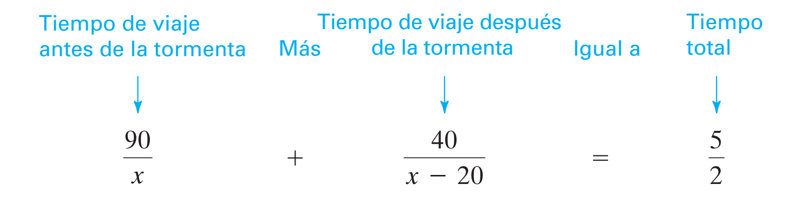
Debe descartar la solución negativa, de modo que $r = \frac{1}{10}$ es la única solución. Cambie $\frac{1}{10}$ a porcentaje y la tasa de interés es 10%. ■

PROBLEMA 3

En un viaje de 130 millas, desde Orlando hasta Sarasota, Roberto encontró una fuerte tormenta durante las últimas 40 millas del viaje. Durante la tormenta promedió 20 millas por hora menos que antes de la tormenta. Todo el viaje tardó $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuán rápido viajaba antes de la tormenta?

Solución

Sea x la rapidez de Roberto antes de la tormenta. Entonces $x - 20$ representa su rapidez durante la tormenta. Puesto que $t = \frac{d}{r}$, entonces $\frac{90}{x}$ representa el tiempo de viaje antes de la tormenta, y $\frac{40}{x-20}$ representa el tiempo de viaje durante la tormenta. La siguiente guía resume la situación.



$$\frac{90}{x} + \frac{40}{x-20} = \frac{5}{2}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$2x(x-20)\left(\frac{90}{x} + \frac{40}{x-20}\right) = 2x(x-20)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$2x(x-20)\left(\frac{90}{x}\right) + 2x(x-20)\left(\frac{40}{x-20}\right) = 2x(x-20)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$180(x-20) + 2x(40) = 5x(x-20)$$

$$180x - 3600 + 80x = 5x^2 - 100x$$
$$0 = 5x^2 - 360x + 3600$$
$$0 = 5(x^2 - 72x + 720)$$
$$0 = 5(x - 60)(x - 12)$$
$$x - 60 = 0 \quad \text{o} \quad x - 12 = 0$$
$$x = 60 \quad \text{o} \quad x = 12$$

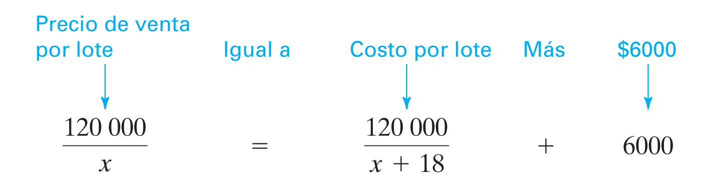
Se desecha la solución de 12 porque sería imposible conducir 20 millas por hora más lento que 12 millas por hora; en consecuencia, la rapidez de Roberto antes de la tormenta fue de 60 millas por hora. ■

PROBLEMA 4

Una empresaria compró una parcela de tierra en especulación por \$120 000. Ella subdividió el terreno en lotes y, cuando los vendió todos, excepto 18, con una ganancia de \$6000 por lote, recuperó todo el costo del terreno. ¿Cuántos lotes vendió y a qué precio por lote?

Solución

Sea x el número de lotes vendidos. Entonces $x + 18$ representa el número total de lotes. Por tanto, $\frac{120\,000}{x}$ representa el precio de venta por lote, y $\frac{120\,000}{x + 18}$ representa el costo por lote. La siguiente ecuación resume la situación.



$$\frac{120\,000}{x} = \frac{120\,000}{x + 18} + 6000$$

Al resolver esta ecuación se obtiene

$$x(x + 18)\left(\frac{120\,000}{x}\right) = \left(\frac{120\,000}{x + 18} + 6000\right)(x)(x + 18)$$
$$120\,000(x + 18) = 120\,000x + 6000x(x + 18)$$
$$120\,000x + 2\,160\,000 = 120\,000x + 6000x^2 + 108\,000x$$
$$0 = 6000x^2 + 108\,000x - 2\,160\,000$$
$$0 = x^2 + 18x - 360$$

El método de completar el cuadrado funciona muy bien con esta ecuación.

$$x^2 + 18x = 360$$
$$x^2 + 18x + 81 = 441$$
$$(x + 9)^2 = 441$$
$$x + 9 = \pm\sqrt{441}$$

$$x + 9 = \pm 21$$

$$x + 9 = 21 \quad \text{o} \quad x + 9 = -21$$

$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = -30$$

Se descarta la solución negativa; por tanto, 12 lotes se vendieron a $\frac{120\,000}{x} = \frac{120\,000}{12} = \$10\,000$ por lote. ■

PROBLEMA 5

Barry compró algunas acciones por \$600. Una semana después el valor de las acciones aumentó \$3 por acción y las vendió todas, excepto 10 acciones, y recuperó su inversión original de \$600. ¿Cuántas acciones vendió y a qué precio por acción?

Solución

Sea s el número de acciones que vendió Barr. Entonces $s + 10$ representa el número de acciones que compró. Por tanto, $\frac{600}{s}$ representa el precio de venta por acción y $\frac{600}{s + 10}$ representa el costo por acción.

Precio de venta por acción → $\frac{600}{s}$; Costo por acción → $\frac{600}{s + 10}$

$$\frac{600}{s} = \frac{600}{s + 10} + 3$$

Resolver esta ecuación produce

$$s(s + 10)\left(\frac{600}{s}\right) = \left(\frac{600}{s + 10} + 3\right)(s)(s + 10)$$

$$600(s + 10) = 600s + 3s(s + 10)$$

$$600s + 6000 = 600s + 3s^2 + 30s$$

$$0 = 3s^2 + 30s - 6000$$

$$0 = s^2 + 10s - 2000$$

Use la fórmula cuadrática para obtener

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(-2000)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{2}$$

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{8100}}{2}$$

$$s = \frac{-10 \pm 90}{2}$$

$$s = \frac{-10 + 90}{2} \quad \text{o} \quad s = \frac{-10 - 90}{2}$$

$$s = 40 \quad \text{o} \quad s = -50$$

Se descarta la solución negativa y se sabe que vendió 40 acciones a $\frac{600}{s} = \frac{600}{40} = \$15$ por acción. ■

El siguiente conjunto de problemas contiene una gran variedad de problemas verbales. No sólo hay algunas aplicaciones empresariales similares a las estudiadas en esta sección, sino que también hay más problemas similares a los estudiados en los capítulos 3 y 4. Intente hacer su mejor esfuerzo sin consultar los ejemplos de los capítulos anteriores.

Conjunto de problemas 6.5

Para los problemas 1-20 resuelva cada ecuación cuadrática usando el método que a usted le parezca más apropiado.

1. $x^2 - 4x - 6 = 0$

2. $x^2 - 8x - 4 = 0$

3. $3x^2 + 23x - 36 = 0$

4. $n^2 + 22n + 105 = 0$

5. $x^2 - 18x = 9$

6. $x^2 + 20x = 25$

7. $2x^2 - 3x + 4 = 0$

8. $3y^2 - 2y + 1 = 0$

9. $135 + 24n + n^2 = 0$

10. $28 - x - 2x^2 = 0$

11. $(x - 2)(x + 9) = -10$

12. $(x + 3)(2x + 1) = -3$

13. $2x^2 - 4x + 7 = 0$

14. $3x^2 - 2x + 8 = 0$

15. $x^2 - 18x + 15 = 0$

16. $x^2 - 16x + 14 = 0$

17. $20y^2 + 17y - 10 = 0$

18. $12x^2 + 23x - 9 = 0$

19. $4t^2 + 4t - 1 = 0$

20. $5t^2 + 5t - 1 = 0$

Para los problemas 21-40 resuelva cada ecuación.

21. $n + \frac{3}{n} = \frac{19}{4}$

22. $n - \frac{2}{n} = -\frac{7}{3}$

23. $\frac{3}{x} + \frac{7}{x - 1} = 1$

24. $\frac{2}{x} + \frac{5}{x + 2} = 1$

25. $\frac{12}{x - 3} + \frac{8}{x} = 14$

26. $\frac{16}{x + 5} - \frac{12}{x} = -2$

27. $\frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2}$

28. $\frac{4}{x + 1} + \frac{2}{x} = \frac{5}{3}$

29. $\frac{6}{x} + \frac{40}{x + 5} = 7$

30. $\frac{12}{t} + \frac{18}{t + 8} = \frac{9}{2}$

31. $\frac{5}{n - 3} - \frac{3}{n + 3} = 1$

32. $\frac{3}{t + 2} + \frac{4}{t - 2} = 2$

33. $x^4 - 18x^2 + 72 = 0$

34. $x^4 - 21x^2 + 54 = 0$

35. $3x^4 - 35x^2 + 72 = 0$

36. $5x^4 - 32x^2 + 48 = 0$

37. $3x^4 + 17x^2 + 20 = 0$

38. $4x^4 + 11x^2 - 45 = 0$

39. $6x^4 - 29x^2 + 28 = 0$

40. $6x^4 - 31x^2 + 18 = 0$

Para los problemas 41-70 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

41. Encuentre dos números enteros positivos consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 145.

42. Encuentre dos números enteros positivos nones consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 74.

43. Dos enteros positivos difieren por 3 y su producto es 108. Encuentre los números.

44. Suponga que la suma de dos números es 20 y la suma de sus cuadrados es 232. Encuentre los números.

45. Encuentre dos números tales que su suma sea 10 y su producto sea 22.

46. Encuentre dos números tales que su suma sea 6 y su producto sea 7.

47. Suponga que la suma de dos números enteros positivos es 9 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{2}$. Encuentre los números.

48. La diferencia entre dos números enteros positivos es 8 y la diferencia entre sus recíprocos es $\frac{1}{6}$. Encuentre los dos números.

49. La suma de las longitudes de los dos catetos de un triángulo rectángulo es de 21 pulgadas. Si la longitud de la hipotenusa es de 15 pulgadas, encuentre la longitud de cada cateto.

50. La longitud de un piso rectangular es 1 metro menor que el doble de su ancho. Si una diagonal del rectángulo mide 17 metros, encuentre la longitud y el ancho del piso.

51. Un lote rectangular de terreno, que mide 12 metros por 20 metros, está rodeado por un pasillo de un ancho uniforme (vea la figura 6.9). El área del pasillo es de 68 metros cuadrados. Encuentre el ancho del pasillo.

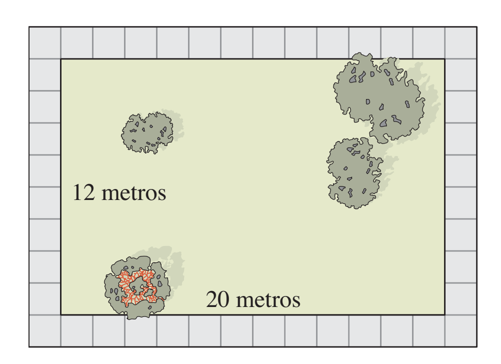


Figura 6.9

52. Un cuadro de 5 por 7 pulgadas está rodeado por un marco de ancho uniforme. En conjunto el área del cuadro y del marco es de 80 pulgadas cuadradas. Encuentre el ancho del marco.

53. El perímetro de un rectángulo mide 44 pulgadas y su área es de 112 pulgadas cuadradas. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

54. Un trozo rectangular de cartón es 2 unidades más largo que su ancho. De cada una de sus esquinas se recorta un trozo cuadrado de 2 unidades por lado. Luego las aletas se doblan para formar una caja abierta que tiene un volumen de 70 unidades cúbicas. Encuentre la longitud y el ancho de la pieza original de cartón.

55. El tiempo de Charlotte para recorrer 250 millas es una hora más que el tiempo de Lorraine para recorrer 180 millas. Charlotte viajó 5 millas por hora más rápido que Lorraine. ¿Cuán rápido viajó cada una?

56. El tiempo de Larry para recorrer 156 millas es una hora más que el tiempo de Terrell para recorrer 108 millas. Terrell condujo 2 millas por hora más rápido que Larry. ¿Cuán rápido viajó cada uno?

57. En un viaje de 570 millas Andy promedió 5 millas por hora más rápido durante las últimas 240 millas de lo que hizo durante las primeras 330 millas. Todo el viaje duró 10 horas. ¿Cuán rápido viajó durante las primeras 330 millas?

58. En una excursión ciclista de 135 millas, María promedió 5 millas por hora más rápido durante las primeras 60 millas que durante las últimas 75 millas. Todo el viaje duró 8 horas. Encuentre su rapidez durante las primeras 60 millas.

59. A Terry le toma 2 horas más realizar cierto trabajo del que le toma a Tom. Ambos trabajan juntos durante 3 horas; entonces Tom se retira y Terry termina el trabajo en una hora. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada uno realizar todo el trabajo?

60. Suponga que Arlene puede podar todo el jardín en 40 minutos menos con la podadora eléctrica que con la podadora manual. Un día la podadora eléctrica se descompone después de que ella poda durante 30 minutos. Termina el jardín con la podadora manual en 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tarda Arlene en podar todo el jardín con la podadora eléctrica?

61. Un estudiante realizó un trabajo de procesamiento de texto por $24. Tardó una hora más de lo que esperaba y por tanto ganó $4 por hora menos de lo que anticipó. ¿Cuánto tiempo esperaba tardar en hacer el trabajo?

62. Un grupo de estudiantes conviene en que cada uno coopere con la misma cantidad para pagar una fiesta que costará $100. Entonces se enteran que 5 estudiantes más están interesados en la fiesta y que compartirán los gastos. Esto redujo en $1 lo que cada uno debía pagar. ¿Cuántos estudiantes se implicaron en la fiesta y cuánto tuvo que pagar cada estudiante?

63. Un grupo de estudiantes está de acuerdo en que cada uno aporte la misma cantidad para comprar a su profesor favorito un regalo de cumpleaños de $80. Al último minuto, 2 de los estudiantes deciden no cooperar. Esto aumentó en $2 la cantidad que cada uno de los estudiantes restantes tuvieron que pagar. ¿Cuántos estudiantes contribuyeron realmente al regalo?

64. Una minorista compró algunos tarros especiales por $48. Ella decidió conservar dos de los tarros, pero en-

tonces tuvo que cambiar el precio a \$3 por tarro sobre el costo original. Si los tarros restantes los vende por \$70, ¿cuántos tarros compró y a qué precio por tarro los vendió?

65. Tony compró algunas acciones por \$720. Un mes después el valor de las acciones aumentó en \$8 por acción y las vendió, menos 20, y recibió \$800. ¿Cuántas acciones vendió y a qué precio por acción?

66. La fórmula $D = \frac{n(n-3)}{2}$ produce el número de diagonales, D, en un polígono de n lados. Encuentre el número de lados de un polígono que tenga 54 diagonales.

67. La fórmula $S = \frac{n(n+1)}{2}$ produce la suma, S, de los primeros n números naturales 1, 2, 3, 4,. . . ¿Cuántos números naturales consecutivos, comenzando con 1, darán una suma de 1275?

68. En un punto a 16 yardas de la base de una torre, la distancia a la cima de la torre es 4 yardas más que la altura de la torre (vea la figura 6.10). Encuentre la altura de la torre.

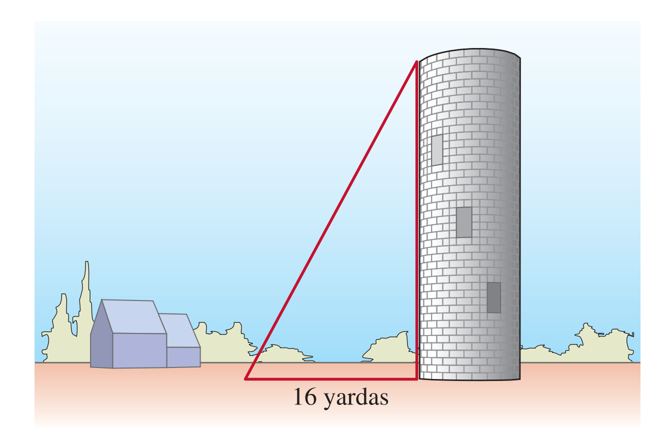


Figura 6.10

69. Suponga que se invierten \$500 a cierta tasa de interés compuesta anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado al final de 2 años es de \$594.05, encuentre la tasa de interés.

70. Suponga que se invierten \$10 000 a cierta tasa de interés compuesta anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado al final de 2 años es de \$12 544, encuentre la tasa de interés.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

71. ¿Cómo resolvería la ecuación $x^2 - 4x = 252$? Explique su elección del método.

72. Explique cómo resolvería $(x-2)(x-7) = 0$ y también cómo resolvería $(x-2)(x-7) = 4$.

73. Una de las sugerencias para resolver problemas es buscar una guía que pueda usar para auxiliarse a determinar una ecuación. ¿Qué significa para usted esta sugerencia?

74. ¿Una ecuación cuadrática con coeficientes enteros puede tener exactamente una solución compleja no real? Explique su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 75-81 resuelva cada ecuación.

75. $x - 9\sqrt{x} + 18 = 0$ [*Sugerencia:* Sea $y = \sqrt{x}$.]

76. $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$

77. $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

78. $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$ [*Sugerencia:* Sea $y = x^{\frac{1}{3}}$.]

79. $6x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

80. $x^{-2} + 4x^{-1} - 12 = 0$

81. $12x^{-2} - 17x^{-1} - 5 = 0$

Las siguientes ecuaciones también tienen forma cuadrática. Para resolverlas, comience por elevar cada lado de la ecuación a la potencia adecuada, de modo que el exponente se convertirá en entero. Luego, para resolver la ecuación cuadrática resultante, puede usar la propiedad de raíz cuadrada, factorizar o la fórmula cuadrática, lo que sea más adecuado. Esté consciente de que elevar cada lado de la ecuación a una potencia puede introducir raíces extrañas; por tanto, asegúrese de comprobar sus soluciones. Estudie el siguiente ejemplo antes de comenzar los problemas.

Resuelva

$$(x+3)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\left[(x+3)^{\frac{2}{3}}\right]^3 = 1^3 \quad \text{Eleve ambos lados a la tercera potencia.}$$

$$(x+3)^2 = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 1$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$(x+4)(x+2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = -4 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Ambas soluciones coinciden. El conjunto solución es $\{-4, -2\}$.

Para los problemas 82-90 resuelva cada ecuación.

82. $(5x+6)^{\frac{1}{2}} = x$

83. $(3x+4)^{\frac{1}{2}} = x$

84. $x^{\frac{2}{3}} = 2$

85. $x^{\frac{2}{5}} = 2$

86. $(2x+6)^{\frac{1}{2}} = x$

87. $(2x-4)^{\frac{2}{3}} = 1$

88. $(4x+5)^{\frac{2}{3}} = 2$

89. $(6x+7)^{\frac{1}{2}} = x + 2$

90. $(5x+21)^{\frac{1}{2}} = x + 3$

6.6 Desigualdades cuadráticas y otras desigualdades no lineales

A la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se le conoce como forma estándar de una ecuación cuadrática con una variable. De igual modo, las siguientes formas expresan **desigualdades cuadráticas** con una variable.

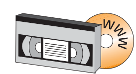
$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad ax^2 + bx + c \leq 0$$

Usar la recta numérica es una manera muy efectiva de auxiliarse para resolver desigualdades cuadráticas, en las que el polinomio cuadrático sea factorizable. Considere algunos ejemplos para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 1

Resuelva y grafique las soluciones para $x^2 + 2x - 8 > 0$



Solución

Primero, factorice el polinomio.

$$x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$(x+4)(x-2) > 0$$

En una recta numérica (figura 6.11), indique que, en $x = 2$ y $x = -4$, el producto de $(x + 4)(x - 2)$ es igual a cero. Los números -4 y 2 dividen la recta numérica en tres intervalos: (1) los números menores que -4, (2) los números entre -4 y 2, y (3) los números mayores que 2. Puede elegir un **número de prueba** de cada uno de estos intervalos y ver cómo afecta a los signos de los factores $x + 4$ y $x - 2$ y, en

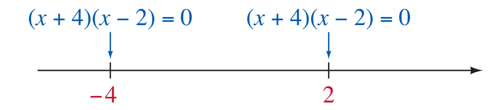


Figura 6.11

consecuencia, al signo del producto de estos factores. Por ejemplo, si $x < -4$ (intente $x = -5$), entonces $x + 4$ es negativo y $x - 2$ es negativo, de modo que su producto es positivo. Si $-4 < x < 2$ (intente $x = 0$), entonces $x + 4$ es positivo y $x - 2$ es negativo, de modo que su producto es negativo. Si $x > 2$ (intente $x = 3$), entonces $x + 4$ es positivo y $x - 2$ es positivo, de modo que su producto es positivo. Esta información se ordena convenientemente en una recta numérica, como se muestra en la figura 6.12. Note los círculos abiertos en -4 y 2 para indicar que no se incluyen en el conjunto solución.

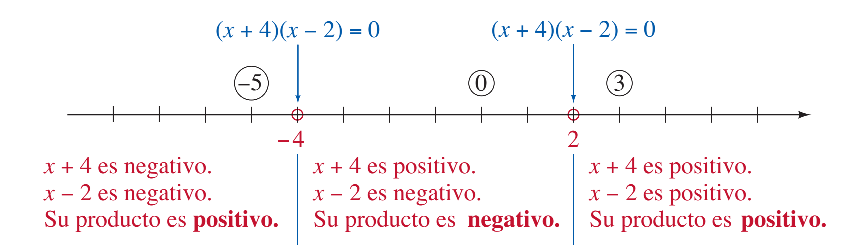


Figura 6.12

Por tanto, la desigualdad dada, $x^2 + 2x - 8 > 0$, se satisface con números menores que -4 junto con números mayores que 2. Al usar notación de intervalo, el conjunto solución es $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$. Estas soluciones se pueden mostrar sobre una recta numérica (figura 6.13).

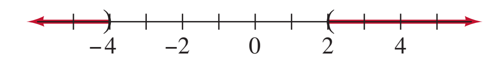


Figura 6.13

A los números como −4 y 2 en el ejemplo anterior (en el que el polinomio dado o la expresión algebraica es igual a cero o está indefinida) se les conoce como **números críticos**. Considere algunos ejemplos adicionales que utilicen números críticos y números de prueba.

EJEMPLO 2 Resuelva y grafique las soluciones para $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

Solución

Primero factorice el polinomio.

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0$$
$$(x + 3)(x - 1) \leq 0$$

Segundo, localice los valores para los cuales $(x + 3)(x - 1)$ es igual a cero. Ponga puntos en −3 y 1 para recordar que estos dos números se deben incluir en el conjunto solución porque el enunciado dado incluye igualdad. Ahora elija un número de prueba de cada uno de los tres intervalos y registre el comportamiento de los signos de los factores $(x + 3)$ y $(x - 1)$ (figura 6.14).

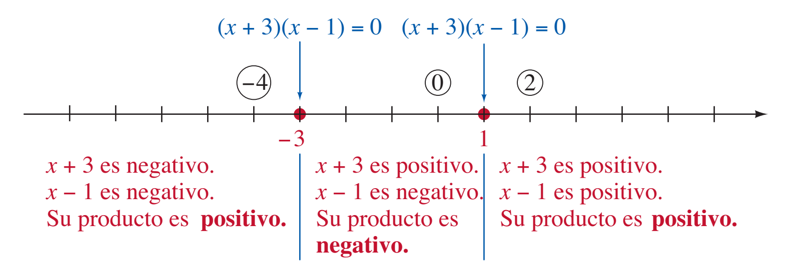


Figura 6.14

Por tanto, el conjunto solución es $[-3, 1]$ y se puede graficar como en la figura 6.15.

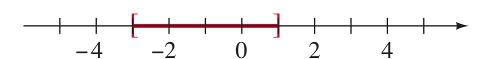


Figura 6.15 ■

Los ejemplos 1 y 2 indican un método sistemático para resolver desigualdades cuadráticas en las cuales el polinomio es factorizable. Este mismo tipo de análisis de recta numérica también sirve para resolver cocientes indicados como $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$.

EJEMPLO 3

Resuelva y grafique las soluciones para $\frac{x+1}{x-5} > 0$

Solución

Primero indique que en $x = -1$ el cociente dado es igual a cero y en $x = 5$ el cociente está indefinido. Segundo, elija números de prueba de cada uno de los tres intervalos y registre el comportamiento de los signos de $(x + 1)$ y $(x - 5)$ como en la figura 6.16.

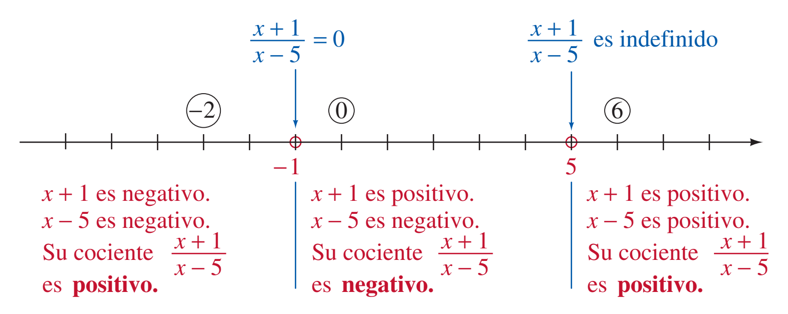


Figura 6.16

Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$, y su gráfico se muestra en la figura 6.17.

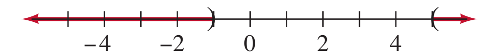
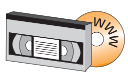


Figura 6.17

■

EJEMPLO 4

Resuelva $\frac{x+2}{x+4} \leq 0$



Solución

El cociente indicado es igual a cero en $x = -2$ y es indefinido en $x = -4$. (Note que -2 se debe incluir en el conjunto solución, mas -4 no se debe incluir.) Ahora elija algunos números de prueba y registre el comportamiento de los signos de $(x + 2)$ y $(x + 4)$ como en la figura 6.18.

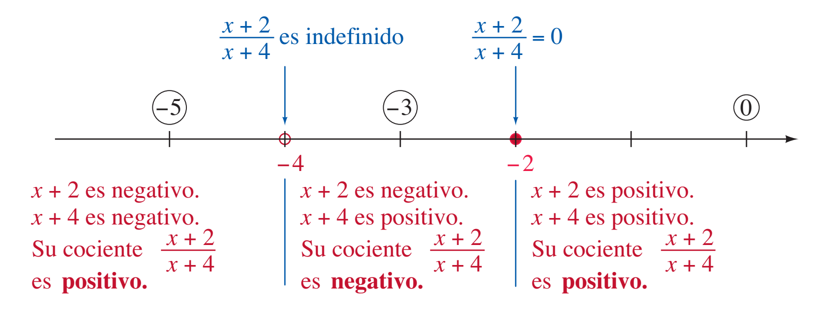


Figura 6.18

Por tanto, el conjunto solución es $[-4, -2]$.

■

El ejemplo final ilustra que a veces es necesario cambiar la forma de la desigualdad dada antes de usar el análisis de recta numérica.

EJEMPLO 5

Resuelva $\dfrac{x}{x+2} \geq 3$

Solución

Primero cambie la forma de la desigualdad dada del modo siguiente:

$$\frac{x}{x+2} \geq 3$$

$$\frac{x}{x+2} - 3 \geq 0 \qquad \text{Sume } -3 \text{ a ambos lados.}$$

$$\frac{x-3(x+2)}{x+2} \geq 0 \qquad \text{Exprese el lado izquierdo sobre un denominador común.}$$

$$\frac{x-3x-6}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{-2x-6}{x+2} \geq 0$$

Ahora puede proceder como hizo con los ejemplos previos. Si $x = -3$, entonces $\dfrac{-2x-6}{x+2}$ es igual a cero; y si $x = -2$, entonces $\dfrac{-2x-6}{x+2}$ es indefinida. Luego, al elegir números de prueba, puede registrar el comportamiento de los signos de $(-2x-6)$ y $(x+2)$ como en la figura 6.19.

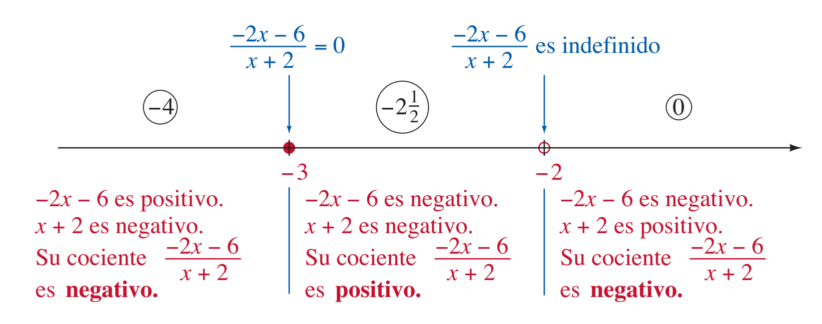


Figura 6.19

Por tanto, el conjunto solución es $[-3, -2)$. ¡Tal vez debe comprobar algunos números de este conjunto solución en la desigualdad original! ■

Conjunto de problemas 6.6

Para los problemas 1-20 resuelva cada desigualdad y grafique su conjunto solución sobre una recta numérica.

1. $(x+2)(x-1)>0$

2. $(x-2)(x+3)>0$

3. $(x+1)(x+4)<0$

4. $(x-3)(x-1)<0$

5. $(2x-1)(3x+7)\geq 0$

6. $(3x+2)(2x-3)\geq 0$

7. $(x+2)(4x-3)\leq 0$

8. $(x-1)(2x-7)\leq 0$

9. $(x+1)(x-1)(x-3)>0$

10. $(x+2)(x+1)(x-2)>0$

11. $x(x+2)(x-4)\leq 0$

12. $x(x+3)(x-3)\leq 0$

13. $\dfrac{x+1}{x-2}>0$

14. $\dfrac{x-1}{x+2}>0$

15. $\dfrac{x-3}{x+2}<0$

16. $\dfrac{x+2}{x-4}<0$

17. $\dfrac{2x-1}{x}\geq 0$

18. $\dfrac{x}{3x+7}\geq 0$

19. $\dfrac{-x+2}{x-1}\leq 0$

20. $\dfrac{3-x}{x+4}\leq 0$

Para los problemas 21-56 resuelva cada desigualdad.

21. $x^2+2x-35<0$

22. $x^2+3x-54<0$

23. $x^2-11x+28>0$

24. $x^2+11x+18>0$

25. $3x^2+13x-10\leq 0$

26. $4x^2-x-14\leq 0$

27. $8x^2+22x+5\geq 0$

28. $12x^2-20x+3\geq 0$

29. $x(5x-36)>32$

30. $x(7x+40)<12$

31. $x^2-14x+49\geq 0$

32. $(x+9)^2\geq 0$

33. $4x^2+20x+25\leq 0$

34. $9x^2-6x+1\leq 0$

35. $(x+1)(x-3)^2>0$

36. $(x-4)^2(x-1)\leq 0$

37. $4-x^2<0$

38. $2x^2-18\geq 0$

39. $4(x^2-36)<0$

40. $-4(x^2-36)\geq 0$

41. $5x^2+20>0$

42. $-3x^2-27\geq 0$

43. $x^2-2x\geq 0$

44. $2x^2+6x<0$

45. $3x^3+12x^2>0$

46. $2x^3+4x^2\leq 0$

47. $\dfrac{2x}{x+3}>4$

48. $\dfrac{x}{x-1}>2$

49. $\dfrac{x-1}{x-5}\leq 2$

50. $\dfrac{x+2}{x+4}\leq 3$

51. $\dfrac{x+2}{x-3}>-2$

52. $\dfrac{x-1}{x-2}<-1$

53. $\dfrac{3x+2}{x+4}\leq 2$

54. $\dfrac{2x-1}{x+2}\geq -1$

55. $\dfrac{x+1}{x-2}<1$

56. $\dfrac{x+3}{x-4}\geq 1$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

57. Explique cómo resolver la desigualdad $(x+1)(x-2)(x-3)>0$.

58. Explique cómo resolver la desigualdad $(x-2)^2>0$ por inspección.

59. Su amiga observa la desigualdad $1+\dfrac{1}{x}>2$ y sin cálculo alguno afirma que el conjunto solución es todos los números reales entre 0 y 1. ¿Cómo puede hacer esto?

60. ¿Por qué el conjunto solución para $(x-2)^2\geq 0$ es el conjunto de todos los números reales?

61. ¿Por qué el conjunto solución para $(x-2)^2\leq 0$ es el conjunto $\{2\}$?

MÁS INVESTIGACIÓN

62. El producto $(x - 2)(x + 3)$ es positivo si ambos factores son negativos *o* si ambos factores son positivos. Por tanto, $(x - 2)(x + 3) > 0$ se puede resolver del modo siguiente:

$$(x - 2 < 0 \text{ y } x + 3 < 0) \text{ o } (x - 2 > 0 \text{ y } x + 3 > 0)$$

$$(x < 2 \text{ y } x < -3) \text{ o } (x > 2 \text{ y } x > -3)$$

$$x < -3 \text{ o } x > 2$$

El conjunto solución es $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$. Use este tipo de análisis para resolver las siguientes expresiones.

(a) $(x - 2)(x + 7) > 0$

(b) $(x - 3)(x + 9) \geq 0$

(c) $(x + 1)(x - 6) \leq 0$

(d) $(x + 4)(x - 8) < 0$

(e) $\frac{x + 4}{x - 7} > 0$

(f) $\frac{x - 5}{x + 8} \leq 0$

Capítulo 6 Resumen

(6.1) Un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria definida mediante $i = \sqrt{-1}$, es un **número complejo**.

Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

La suma y resta de números complejos se describe del modo siguiente:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

La raíz cuadrada de cualquier número real negativo se puede expresar como el producto de un número real y la unidad imaginaria i. Esto es,

$\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$, donde b es un número real positivo

El producto de dos números complejos se conforma con el producto de dos binomios. La **conjugada** de $a + bi$ es $a - bi$. El producto de un número complejo y su conjugada es un número real. Por tanto, las conjugadas se usan para simplificar expresiones como $\frac{4 + 3i}{5 - 2i}$, que indica el cociente de dos números complejos.

(6.2) La **forma estándar de una ecuación cuadrática** con una variable es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver al factorizar y aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

No olvide que aplicar la propiedad "si $a = b$, entonces $a^n = b^n$" puede producir soluciones extrañas. En consecuencia, se *deben* comprobar todas las soluciones potenciales.

Se pueden resolver ecuaciones cuadráticas al aplicar la propiedad $x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{a}$.

(6.3) Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = k$ mediante **completar el cuadrado**, (1) se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos lados, (2) se factoriza el lado izquierdo y (3) se aplica la propiedad $x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{a}$.

(6.4) Cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver mediante la **fórmula cuadrática**, que por lo general se enuncia como

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El **discriminante**, $b^2 - 4ac$, se puede usar para determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática del modo siguiente:

1. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones complejas no reales.

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.

3. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales desiguales.

Si x_1 y x_2 son raíces de una ecuación cuadrática, entonces existen las siguientes relaciones.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad (x_1)(x_2) = \frac{c}{a}$$

Estas **relaciones de sumas de raíces** y **producto de raíces** se pueden usar para comprobar soluciones potenciales de ecuaciones cuadráticas.

(6.5) Para revisar las fortalezas y debilidades de los tres métodos básicos para resolver una ecuación cuadrática (factorizar, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática), regrese sobre los ejemplos en esta sección.

Tenga en mente las siguientes sugerencias mientras resuelve problemas verbales.

1. Lea cuidadosamente el problema.

2. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda ayudarle a organizar y analizar el problema.

3. Elija una variable significativa.

4. Busque una guía que se pueda usar para establecer una ecuación.

5. Forme una ecuación que traduzca la guía del español al álgebra.

6. Resuelva la ecuación y use las soluciones para determinar todos los hechos solicitados en el problema.

7. Compruebe todas las respuestas en el enunciado original del problema.

(6.6) La recta numérica, junto con **números críticos** y **números de prueba** proporcionan una buena base para resolver **desigualdades cuadráticas**, donde el polinomio sea factorizable. Este mismo método básico se puede usar para resolver desigualdades, tales como $\frac{3x + 1}{x - 4} > 0$, que indica cocientes.

Capítulo 6 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-8 realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en la forma estándar de un número complejo.

1. $(-7 + 3i) + (9 - 5i)$

2. $(4 - 10i) - (7 - 9i)$

3. $5i(3 - 6i)$

4. $(5 - 7i)(6 + 8i)$

5. $(-2 - 3i)(4 - 8i)$

6. $(4 - 3i)(4 + 3i)$

7. $\frac{4 + 3i}{6 - 2i}$

8. $\frac{-1 - i}{-2 + 5i}$

Para los problemas 9-12 encuentre el discriminante de cada ecuación y determine si la ecuación tiene (1) dos soluciones complejas no reales, (2) una solución real con una multiplicidad de dos, o (3) dos soluciones reales. No resuelva las ecuaciones.

9. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

10. $5x^2 - 7x + 31 = 0$

11. $7x^2 - 2x - 14 = 0$

12. $5x^2 - 2x = 4$

Para los problemas 13-31 resuelva cada ecuación.

13. $x^2 - 17x = 0$

14. $(x - 2)^2 = 36$

15. $(2x - 1)^2 = -64$

16. $x^2 - 4x - 21 = 0$

17. $x^2 + 2x - 9 = 0$

18. $x^2 - 6x = -34$

19. $4\sqrt{x} = x - 5$

20. $3n^2 + 10n - 8 = 0$

21. $n^2 - 10n = 200$

22. $3a^2 + a - 5 = 0$

23. $x^2 - x + 3 = 0$

24. $2x^2 - 5x + 6 = 0$

25. $2a^2 + 4a - 5 = 0$

26. $t(t + 5) = 36$

27. $x^2 + 4x + 9 = 0$

28. $(x - 4)(x - 2) = 80$

29. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x + 3} = 1$

30. $2x^4 - 23x^2 + 56 = 0$

31. $\frac{3}{n - 2} = \frac{n + 5}{4}$

Para los problemas 32-35 resuelva cada desigualdad e indique el conjunto solución sobre una recta numérica.

32. $x^2 + 3x - 10 > 0$

33. $2x^2 + x - 21 \leq 0$

34. $\frac{x - 4}{x + 6} \geq 0$

35. $\frac{2x - 1}{x + 1} > 4$

Para los problemas 36-43 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

36. Encuentre dos números cuya suma es 6 y cuyo producto es 2.

37. Sherry compró algunas acciones por $250. Seis meses después el valor de las acciones aumentó $5 por acción y las vendió, menos 5, y volvió a ganar su inversión original más un rendimiento de $50. ¿Cuántas acciones vendió y a qué precio por acción?

38. Andre recorrió 270 millas una hora más del tiempo que le tomó a Sandy recorrer 260 millas. Sandy condujo 7 millas por hora más rápido que Andre. ¿Cuán rápido viajó cada uno?

39. El área de un cuadrado es numéricamente igual al doble de su perímetro. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

40. Encuentre dos números enteros positivos pares consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 164.

41. El perímetro de un rectángulo es de 38 pulgadas, y su área es de 84 pulgadas cuadradas. Encuentre la longitud y el ancho del rectángulo.

42. A Billy le toma 2 horas más hacer cierto trabajo del que le toma a Reena. Ambos trabajan juntos durante 2 horas; luego Reena se retira y Billy termina el trabajo en una hora. ¿Cuánto le tomaría a cada uno realizar el trabajo?

43. Una compañía tiene un estacionamiento rectangular de 40 metros de ancho y 60 metros de largo. La compañía planea aumentar el área del estacionamiento a 1100 metros cuadrados al sumar una tira de igual ancho a un lado y a un extremo. Encuentre el ancho de la tira a añadir.

Capítulo 6 Examen

1. Encuentre el producto $(3 - 4i)(5 + 6i)$ y exprese el resultado en la forma estándar de un número complejo.

2. Encuentre el cociente $\frac{2 - 3i}{3 + 4i}$ y exprese el resultado en la forma estándar de un número complejo.

Para los problemas 3-15 resuelva cada ecuación.

3. $x^2 = 7x$
4. $(x - 3)^2 = 16$
5. $x^2 + 3x - 18 = 0$
6. $x^2 - 2x - 1 = 0$
7. $5x^2 - 2x + 1 = 0$
8. $x^2 + 30x = -224$
9. $(3x - 1)^2 + 36 = 0$
10. $(5x - 6)(4x + 7) = 0$
11. $(2x + 1)(3x - 2) = 55$
12. $n(3n - 2) = 40$
13. $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$
14. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x + 1} = 4$
15. $3x^2 - 2x - 3 = 0$

16. La ecuación $4x^2 + 20x + 25 = 0$ ¿tiene (a) dos soluciones complejas no reales, (b) dos soluciones reales iguales o (c) dos soluciones reales distintas?

17. La ecuación $4x^2 - 3x = -5$ ¿tiene (a) dos soluciones complejas no reales, (b) dos soluciones reales iguales o (c) dos soluciones reales distintas?

Para los problemas 18-20 resuelva cada desigualdad y exprese el conjunto solución usando notación de intervalo.

18. $x^2 - 3x - 54 \leq 0$
19. $\frac{3x - 1}{x + 2} > 0$
20. $\frac{x - 2}{x + 6} \geq 3$

Para los problemas 21-25 establezca una ecuación y resuelva cada problema.

21. Una escalera de 24 pies se recarga contra un edificio y forma un ángulo de 60º con el suelo. ¿Cuán alto sobre el edificio llega la parte superior de la escalera? Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

22. Un lote de terreno rectangular mide 16 por 24 metros. Encuentre, al metro más cercano, la distancia desde una esquina del lote a la esquina diagonalmente opuesta.

23. Dana compró algunas acciones por un total de \$3000. Tres meses después las acciones aumentaron su valor por \$5 cada una y las vendió, menos 50, y recuperó su inversión original de \$3000. ¿Cuántas acciones vendió?

24. El perímetro de un rectángulo tiene 41 pulgadas y su área es de 91 pulgadas cuadradas. Encuentre la longitud de su lado más corto.

25. La suma de dos números es 6 y su producto es 4. Encuentre el más grande de los dos números.

Para los problemas 1-5 evalúe cada expresión algebraica

Capítulo 1-6 Conjunto de problemas de repaso acumulados

para los valores dados de las variables.

1. $\dfrac{4a^2b^3}{12a^3b}$ para $a = 5$ y $b = -8$

2. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$ para $x = 4$ y $y = 7$

3. $\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{2n}-\dfrac{4}{3n}$ para $n = 25$

4. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}$ para $x = \dfrac{1}{2}$

5. $2\sqrt{2x+y}-5\sqrt{3x-y}$ para $x = 5$ y $y = 6$

Para los problemas 6-17 realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma simplificada.

6. $(3a^2b)(-2ab)(4ab^3)$

7. $(x+3)(2x^2-x-4)$

8. $\dfrac{6xy^2}{14y}\cdot\dfrac{7x^2y}{8x}$

9. $\dfrac{a^2+6a-40}{a^2-4a}\div\dfrac{2a^2+19a-10}{a^3+a^2}$

10. $\dfrac{3x+4}{6}-\dfrac{5x-1}{9}$

11. $\dfrac{4}{x^2+3x}+\dfrac{5}{x}$

12. $\dfrac{3n^2+n}{n^2+10n+16}\cdot\dfrac{2n^2-8}{3n^3-5n^2-2n}$

13. $\dfrac{3}{5x^2+3x-2}-\dfrac{2}{5x^2-22x+8}$

14. $\dfrac{y^3-7y^2+16y-12}{y-2}$

15. $(4x^3-17x^2+7x+10)\div(4x-5)$

16. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(5\sqrt{2}-\sqrt{5})$

17. $(\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+4\sqrt{y})$

Para los problemas 18-25 evalúe cada una de las expresiones numéricas.

18. $-\sqrt{\dfrac{9}{64}}$

19. $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$

20. $\sqrt[3]{0.008}$

21. $32^{-\frac{1}{5}}$

22. $3^0+3^{-1}+3^{-2}$

23. $-9^{\frac{3}{2}}$

24. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$

25. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}}$

Para los problemas 26-31 factorice completamente cada una de las expresiones algebraicas.

26. $3x^4+81x$

27. $6x^2+19x-20$

28. $12+13x-14x^2$

29. $9x^4+68x^2-32$

30. $2ax-ay-2bx+by$

31. $27x^3-8y^3$

Para los problemas 32-55 resuelva cada una de las ecuaciones.

32. $3(x-2)-2(3x+5)=4(x-1)$

33. $0.06n+0.08(n+50)=25$

34. $4\sqrt{x}+5=x$

35. $\sqrt[3]{n^2-1}=-1$

36. $6x^2-24=0$

37. $a^2+14a+49=0$

38. $3n^2+14n-24=0$

39. $\dfrac{2}{5x-2}=\dfrac{4}{6x+1}$

40. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}=0$

41. $5x-4=\sqrt{5x-4}$

42. $|3x-1|=11$

43. $(3x-2)(4x-1)=0$

44. $(2x + 1)(x - 2) = 7$

45. $\frac{5}{6x} - \frac{2}{3} = \frac{7}{10x}$

46. $\frac{3}{y + 4} + \frac{2y - 1}{y^2 - 16} = \frac{-2}{y - 4}$

47. $6x^4 - 23x^2 - 4 = 0$

48. $3n^3 + 3n = 0$

49. $n^2 - 13n - 114 = 0$

50. $12x^2 + x - 6 = 0$

51. $x^2 - 2x + 26 = 0$

52. $(x + 2)(x - 6) = -15$

53. $(3x - 1)(x + 4) = 0$

54. $x^2 + 4x + 20 = 0$

55. $2x^2 - x - 4 = 0$

Para los problemas 56-65 resuelva cada desigualdad y exprese el conjunto solución usando notación de intervalo.

56. $6 - 2x \geq 10$

57. $4(2x - 1) < 3(x + 5)$

58. $\frac{n + 1}{4} + \frac{n - 2}{12} > \frac{1}{6}$

59. $|2x - 1| < 5$

60. $|3x + 2| > 11$

61. $\frac{1}{2}(3x - 1) - \frac{2}{3}(x + 4) \leq \frac{3}{4}(x - 1)$

62. $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

63. $3x^2 + 14x - 5 > 0$

64. $\frac{x + 2}{x - 7} \geq 0$

65. $\frac{2x - 1}{x + 3} < 1$

Para los problemas 66-74 resuelva cada problema al establecer y resolver una ecuación adecuada.

66. ¿Cuántos litros de una solución de ácido al 60% se deben agregar a 14 litros de una solución de ácido al 10% para producir una solución de ácido al 25%?

67. Una suma de $2250 se dividirá entre dos personas en la razón de 2 a 3. ¿Cuánto recibe cada persona?

68. La longitud de una imagen sin borde es 7 pulgadas menos que el doble de su ancho. Si el borde tiene 1 pulgada de ancho y su área es de 62 pulgadas cuadradas, ¿cuáles son las dimensiones de la imagen sola?

69. Al trabajar juntos, Lolita y Doug pueden pintar un cobertizo en 3 horas y 20 minutos. Si Doug puede pintar el cobertizo en 10 horas, ¿cuánto le tomará a Lolita pintar el cobertizo ella sola?

70. Angie compró algunas bolas de golf por $14. Si cada bola hubiera costado $0.25 menos, ella habría comprado una bola más por la misma cantidad de dinero. ¿Cuántas bolas de golf compró Angie?

71. Un corredor, quien puede correr una milla en 8 minutos, parte media milla adelante de un corredor que puede correr una milla en 6 minutos. ¿Cuánto tardará el corredor más rápido en alcanzar al corredor más lento?

72. Supón que $100 se invierten a cierta tasa de interés compuesto anualmente durante 2 años. Si el valor acumulado al final de 2 años es $114.49, encuentre la tasa de interés.

73. Una habitación contiene 120 sillas ordenadas en filas. El número de sillas por fila es una menos que el doble del número de filas. Encuentre el número de sillas por fila.

74. Bjorn compró algunas acciones por $2800. Un mes después el valor de las acciones aumentó $6 por acción y las vendió, menos 60, y recuperó su inversión original de $2800. ¿Cuántas acciones vendió?

7

Ecuaciones lineales y desigualdades con dos variables

René Descartes, filósofo y matemático, desarrolló un sistema para localizar un punto sobre un plano. Este sistema es la actual retícula de coordenadas rectangulares que se usa para graficar; se llama sistema de coordenadas cartesianas.

René Descartes, matemático francés del siglo XVII, trasladó los problemas geométricos a un escenario algebraico de modo que pudiera usar las herramientas del álgebra para resolver dichos problemas. Esta conexión de las ideas algebraicas y geométricas es la base de la **geometría analítica**, en la actualidad más comúnmente llamada **geometría coordenada**. Básicamente, existen dos tipos de problemas en geometría coordenada: dada una ecuación algebraica, encontrar su gráfica geométrica, y dado un conjunto de condiciones que pertenecen a una gráfica geométrica, encontrar su ecuación algebraica. En este capítulo se estudian problemas de ambos tipos.

7.1 Sistema de coordenadas rectangulares y ecuaciones lineales

Considere dos rectas numéricas, una vertical y una horizontal, mutuamente perpendiculares en el punto asociado con cero sobre ambas rectas (figura 7.1). A estas rectas numéricas se les conoce como **ejes horizontal y vertical** o, en conjunto, como **ejes coordenados**. Ellos parten el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se numeran contra las manecillas del reloj de I a IV, como se indica en la figura 7.1. El punto de intersección de los dos ejes se llama **origen**.

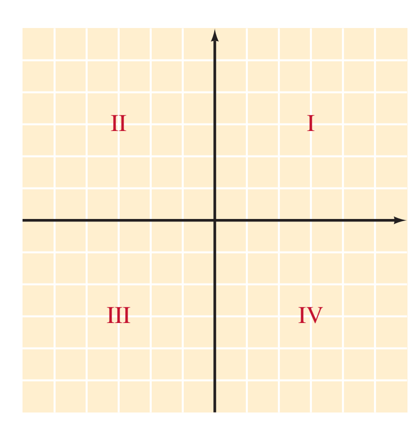


Figura 7.1

Ahora es posible establecer una correspondencia uno a uno entre **pares ordenados** de números reales y los puntos en un plano. A cada par ordenado de números reales corresponde un punto único en el plano, y a cada punto en el plano corresponde un par ordenado único de números reales. Una parte de esta correspondencia se ilustra en la figura 7.2. El par ordenado (3, 2) significa que el punto *A*

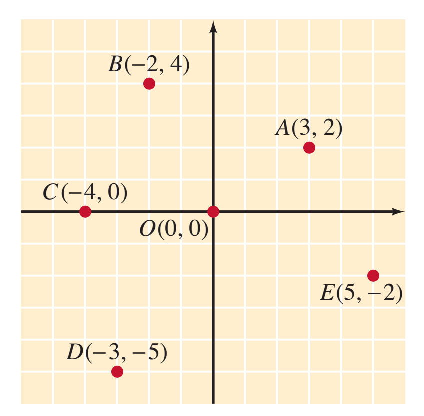


Figura 7.2

se ubica tres unidades a la derecha y dos unidades arriba del origen. (El par ordenado (0, 0) se asocia con el origen O.) El par ordenado $(-3, -5)$ significa que el punto D se ubica tres unidades a la izquierda y cinco unidades abajo del origen.

Observaciones: La notación $(-2, 4)$ se usó anteriormente en este texto para indicar un intervalo de la recta numérica real. Ahora se usa la misma notación para indicar un par ordenado de números reales. Este doble significado no se debe confundir porque el contexto del material siempre indicará cuál significado de la notación se usa. A lo largo de este capítulo se usará la interpretación del par ordenado.

En general, a los números reales a y b en un par ordenado (a, b) asociados con un punto, se les conoce como las **coordenadas del punto**. El primer número, a, llamado **abscisa**, es la distancia dirigida del punto desde el eje vertical medida paralela al eje horizontal. El segundo número, b, llamado **ordenada**, es la distancia dirigida del punto desde el eje horizontal medida paralela al eje vertical (figura 7.3a). Por ende, en el primer cuadrante, todos los puntos tienen una abscisa positiva y una ordenada positiva. En el segundo cuadrante, todos los puntos tienen una abscisa negativa y una ordenada positiva. Las situaciones del signo para los cuatro cuadrantes se indican en la figura 7.3(b). Este sistema de asociar puntos en un plano con pares de números reales se llama **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**.

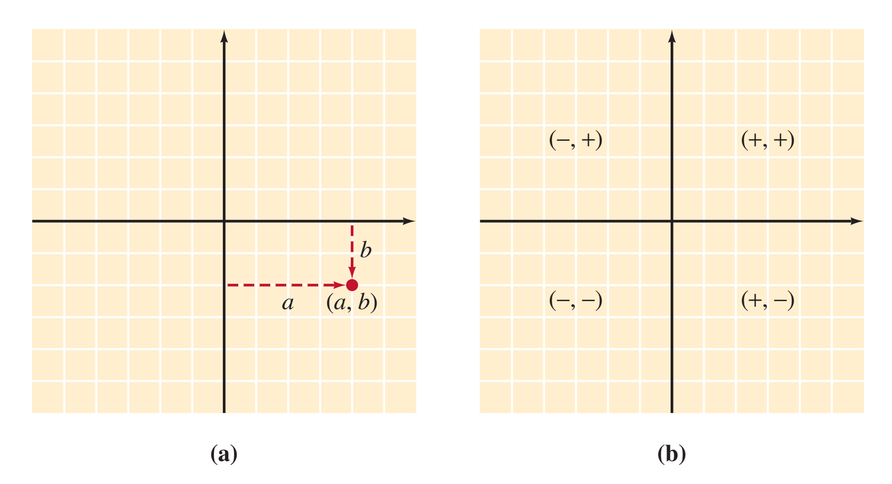


Figura 7.3

Históricamente, el sistema de coordenadas rectangulares proporciona la base para el desarrollo de la rama de las matemáticas llamada **geometría analítica**, o lo que en la actualidad se le conoce como **geometría coordenada**. Con esta disciplina, René Descartes, matemático francés del siglo XVII, trasladó los problemas geométricos a un escenario algebraico y usó las herramientas del álgebra para resolver tales problemas. Básicamente, existen dos tipos de problemas a resolver en geometría coordenada:

1. Dada una ecuación algebraica, encontrar su gráfica geométrica.
2. Dado un conjunto de condiciones que pertenecen a una figura geométrica, encontrar su ecuación algebraica.

En este capítulo se estudiarán problemas de ambos tipos. Comience por considerar las soluciones para la ecuación $y = x + 2$. Una **solución** de una ecuación con dos variables es un par ordenado de números reales que satisfacen la ecuación. Cuando se usan las variables x y y, por convención, el primer número de un par ordenado es un valor de x, y el segundo número es un valor de y. Se ve que (1, 3) es una solución para $y = x + 2$ porque si x se sustituye con 1 y y con 3, se obtiene el verdadero enunciado numérico $3 = 1 + 2$. Del mismo modo, $(-2, 0)$ es una solución porque $0 = -2 + 2$ es un enunciado verdadero. Se pueden encontrar infinitos pares de números reales que satisfagan $y = x + 2$, al elegir de manera arbitraria valores para x, y por cada valor de x que se elija, se puede determinar un valor correspondiente para y. Use una tabla para registrar algunas de las soluciones para $y = x + 2$.

Elija x	Determine y a partir de $y = x + 2$	Soluciones para $y = x + 2$
0	2	(0, 2)
1	3	(1, 3)
3	5	(3, 5)
5	7	(5, 7)
−2	0	(−2, 0)
−4	−2	(−4, −2)
−6	−4	(−6, −4)

Los pares ordenados se pueden graficar como puntos en un plano coordenado y usar el eje horizontal como el eje x y el eje vertical como el eje y, como en la figura 7.4 (a). La línea recta marcada con puntos en la figura 7.4 (b) se llama **gráfica de la ecuación** $y = x + 2$.

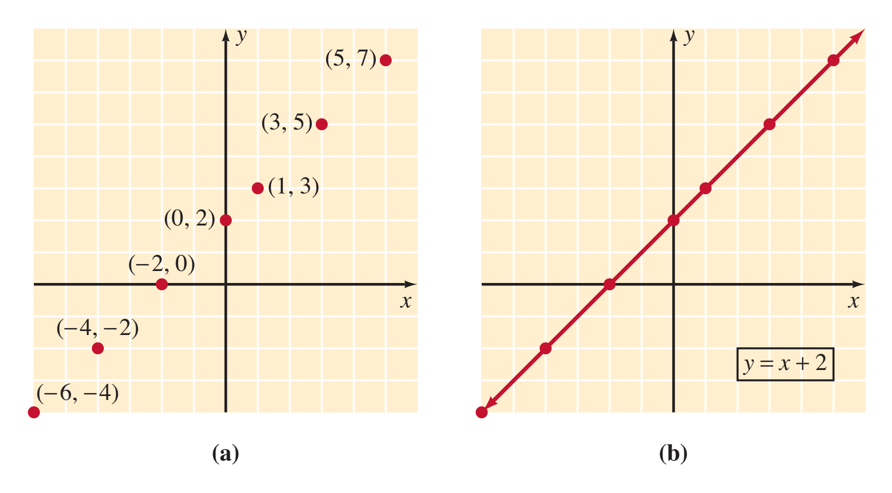


Figura 7.4

Observaciones: Es importante reconocer que todos los puntos sobre el eje x tienen pares ordenados de la forma $(a, 0)$ asociados con ellos. Esto es, el segundo número en el par ordenado es 0. Del mismo modo, todos los puntos sobre el eje y tienen pares ordenados de la forma $(0, b)$ asociados con ellos.

E J E M P L O 1

Grafique $2x + 3y = 6$

Solución

Primero encuentre los puntos de esta gráfica que caen sobre los ejes coordenados. Sea $x = 0$; entonces

$$2(0) + 3y = 6$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

Por tanto $(0, 2)$ es una solución y localiza un punto de la gráfica sobre el eje y. Sea $y = 0$; entonces

$$2x + 3(0) = 6$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Por tanto $(3, 0)$ es una solución y localiza un punto de la gráfica sobre el eje x.

Segundo, cambie la forma de la ecuación para facilitar la búsqueda de algunas soluciones adicionales. Puede resolver para x en términos de y, o resolver para y en términos de x. Resuelva para y en términos de x.

$$2x + 3y = 6$$
$$3y = 6 - 2x$$
$$y = \frac{6 - 2x}{3}$$

Tercero, puede formar una tabla de valores que incluya los dos puntos que encontró.

x	y
0	2
3	0
6	−2
−3	4
−6	6

Al graficar estos puntos se ve que yacen en una línea recta, y se obtiene la figura 7.5.

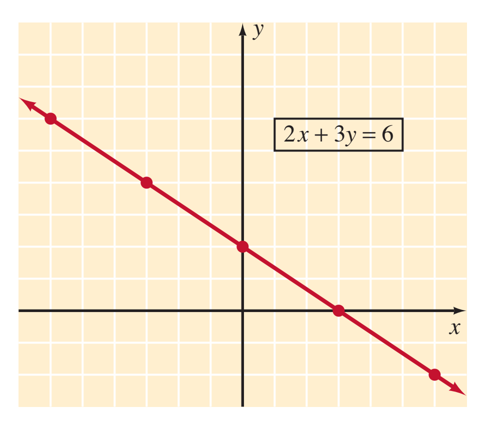


Figura 7.5 ■

Observaciones: Revise nuevamente la tabla de valores del ejemplo 1. Note que los valores de x se eligieron de modo que para y se obtuvieron enteros. Esto no es necesario, pero sí hace más sencillos los cálculos.

Los puntos (3, 0) y (0, 2) en la figura 7.5 son puntos especiales. Son los puntos de la gráfica que están sobre los ejes coordenados. Esto es: producen la intersección x y la intersección y de la gráfica. A continuación se definen las *intersecciones con los ejes* de una gráfica.

Las coordenadas x de los puntos que una gráfica tiene en común con el eje x se llaman **intersecciones *x*** (abscisa al origen) de la gráfica. (Para calcular las intersecciones x, sea $y = 0$ y resuelva para x.)

Las coordenadas y de los puntos que una gráfica tiene en común con el eje y se llaman **intersecciones *y*** (ordenada al origen) de la gráfica. (Para calcular las intersecciones y, sea $x = 0$ y resuelva para y.)

Reconocer el tipo de gráfica que produce cierto tipo de ecuación tiene sus ventajas. Por ejemplo, si reconoce que la gráfica de $3x + 2y = 12$ es una línea recta, entonces es un asunto más simple encontrar dos puntos y bosquejar la línea. Prosiga con la graficación de líneas rectas con un poco más de detalle.

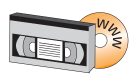
En general, cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son constantes (A y B no son cero) y x y y son variables, es una **ecuación lineal**, y su gráfica es una línea recta. Se deben hacer dos aclaraciones acerca de esta des-

cripción de una ecuación lineal. Primero, la elección de x y y como variables es arbitraria. Podría usar cualquier par de letras para representar las variables. Por ejemplo, una ecuación como $3r + 2s = 9$ se puede considerar como ecuación lineal con dos variables. Sin embargo, dado que no se cambia constantemente el etiquetado de los ejes coordenados cuando se grafican ecuaciones, es mucho más fácil de usar las mismas dos variables en todas las ecuaciones. Por tanto, se continuará con la convención y se usarán x y y como variables. Segundo, la frase "cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$" técnicamente significa "cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$ o equivalente a dicha forma". Por ejemplo, la ecuación $y = 2x - 1$ es equivalente a $-2x + y = -1$ y por ende es lineal y produce una gráfica en línea recta.

El conocimiento de que cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$ produce una gráfica en línea recta, junto con el hecho de que dos puntos determinan una línea recta, hace que la graficación de ecuaciones lineales sea un proceso sencillo. Simplemente se encuentran dos soluciones (como las intersecciones con los ejes), se grafican los puntos correspondientes y se conectan los puntos con una línea recta. Por lo general, es aconsejable encontrar un tercer punto que sirva de comprobación. Considere un ejemplo.

EJEMPLO 2

Grafique $3x - 2y = 12$



Solución

Primero encuentre las intersecciones con los ejes. Sea $x = 0$; entonces

$$\begin{aligned} 3(0) - 2y &= 12 \\ -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

En consecuencia $(0, -6)$ es una solución. Sea $y = 0$; entonces

$$\begin{aligned} 3x - 2(0) &= 12 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto $(4, 0)$ es una solución. Ahora encuentre un tercer punto que sirva de comprobación. Sea $x = 2$; entonces

$$\begin{aligned} 3(2) - 2y &= 12 \\ 6 - 2y &= 12 \\ -2y &= 6 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Por tanto $(2, -3)$ es una solución. Grafique los puntos asociados con estas tres soluciones y conéctelos con una línea recta para producir la gráfica de $3x - 2y = 12$ en la figura 7.6.

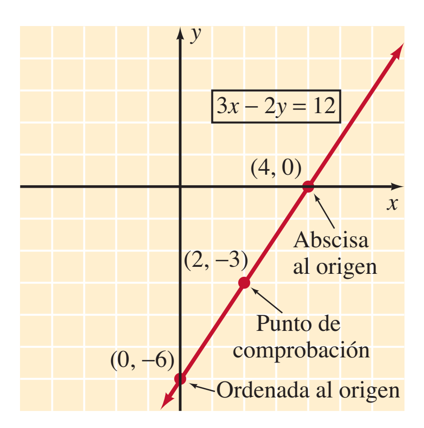


Figura 7.6 ■

Revise el método al ejemplo 2. Note que no se resolvió la ecuación para y en términos de x o para x en términos de y. Puesto que se sabe que la gráfica es una línea recta, no hay necesidad de una tabla extensa de valores; por tanto, no hay necesidad de cambiar la forma de la ecuación original. Más aún, la solución $(2, -3)$ sirvió como punto de comprobación. De no haber estado sobre la recta determinada por las dos intersecciones, entonces sabría que cometió un error.

EJEMPLO 3

Grafique $2x + 3y = 7$

Solución

Sin mostrar toda la elaboración, la siguiente tabla indica las intersecciones con los ejes y un punto de comprobación.

x	y	
0	$\frac{7}{3}$	
$\frac{7}{2}$	0	Intersecciones con los ejes
2	1	Punto de comprobación

Los puntos de la tabla se grafican y la gráfica de $2x + 3y = 7$ se muestra en la figura 7.7.

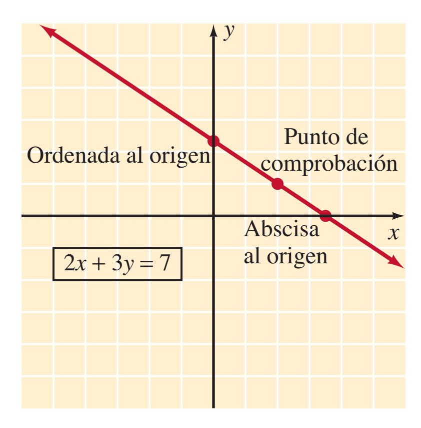


Figura 7.7

Es útil reconocer algunas líneas rectas *especiales*. Por ejemplo, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde $C = 0$ (el término constante es cero), es una línea recta que contiene el origen. Considere un ejemplo.

EJEMPLO 4

Grafique $y = 2x$

Solución

Obviamente (0, 0) es una solución. (Note también que $y = 2x$ es equivalente a $-2x + y = 0$; por tanto, encaja en la condición $Ax + By = C$, donde $C = 0$.) Puesto que tanto la abscisa al origen como la ordenada al origen están determinadas por el punto (0, 0), es necesario otro punto para determinar la recta. Entonces se encontraría un tercer punto que sirviera de comprobación. La gráfica de $y = 2x$ se muestra en la figura 7.8.

x	y	
0	0	Intersecciones con los ejes
2	4	Punto adicional
−1	−2	Punto de comprobación

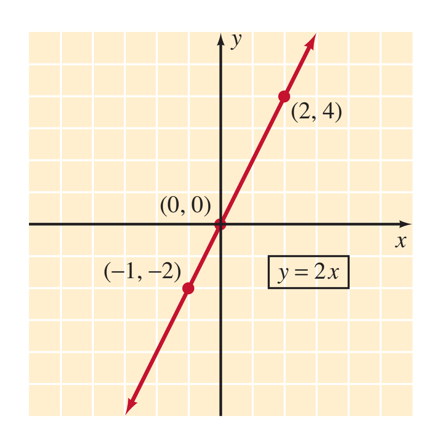
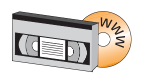


Figura 7.8

EJEMPLO 5

Grafique $x = 2$



Solución

Puesto que se consideran ecuaciones lineales de *dos variables*, la ecuación $x = 2$ es equivalente a $x + 0(y) = 2$. Ahora puede ver que cualquier valor de y se puede usar, pero el valor x siempre debe ser 2. Por tanto, algunas de las soluciones son (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, −1) y (2, −2). La gráfica de todas las soluciones de $x = 2$ es la recta vertical en la figura 7.9.

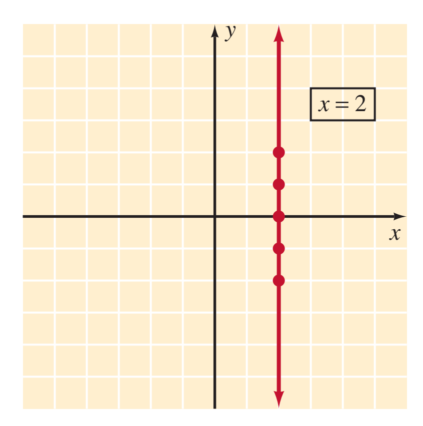
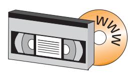


Figura 7.9

■

EJEMPLO 6

Grafique $y = -3$



Solución

La ecuación $y = -3$ es equivalente a $0(x) + y = -3$. Por tanto, cualquier valor de x se puede usar, pero el valor de y debe ser −3. Algunas soluciones son (0, −3) (1, −3), (2, −3) (−1, −3) y (−2, −3). La gráfica de $y = -3$ es la recta horizontal en la figura 7.10.

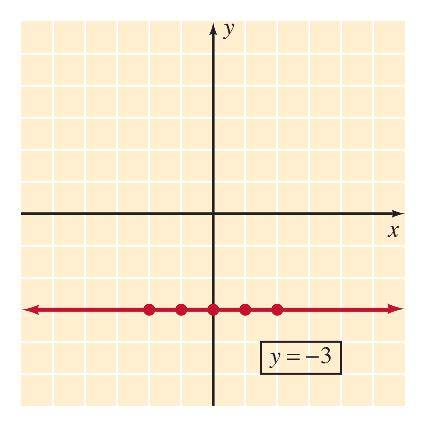


Figura 7.10

■

En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde $A = 0$ o $B = 0$ (no ambas), es una recta paralela a uno de los ejes. De manera más específica, cualquier ecuación de la forma $x = a$, donde a es una constante, es una recta paralela al eje y que tiene una abscisa al origen de a. Cualquier ecuación de la forma $y = b$, donde b es una constante, es una recta paralela al eje x que tiene una ordenada al origen de b.

Relaciones lineales

Existen algunas aplicaciones de las relaciones lineales. Por ejemplo, suponga que un minorista tiene algunos artículos que quiere vender con una ganancia de 30% sobre el costo de cada artículo. Si con s se representa el precio de venta y c el costo de cada artículo, entonces se puede usar la ecuación

$$s = c + 0.3c = 1.3c$$

para determinar el precio de venta de cada artículo con base en el costo del artículo. En otras palabras, si el costo de un artículo es \$4.50, entonces se debe vender por $s = (1.3)(4.5) = \$5.85$.

La ecuación $s = 1.3c$ se puede usar para determinar la siguiente tabla de valores. Al leer la tabla se ve que, si el costo de un artículo es \$15, entonces se debe vender por \$19.50 para producir una ganancia de 30% del costo. Más aún, puesto que es una relación lineal, se pueden obtener valores exactos entre valores dados en la tabla.

c	1	5	10	15	20
s	1.3	6.5	13	19.5	26

Por ejemplo, un valor c de 12.5 está a la mitad entre los valores c de 10 y 15, de modo que el valor s correspondiente está a la mitad entre los valores s de 13 y 19.5. En consecuencia, un valor c de 12.5 produce un valor s de

$$s = 13 + \frac{1}{2}(19.5 - 13) = 16.25$$

Por ende, si el costo de un artículo es \$12.50, se debe vender por \$16.25.

Ahora grafique esta relación lineal. Puede marcar el eje horizontal c, marcar el eje vertical s y usar el origen junto con un par ordenado de la tabla para producir la gráfica de línea recta en la figura 7.11. (Debido al tipo de aplicación, sólo se usan valores no negativos para c y s.)

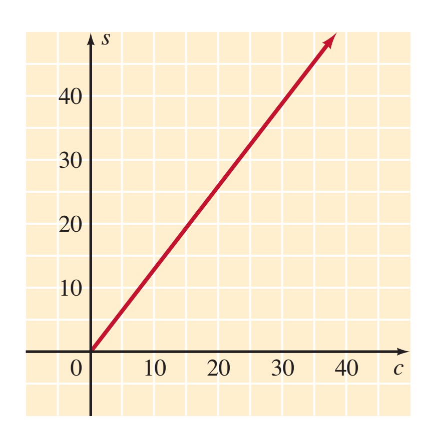


Figura 7.11

A partir de la gráfica se pueden aproximar valores s con base en los valores c dados. Por ejemplo, si $c = 30$, entonces, al leer desde 30 sobre el eje c hasta la línea y luego a través del eje s, se ve que s es un poco menos que 40. (Al usar la ecuación $s = 1.3c$ se obtiene un valor s exacto de 39.)

Muchas fórmulas que se usan en varias aplicaciones son ecuaciones lineales con dos variables. Por ejemplo, la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, que se usa para convertir temperaturas de la escala Fahrenheit a la escala Celsius, es una relación lineal. Al usar esta ecuación, se puede determinar que 14ºF es equivalente a $C = \frac{5}{9}(14 - 32) = \frac{5}{9}(-18) = -10°C$. Use la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para completar la siguiente tabla.

F	−22	−13	5	32	50	68	86
C	−30	−25	−15	0	10	20	30

Al leer la tabla se ve, por ejemplo, que −13ºF = −25ºC y 68ºF = 20ºC.

Para graficar la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ puede marcar el eje horizontal F, marcar el eje vertical C y graficar dos pares ordenados (F, C) de la tabla. La figura 7.12 muestra la gráfica de la ecuación.

A partir de la gráfica se pueden aproximar valores C sobre la base de valores F dados. Por ejemplo, si F = 80º, entonces, al leer desde 80 en el eje F hasta la línea y luego a través del eje C, se ve que C es aproximadamente 25º. Del mismo modo se pueden obtener valores F aproximados sobre la base de valores C dados. Por ejemplo, si C = −25º, entonces al leer a través desde −25 sobre el eje C hasta la línea y luego arriba hacia el eje F, se ve que F es aproximadamente −15º.

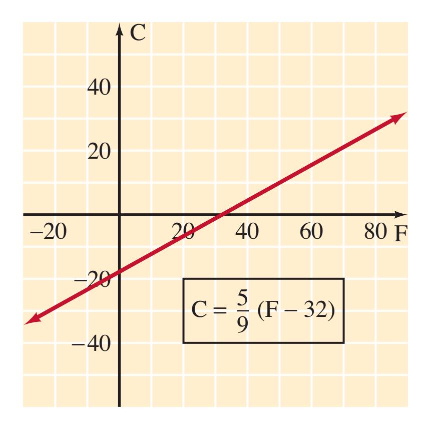


Figura 7.12

Herramientas de graficación

El término **herramienta de graficación** se usa en la literatura actual para referirse a una calculadora graficadora (vea la figura 7.13) o a una computadora con un paquete de software de graficación. (Frecuentemente se usará la frase *use una calculadora graficadora* para dar a entender "use una calculadora graficadora o una computadora con el software adecuado".)

Estos dispositivos tienen una gran gama de capacidades que permiten al usuario no sólo obtener un rápido bosquejo de una gráfica, sino también estudiar varias características de la misma, tales como las abscisas al origen, las ordenadas al origen y los puntos de retorno de una curva. Algunas de estas características de las herramientas de graficación se introducirán conforme se necesiten en el texto. Puesto que existen tantos tipos diferentes de herramientas de graficación disponibles, se usará principalmente terminología genérica y deberá consultar su manual de usuario para instrucciones de digitación específicas. Es importante que estudie los ejemplos de herramienta de graficación en este texto incluso si no tiene acceso a una calculadora graficadora o a una computadora. Los ejemplos se eligieron para reforzar los conceptos bajo discusión.

Cortesía de Texas Instruments

Figura 7.13

EJEMPLO 7

Utilice una herramienta graficadora para obtener una gráfica de la línea $2.1x + 5.3y = 7.9$

Solución

Primero resuelva la ecuación para y en términos de x.

$$\begin{aligned} 2.1x + 5.3y &= 7.9 \\ 5.3y &= 7.9 - 2.1x \\ y &= \frac{7.9 - 2.1x}{5.3} \end{aligned}$$

Ahora puede ingresar la expresión $\frac{7.9 - 2.1x}{5.3}$ para Y_1 y obtener la gráfica como se muestra en la figura 7.14.

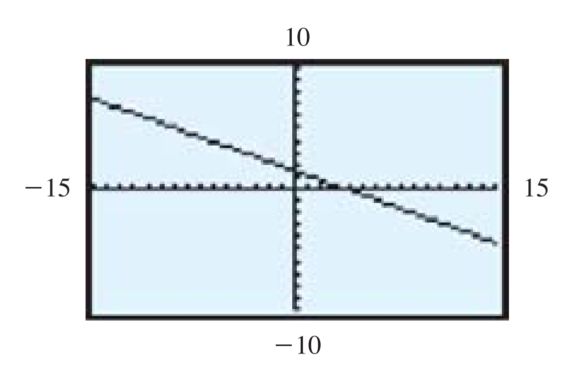


Figura 7.14

Conjunto de problemas 7.1

Para los problemas 1-33 grafique cada una de las ecuaciones lineales.

1. $x + 2y = 4$
2. $2x + y = 6$
3. $2x - y = 2$
4. $3x - y = 3$
5. $3x + 2y = 6$
6. $2x + 3y = 6$
7. $5x - 4y = 20$
8. $4x - 3y = -12$
9. $x + 4y = -6$
10. $5x + y = -2$
11. $-x - 2y = 3$
12. $-3x - 2y = 12$
13. $y = x + 3$
14. $y = x - 1$
15. $y = -2x - 1$
16. $y = 4x + 3$
17. $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$
18. $y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$
19. $y = -x$
20. $y = x$
21. $y = 3x$
22. $y = -4x$
23. $x = 2y - 1$
24. $x = -3y + 2$
25. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$
26. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
27. $2x - 3y = 0$
28. $3x + 4y = 0$
29. $x = 0$
30. $y = 0$
31. $y = 2$
32. $x = -3$
33. $-3y = -x + 3$

34. Suponga que la ganancia diaria de un puesto de helados está dada por la ecuación $p = 2n - 4$, donde n representa el número de galones de mezcla de helado que se usan en un día y p representa el número de dólares de ganancia. Marque el eje horizontal n y el eje vertical p, y grafique la ecuación $p = 2n - 4$ para valores no negativos de n.

35. El costo (c) de jugar un juego de computadora en línea durante un tiempo (t) en horas está dado por la ecuación $c = 3t + 5$. Marque el eje horizontal t y el eje vertical c, y grafique la ecuación para valores no negativos de t.

36. El área de una acera cuyo ancho es fijo en 3 pies puede darse por la ecuación $A = 3l$, donde A representa el área en pies cuadrados y l representa la longitud en pies. Marque el eje horizontal l y el eje vertical A, y grafique la ecuación $A = 3l$ para valores no negativos de l.

37. Una tienda de abarrotes en línea cobra por entrega con base en la ecuación $C = 0.30p$, donde C representa el costo en dólares y p representa el peso de las mercancías en libras. Marque el eje horizontal p y el eje verti-

cal C, y grafique la ecuación $C = 0.30p$ para valores no negativos de p.

38. (a) La ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$ se puede usar para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit. Complete la tabla siguiente.

C	0	5	10	15	20	−5	−10	−15	−20	−25
F										

(b) Grafique la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(c) Use su gráfica de la parte (b) para aproximar valores para F cuando C = 25º, 30º, −30º y −40º.

(d) Compruebe la precisión de sus lecturas en la gráfica de la parte (c), con el uso de la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

39. (a) Digital Solutions cobra por servicios de ayuda de acuerdo con la ecuación $c = 0.25m + 10$, donde c representa el costo en dólares y m representa los minutos de servicio. Complete la tabla siguiente.

m	5	10	15	20	30	60
c						

(b) Marque el eje horizontal m y el eje vertical c, y grafique la ecuación $c = 0.25m + 10$ para valores no negativos de m.

(c) Use la gráfica de la parte (b) para aproximar valores para c cuando $m = 25$, 40 y 45.

(d) Compruebe la precisión de sus lecturas en la gráfica de la parte (c), con el uso de la ecuación $c = 0.25m + 10$.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

40. ¿Cómo sabe que la gráfica $y = -3x$ es una línea recta que contiene el origen?

41. ¿Cómo sabe que las gráficas de $2x - 3y = 6$ y $-2x + 3y = -6$ son la misma recta?

42. ¿Cuál es la gráfica de la conjunción $x = 2$ y $y = 4$? ¿Cuál es la gráfica de la disyunción $x = 2$ o $y = 4$? Explique sus respuestas.

43. Su amigo afirma que la gráfica de la ecuación $x = 2$ es el punto (2, 0). ¿Cómo reacciona ante esta afirmación?

MÁS INVESTIGACIÓN

A partir del trabajo con valor absoluto, se sabe que $|x + y| = 1$ es equivalente a $x + y = 1$ o $x + y = -1$. Por tanto, la gráfica de $|x + y| = 1$ consiste de las dos rectas $x + y = 1$ y $x + y = -1$. Grafique cada una de las siguientes expresiones.

44. $|x + y| = 1$

45. $|x - y| = 4$

46. $|2x - y| = 4$

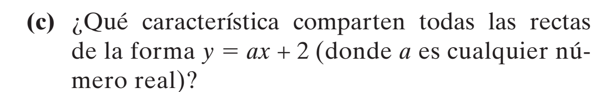
47. $|3x + 2y| = 6$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

Ésta es la primera de muchas apariciones de un grupo de problemas llamados “actividades con calculadora graficadora”. Estos problemas están específicamente diseñados para aquellos de ustedes que tengan acceso a una calculadora graficadora o a una computadora con un software adecuado. Dentro del marco conceptual de estos problemas se le dará la oportunidad de reforzar los conceptos estudiados en el texto, tenderá el terreno para conceptos que se introducirán más adelante en el texto, predecirá formas y ubicaciones de gráficas sobre la base de sus experiencias de graficación previas, resolverá problemas que son irracionales o acaso imposibles de resolver sin una herramienta de graficación y, en general, se familiarizará con las capacidades y limitaciones de su herramienta de graficación.

48. (a) Grafique $y = 3x + 4$, $y = 2x + 4$, $y = -4x + 4$ y $y = -2x + 4$ en el mismo conjunto de ejes.

(b) Grafique $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = 5x - 3$, $y = 0.1x - 3$ y $y = -7x - 3$ en el mismo conjunto de ejes.



(c) ¿Qué característica comparten todas las rectas de la forma $y = ax + 2$ (donde a es cualquier número real)?

49. **(a)** Grafique $y = 2x - 3$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 6$ y $y = 2x + 5$ en el mismo conjunto de ejes.

(b) Grafique $y = -3x + 1$, $y = -3x + 4$, $y = -3x - 2$ y $y = -3x - 5$ en el mismo conjunto de ejes.

(c) Grafique $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{2}x + 5$ y $y = \frac{1}{2}x - 2$ en el mismo conjunto de ejes.

(d) ¿Qué relación existe entre todas las rectas de la forma $y = 3x + b$, donde b es cualquier número real?

50. **(a)** Grafique $2x + 3y = 4$, $2x + 3y = -6$, $4x - 6y = 7$ y $8x + 12y = -1$ en el mismo conjunto de ejes.

(b) Grafique $5x - 2y = 4$, $5x - 2y = -3$, $10x - 4y = 3$ y $15x - 6y = 30$ en el mismo conjunto de ejes.

(c) Grafique $x + 4y = 8$, $2x + 8y = 3$, $x - 4y = 6$ y $3x + 12y = 10$ en el mismo conjunto de ejes.

(d) Grafique $3x - 4y = 6$, $3x + 4y = 10$, $6x - 8y = 20$ y $6x - 8y = 24$ en el mismo conjunto de ejes.

(e) Para cada uno de los siguientes pares de rectas (a) prediga si son rectas paralelas y (b) grafique cada par de rectas para comprobar su predicción.

(1) $5x - 2y = 10$ y $5x - 2y = -4$
(2) $x + y = 6$ y $x - y = 4$
(3) $2x + y = 8$ y $4x + 2y = 2$
(4) $y = 0.2x + 1$ y $y = 0.2x - 4$
(5) $3x - 2y = 4$ y $3x + 2y = 4$
(6) $4x - 3y = 8$ y $8x - 6y = 3$
(7) $2x - y = 10$ y $6x - 3y = 6$
(8) $x + 2y = 6$ y $3x - 6y = 6$

51. Ahora use una calculadora graficadora para obtener una gráfica de $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Al hacer $F = x$ y $C = y$, se obtiene la figura 7.15.

Ponga especial atención a las fronteras en x. Estos valores se eligieron de modo que la fracción

$$\frac{(\text{Máximo valor de } x) \text{ menos } (\text{Mínimo valor de } x)}{95}$$

sería igual a 1. La ventana de visualización de la calculadora graficadora que se usó para producir la figura 7.15 tiene 95 píxeles (puntos) de ancho. Por tanto, use 95 como el denominador de la fracción. Las fronteras de y se eligieron para garantizar que el cursor sería visible en la pantalla cuando se buscaran ciertos valores.

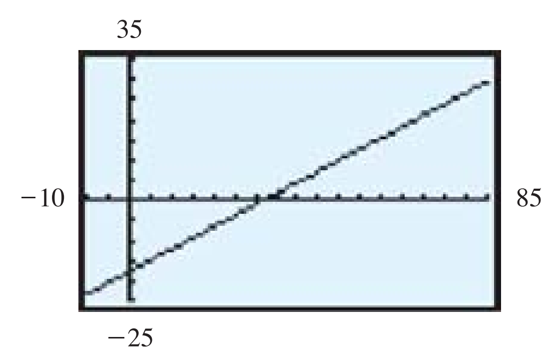


Figura 7.15

Ahora use la característica TRACE (trazar) de la calculadora graficadora para completar la siguiente tabla. Note que el cursor se mueve en incrementos de 1 mientras traza a lo largo de la gráfica.

F	−5	5	9	11	12	20	30	45	60
C									

(Esto se logró al igualar a 1 la fracción antes mencionada.) Al mover el cursor hacia cada uno de los valores F, puede completar la tabla del modo siguiente.

F	−5	5	9	11	12	20	30	45	60
C	−21	−15	−13	−12	−11	−7	−1	7	16

Los valores C se expresan al grado más cercano. Use su calculadora y compruebe los valores en la tabla, con el uso de la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

52. **(a)** Use su calculadora graficadora para graficar $F = \frac{9}{5}C + 32$ Asegúrese de establecer fronteras en el eje horizontal, de modo que, cuando use la característica de trazado, el cursor se moverá en incrementos de 1.

(b) Use la característica TRACE y compruebe sus respuestas para el inciso (a) del problema 38.

7.2 Graficación de ecuaciones no lineales

Las ecuaciones como $y = x^2 - 4$, $x = y^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x^2y = -2$ y $x = y^3$ son ejemplos de ecuaciones no lineales. Las gráficas de estas ecuaciones son figuras distintas a líneas rectas que se pueden determinar al graficar un número suficiente de puntos. Grafique los puntos y observe algunas características de estas gráficas que luego se pueden usar para complementar el proceso de graficación de puntos.

EJEMPLO 1

Grafique $y = x^2 - 4$

Solución

Comience por encontrar las intersecciones con los ejes. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 - 4 = -4$$

El punto $(0, -4)$ está sobre la gráfica. Si $y = 0$, entonces

$$0 = x^2 - 4$$
$$0 = (x + 2)(x - 2)$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ están sobre la gráfica. La ecuación dada está en una forma conveniente para establecer una tabla de valores.

Graficar estos puntos y conectarlos con una curva suave produce la figura 7.16.

x	y	
0	−4	
−2	0	Intersecciones con los ejes
2	0	
1	−3	
−1	−3	
3	5	Otros puntos
−3	5	

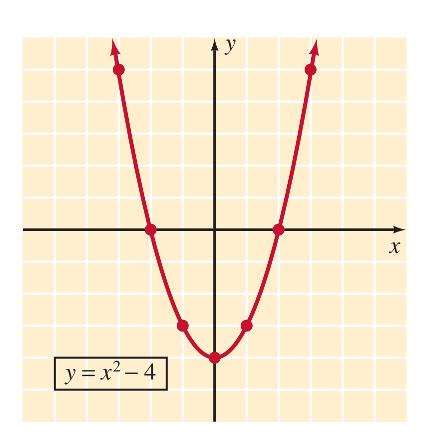


Figura 7.16

■

La curva en la figura 7.16 se llama parábola; en un capítulo ulterior se estudiarán las parábolas con más detalle. Sin embargo, en este momento se quiere enfatizar que la parábola en la figura 7.16 se dice que es *simétrica con respecto al eje y*. En otras palabras, el eje y es una recta de simetría. Cada mitad de la curva es una imagen especular de la otra mitad a través del eje y. Note en la tabla de valores que, para cada par ordenado (x, y), el par ordenado $(-x, y)$ también es una solución. Una prueba general para la simetría con respecto al eje y se puede enunciar del modo siguiente:

Simetría con respecto al eje *y*

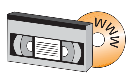
La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si al sustituir x con $-x$ resulta una ecuación equivalente.

La ecuación $y = x^2 - 4$ muestra simetría con respecto al eje y porque al sustituir x con $-x$ se produce $y = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$. Ponga a prueba algunas ecuaciones para tal simetría. Sustituya x con $-x$ y compruebe para una ecuación equivalente.

Ecuación	Prueba para simetría con respecto al eje *y*	Ecuación equivalente	Simétrica con respecto al eje *y*
$y = -x^2 + 2$	$y = -(-x)^2 + 2 = -x^2 + 2$	Sí	Sí
$y = 2x^2 + 5$	$y = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5$	Sí	Sí
$y = x^4 + x^2$	$y = (-x)^4 + (-x)^2$ $= x^4 + x^2$	Sí	Sí
$y = x^3 + x^2$	$y = (-x)^3 + (-x)^2$ $= -x^3 + x^2$	No	No
$y = x^2 + 4x + 2$	$y = (-x)^2 + 4(-x) + 2$ $= x^2 - 4x + 2$	No	No

Algunas ecuaciones producen gráficas que tienen simetría con respecto al eje x. En el siguiente ejemplo se verá la gráfica de una parábola que es simétrica con respecto al eje x.

EJEMPLO 2 Grafique $x = y^2$



Solución

Primero, se ve que (0, 0) está sobre la gráfica y se determinan ambas intersecciones con los ejes. Segundo, la ecuación dada está en una forma conveniente para establecer una tabla de valores.

Graficar estos puntos y conectarlos con una curva suave produce la figura 7.17.

x	y	
0	0	Intersecciones con los ejes
1	1	
1	−1	Otros puntos
4	2	
4	−2	

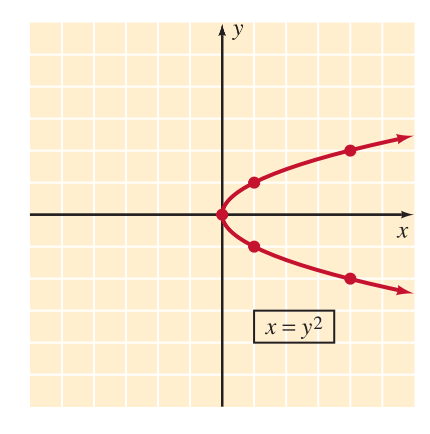


Figura 7.17

Se dice que la parábola en la figura 7.17 es *simétrica con respecto al eje x*. Cada mitad de la curva es una imagen especular de la otra mitad a través del eje x. Note también, en la tabla de valores, que para cada par ordenado (x, y), el par ordenado $(x, -y)$ es una solución. Una prueba general para simetría con respecto al eje x se puede enunciar del modo siguiente:

Simetría con respecto al eje *x*

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si al sustituir y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.

La ecuación $x = y^2$ muestra simetría con respecto al eje x porque al sustituir y con $-y$ se produce $y = (-y)^2 = y^2$. Ponga a prueba algunas ecuaciones para simetría con respecto al eje x. Sustituya y con $-y$ y compruebe para una ecuación equivalente.

Ecuación	Prueba para simetría con respecto al eje x	Ecuación equivalente	Simétrica con respecto al eje x
$x = y^2 + 5$	$x = (-y)^2 + 5 = y^2 + 5$	Sí	Sí
$x = -3y^2$	$x = -3(-y)^2 = -3y^2$	Sí	Sí
$x = y^3 + 2$	$x = (-y)^3 + 2 = -y^3 + 2$	No	No
$x = y^2 - 5y + 6$	$x = (-y)^2 - 5(-y) + 6$		
	$= y^2 + 5y + 6$	No	No

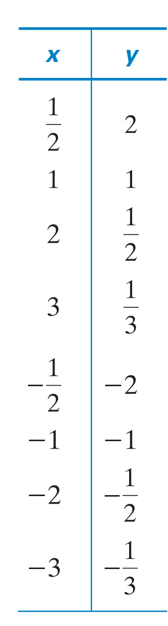
Además de la simetría con respecto a los ejes y y x, algunas ecuaciones producen gráficas que tienen simetría con respecto al origen. En el siguiente ejemplo se verá una gráfica que es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 3

Grafique $y = \frac{1}{x}$

Solución

Primero encuentre las intersecciones con los ejes. Sea $x = 0$; entonces $y = \frac{1}{x}$ se convierte en $y = \frac{1}{0}$, y $\frac{1}{0}$ es indefinida. Por tanto, no hay ordenada al origen. Sea $y = 0$; entonces $y = \frac{1}{x}$ se convierte en $0 = \frac{1}{x}$, y no hay valores de x que satisfarán esta ecuación. En otras palabras, esta gráfica no tiene puntos sobre el eje x ni sobre el eje y. Segundo, establezca una tabla de valores y tenga en mente que ni x ni y pueden ser igual a cero.



x	y
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$

En la figura 7.18(a) se graficaron los puntos asociados con las soluciones de la tabla. Dado que la gráfica no interseca con ningún eje, debe consistir de dos ramas. En consecuencia, al conectar los puntos en el primer cuadrante con una curva continua y luego conectar los puntos en el tercer cuadrante con otra curva continua, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 7.18(b).

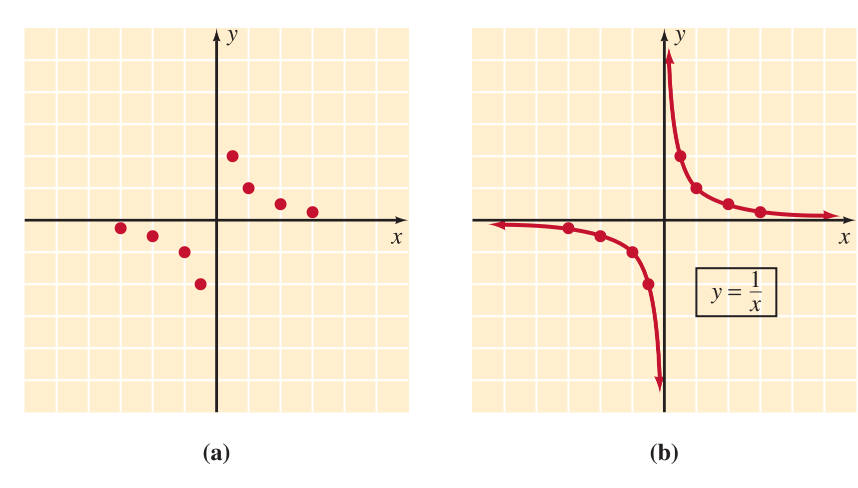


Figura 7.18 ■

Se dice que la curva en la figura 7.18 es *simétrica con respecto al origen*. Cada mitad de la curva es una imagen especular de la otra mitad a través del origen. Note, en la tabla de valores, que para cada par ordenado (x, y), el par ordenado $(-x, -y)$ también es una solución. Una prueba general para simetría con respecto al origen se puede enunciar del modo siguiente:

Simetría con respecto al origen

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir x con $-x$ y y con $-y$ resulta una ecuación equivalente.

La ecuación $y = \frac{1}{x}$ muestra simetría con respecto al origen porque, al sustituir y con $-y$ y x con $-x$, se produce $-y = \frac{1}{-x}$ que es equivalente a $y=\frac{1}{x}$. Pruebe algunas ecuaciones para simetría con respecto al origen. Sustituirá y con $-y$, sustituirá x con $-x$, y luego comprobará para una ecuación equivalente.

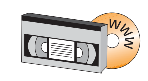
Ecuación	Prueba para simetría con respecto al origen	Ecuación equivalente	Simétrica con respecto al origen
$y = x^3$	$(-y) = (-x)^3$ $-y = -x^3$ $y = x^3$	Sí	Sí
$x^2 + y^2 = 4$	$(-x)^2 + (-y)^2 = 4$ $x^2 + y^2 = 4$	Sí	Sí
$y = x^2 - 3x + 4$	$(-y) = (-x)^2 - 3(-x) + 4$ $-y = x^2 + 3x + 4$ $y = -x^2 - 3x - 4$	No	No

Deténgase por un momento y junte las técnicas de graficación que se han introducido hasta el momento. A continuación hay una lista de sugerencias de graficación. El orden de las sugerencias indica el orden en el cual usualmente se ataca un nuevo problema de graficación.

1. Determine qué tipo de simetría muestra la ecuación.
2. Encuentre las intersecciones con los ejes.
3. Resuelva la ecuación para y en términos de x o para x en términos de y si no está ya en tal forma.
4. Establezca una tabla de pares ordenados que satisfaga la ecuación. El tipo de simetría afectará su elección de valores en la tabla. (Esto se ilustrará en un momento.)
5. Grafique los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla y conéctelos con una curva continua. Luego, si es adecuado, refleje esta parte de la curva de acuerdo con la simetría que muestra la ecuación.

EJEMPLO 4

Grafique $x^2y = -2$



Solución

Puesto que sustituir x con $-x$ produce $(-x)^2y = -2$ o, de manera equivalente, $x^2y = -2$, la ecuación muestra simetría con respecto al eje y. No hay intersecciones con los ejes porque ni x ni y pueden igualarse a 0. Resolver la ecuación para y produce $y = \frac{-2}{x^2}$. La ecuación muestra simetría con respecto al eje y, así que sólo se usarán valores positivos para x y luego se reflejará la curva a través del eje y.

x	y
1	-2
2	$-\frac{1}{2}$
3	$-\frac{2}{9}$
4	$-\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$	-8

Grafique los puntos determinados por la tabla, conéctelos con una curva continua y refleje esta porción de la curva a través del eje y. La figura 7.19 es el resultado de este proceso.

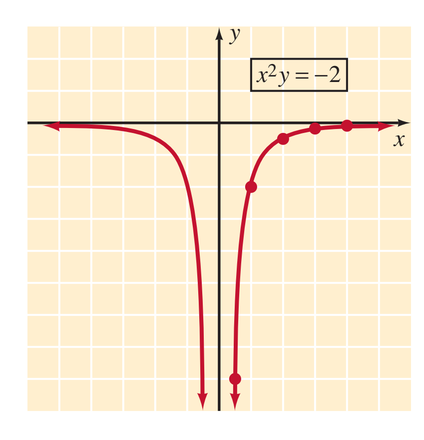


Figura 7.19

EJEMPLO 5

Grafique $x = y^3$

Solución

Puesto que sustituir x con $-x$ y y con $-y$ produce $-x = (-y)^3 = -y^3$, que es equivalente a $x = y^3$, la ecuación dada muestra simetría con respecto al origen. Si $x = 0$, entonces $y = 0$, de modo que el origen es un punto de la gráfica. La ecuación dada está en una forma sencilla para derivar una tabla de valores.

x	y
0	0
8	2
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{27}{64}$	$\frac{3}{4}$

Grafique los puntos determinados por la tabla, conéctelos con una curva continua y refleje esta porción de la curva a través del origen para producir la figura 7.20.

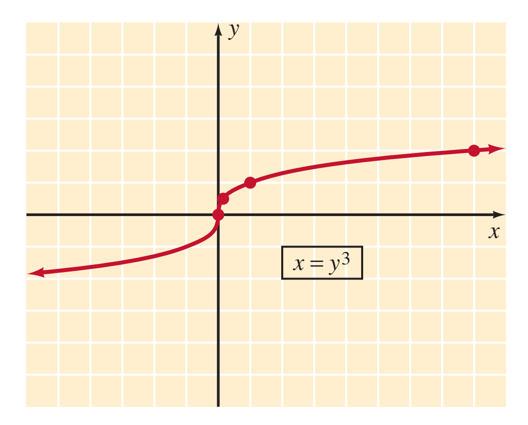


Figura 7.20

EJEMPLO 6

Use una herramienta de graficación para obtener una gráfica de la ecuación $x = y^3$

Solución

Primero, tal vez necesite resolver la ecuación para y en términos de x. (Se dice "tal vez necesite" porque algunas herramientas de graficación son capaces de graficar ecuaciones de dos variables sin resolver para y en términos de x.)

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

Ahora puede ingresar la expresión $x^{1/3}$ para Y_1 y obtener la gráfica que se muestra en la figura 7.21.

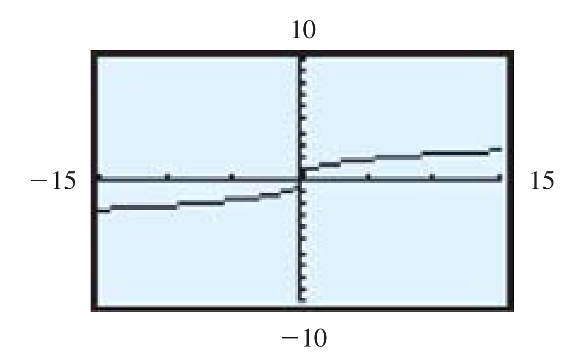


Figura 7.21

Como se indicó en la figura 7.21, el **rectángulo de visualización** de una herramienta de graficación es una porción del plano xy que se muestra en la pantalla de la herramienta. En esta pantalla las fronteras se establecieron de modo que $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$. Estas fronteras se establecieron automáticamente; sin embargo, las fronteras se pueden reasignar según se necesite, una característica importante de las herramientas de graficación.

Conjunto de problemas 7.2

Para cada uno de los puntos en los problemas 1-5, determine los puntos que son simétricos con respecto a (a) el eje x, (b) el eje y, y (c) el origen.

1. $(-3, 1)$

2. $(-2, -4)$

3. $(7, -2)$

4. $(0, -4)$

5. $(5, 0)$

Para los problemas 6-25, determine el tipo(s) de simetría (simetría con respecto al eje x, al eje y y/o al origen) que muestra la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones. No bosqueje la gráfica.

6. $x^2 + 2y = 4$

7. $-3x + 2y^2 = -4$

8. $x = -y^2 + 5$

9. $y = 4x^2 + 13$

10. $xy = -6$

11. $2x^2y^2 = 5$

12. $2x^2 + 3y^2 = 9$

13. $x^2 - 2x - y^2 = 4$

14. $y = x^2 - 6x - 4$

15. $y = 2x^2 - 7x - 3$

16. $y = x$

17. $y = 2x$

18. $y = x^4 + 4$

19. $y = x^4 - x^2 + 2$

20. $x^2 + y^2 = 13$

21. $x^2 - y^2 = -6$

22. $y = -4x^2 - 2$

23. $x = -y^2 + 9$

24. $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

25. $2x^2 + 3y^2 + 8y + 2 = 0$

Para los problemas 26-59 grafique cada una de las ecuaciones.

26. $y = x + 1$

27. $y = x - 4$

28. $y = 3x - 6$

29. $y = 2x + 4$

30. $y = -2x + 1$

31. $y = -3x - 1$

32. $y = \frac{2}{3}x - 1$

33. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

34. $y = \frac{1}{3}x$

35. $y = \frac{1}{2}x$

36. $2x + y = 6$

37. $2x - y = 4$

38. $x + 3y = -3$

39. $x - 2y = 2$

40. $y = x^2 - 1$

41. $y = x^2 + 2$

42. $y = -x^3$

43. $y = x^3$

44. $y = \frac{2}{x^2}$

45. $y = \frac{-1}{x^2}$

46. $y = 2x^2$

47. $y = -3x^2$

48. $xy = -3$

49. $xy = 2$

50. $x^2y = 4$

51. $xy^2 = -4$

52. $y^3 = x^2$

53. $y^2 = x^3$

54. $y = \frac{-2}{x^2 + 1}$

55. $y = \frac{4}{x^2 + 1}$

56. $x = -y^3$

57. $y = x^4$

58. $y = -x^4$

59. $x = -y^3 + 2$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

60. ¿Cómo convencería a alguien de que hay infinitos pares ordenados de números reales que satisfacen $x + y = 7$?

61. ¿Cuál es la gráfica de $x = 0$? ¿Cuál es la gráfica de $y = 0$? Explique sus respuestas.

62. ¿Una gráfica es simétrica con respecto al origen si es simétrica con respecto a ambos ejes? Defienda su respuesta.

63. ¿Una gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes si es simétrica con respecto al origen? Defienda su respuesta.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

Este conjunto de actividades está diseñado para ayudarle a comenzar a trabajar con su herramienta de graficación al establecer diferentes fronteras para el rectángulo de visualización; notará el efecto sobre las gráficas producidas. Di-

chas fronteras por lo general se establecen al usar un menú que se despliega mediante una tecla marcada como WINDOW (ventana) o RANGE (rango). Tal vez necesite consultar el manual del usuario para instrucciones específicas de digitación.

64. Grafique la ecuación $y = \frac{1}{x}$ (ejemplo 4) usando las siguientes fronteras.

(a) $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$
(b) $-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$
(c) $-5 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$

65. Grafique la ecuación $y = \frac{-2}{x^2}$ (ejemplo 5) usando las siguientes fronteras.

(a) $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$
(b) $-5 \leq x \leq 5$ y $-10 \leq y \leq 10$
(c) $-5 \leq x \leq 5$ y $-10 \leq y \leq 1$

66. Grafique las dos ecuaciones $y = \pm\sqrt{x}$ (ejemplo 3) sobre el mismo conjunto de ejes, usando las siguientes fronteras. (Sea $Y_1 = \sqrt{x}$ y $Y_2 = -\sqrt{x}$)

(a) $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$
(b) $-1 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$
(c) $-1 \leq x \leq 15$ y $-5 \leq y \leq 5$

67. Grafique $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{5}{x}$, $y = \frac{10}{x}$ y $y = \frac{20}{x}$ sobre el mismo conjunto de ejes. (Elija sus propias fronteras.) ¿Qué efecto parece tener sobre la gráfica el aumentar la constante?

68. Grafique $y = \frac{10}{x}$ y $y = \frac{-10}{x}$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación existe entre las dos gráficas?

69. Grafique $y = \frac{10}{x^2}$ y $y = \frac{-10}{x^2}$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación existe entre las dos gráficas?

7.3 Desigualdades lineales con dos variables

Las **desigualdades lineales** con dos variables son de la forma $Ax + By > C$ o $Ax + By < C$, donde A, B y C son números reales. (Los enunciados combinados de igualdad y desigualdad lineales son de la forma $Ax + By \geq C$ o $Ax + By \leq C$.)

La graficación de desigualdades lineales es casi tan sencilla como la graficación de ecuaciones lineales. La siguiente discusión conduce a un simple proceso paso a paso. Considere la siguiente ecuación y desigualdades relacionadas.

$$x + y = 2 \qquad x + y > 2 \qquad x + y < 2$$

La gráfica de $x + y = 2$ se muestra en la figura 7.22. La recta divide el plano en dos medios planos, uno arriba de la línea y el otro abajo de la recta. En la figura 7.23(a)

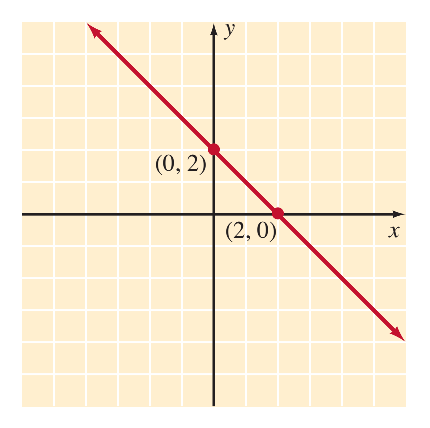


Figura 7.22

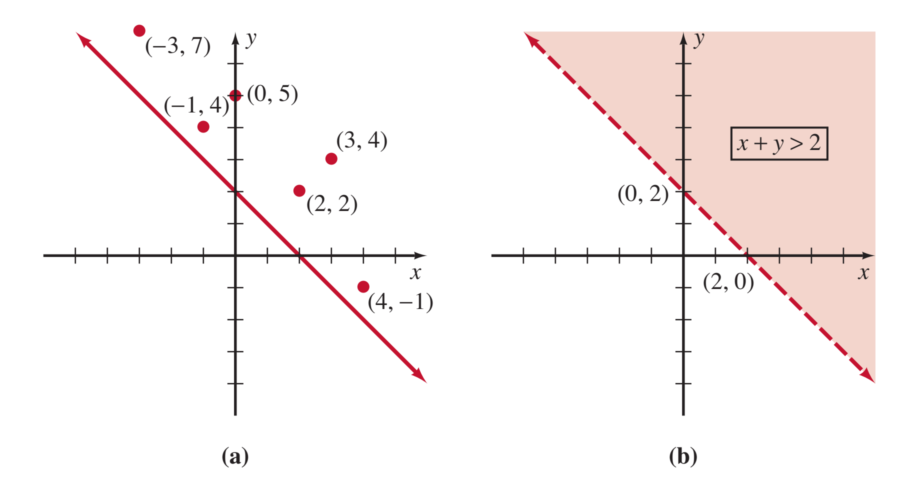


Figura 7.23

se indicaron varios puntos en el medio plano arriba de la recta. Note que, para cada punto, el par ordenado de números reales satisface la desigualdad $x + y > 2$. Esto es cierto para *todos los puntos* en el medio plano arriba de la recta. Por tanto, la gráfica de $x + y > 2$ es el medio plano arriba de la recta, como se indica mediante la porción sombreada en la figura 7.23(b). Se usó una recta discontinua para indicar aquellos puntos sobre la recta que *no* satisfacen $x + y > 2$. Si fuese a graficar $x + y \geq 2$ usaría una recta continua.

En la figura 7.24(a) se indicaron varios puntos en el medio plano abajo de la recta $x + y = 2$. Note que, para cada punto, el par ordenado de números reales satisface la desigualdad $x + y < 2$. Esto es cierto para *todos los puntos* en el medio plano abajo de la recta. Por ende, la gráfica de $x + y < 2$ es el medio plano abajo de la recta, como se indicó en la figura 7.24(b).

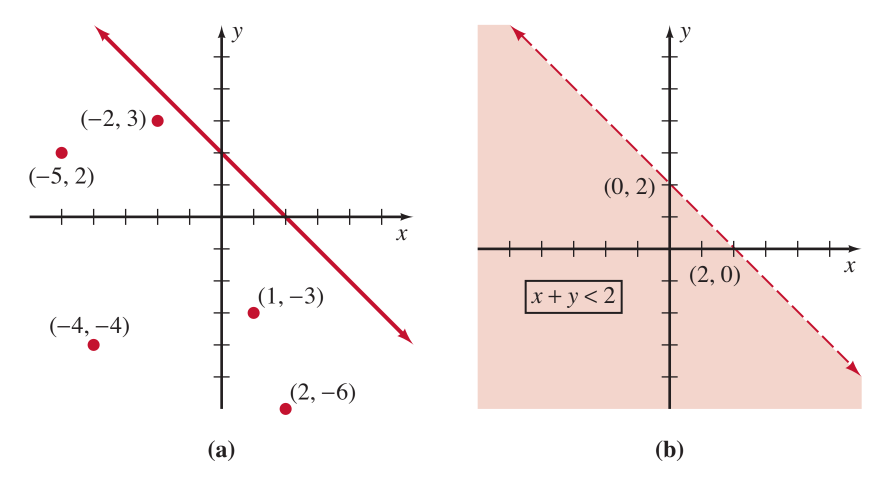


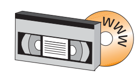
Figura 7.24

Para graficar una desigualdad lineal se sugieren los siguientes pasos.

1. Primero grafique la igualdad correspondiente. Use una recta continua si la igualdad se incluye en el enunciado original. Use una recta discontinua si no se incluye la igualdad.
2. Elija un “punto de prueba” que no esté sobre la recta y sustituya sus coordenadas en la desigualdad. (El origen es un punto conveniente a usar si no está sobre la línea.)
3. La gráfica de la desigualdad original es
   (a) el medio plano que contiene el punto de prueba si la desigualdad se satisface por dicho punto, o
   (b) el medio plano que no contiene el punto de prueba si la desigualdad no se satisface por dicho punto.

Aplique estos pasos a algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Grafique $x - 2y > 4$



Solución

Paso 1 Grafique $x - 2y = 4$ como una recta discontinua, porque la igualdad no se incluye en $x - 2y > 4$ (figura 7.25).

Paso 2 Elija el origen como un punto de prueba y sustituya sus coordenadas en la desigualdad.

$$x - 2y > 4 \qquad \text{se convierte en } 0 - 2(0) > 4, \text{ lo que es falso.}$$

Paso 3 Puesto que el punto de prueba no satisface la desigualdad dada, la gráfica es el medio plano que no contiene el punto de prueba. Por ende, la gráfica de $x - 2y > 4$ es el medio plano abajo de la recta, como se indica en la figura 7.25.

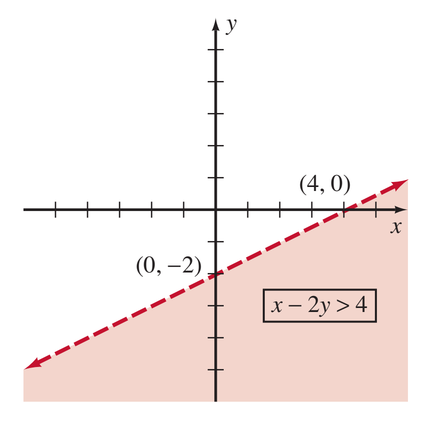
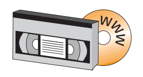


Figura 7.25

■

EJEMPLO 2 Grafique $3x + 2y \leq 6$



Solución

Paso 1 Grafique $3x + 2y = 6$ como una recta continua, porque la igualdad se incluye en $3x + 2y \leq 6$ (figura 7.26).

Paso 2 Elija el origen como un punto de prueba y sustituya sus coordenadas en el enunciado dado.

$$3x + 2y \leq 6 \qquad \text{se convierte en } 3(0) + 2(0) \leq 6, \text{ lo que es cierto.}$$

Paso 3 Puesto que el punto de prueba satisface el enunciado dado, todos los puntos en el mismo medio plano que el punto de prueba satisfacen el enunciado. Por ende, la gráfica de $3x + 2y \leq 6$ consiste de la recta y el medio plano abajo de la recta (figura 7.26).

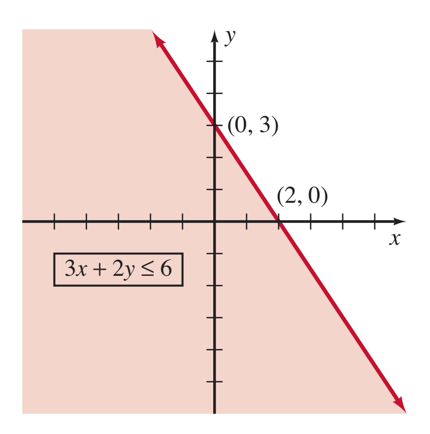
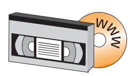


Figura 7.26

■

EJEMPLO 3 Grafique $y \leq 3x$



Solución

Paso 1 Grafique $y = 3x$ como una recta continua, porque la igualdad se incluye en el enunciado $y \leq 3x$ (figura 7.27).

Paso 2 El origen está en la recta, de modo que debe elegir algún otro punto como punto de prueba. Intente (2, 1).

$$y \leq 3x \qquad \text{se convierte en } 1 \leq 3(2), \text{ lo que es un enunciado verdadero.}$$

Paso 3 Puesto que el punto de prueba satisface la desigualdad dada, la gráfica es el medio plano que contiene el punto de prueba. Por ende, la gráfica de $y \leq 3x$ consiste de la recta y el medio plano abajo de la recta, como se indica en la figura 7.27.

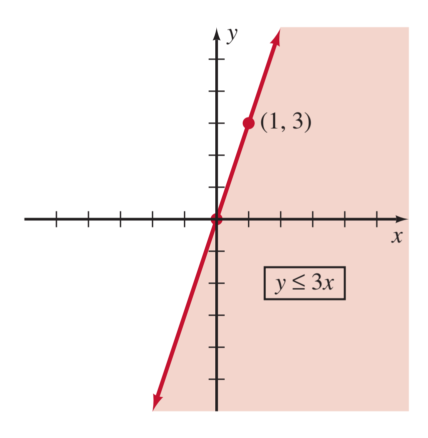


Figura 7.27

Conjunto de problemas 7.3

Para los problemas 1-24 grafique cada una de las desigualdades.

1. $x - y > 2$
2. $x + y > 4$
3. $x + 3y < 3$
4. $2x - y > 6$
5. $2x + 5y \geq 10$
6. $3x + 2y \leq 4$
7. $y \leq -x + 2$
8. $y \geq -2x - 1$
9. $y > -x$
10. $y < x$
11. $2x - y \geq 0$
12. $x + 2y \geq 0$
13. $-x + 4y - 4 \leq 0$
14. $-2x + y - 3 \leq 0$
15. $y > -\frac{3}{2}x - 3$
16. $2x + 5y > -4$
17. $y < -\frac{1}{2}x + 2$
18. $y < -\frac{1}{3}x + 1$
19. $x \leq 3$
20. $y \geq -2$
21. $x > 1$ y $y < 3$
22. $x > -2$ y $y > -1$
23. $x \leq -1$ y $y < 1$
24. $x < 2$ y $y \geq -2$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

25. ¿Por qué el punto $(-4, 1)$ no es un buen punto de prueba cuando se grafica $5x - 2y > -22$?
26. Explique cómo graficaría la desigualdad $-3 > x - 3y$.

MÁS INVESTIGACIÓN

27. Grafique $|x| < 2$. [*Sugerencia*: Recuerde que $|x| < 2$ es equivalente a $-2 < x < 2$.]
28. Grafique $|y| > 1$.
29. Grafique $|x + y| < 1$.
30. Grafique $|x - y| > 2$.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

31. Éste es un buen momento para que usted se familiarice con las características DRAW (dibujar) de su calculadora graficadora. De nuevo, tal vez necesite consultar su manual de usuario para instrucciones específicas de digitación. Regrese a los ejemplos 1, 2 y 3 de esta sección y use su calculadora graficadora para dibujar las desigualdades.

32. Use una calculadora graficadora para bosquejar sus gráficas para los problemas 1-24.

33. Use la característica DRAW de su calculadora graficadora para dibujar cada una de las siguientes expresiones.

(a) Un segmento de recta entre $(-2, -4)$ y $(-2, 5)$
(b) Un segmento de recta entre $(2, 2)$ y $(5, 2)$
(c) Un segmento de recta entre $(2, 3)$ y $(5, 7)$
(d) Un triángulo con vértices en $(1, -2)$, $(3, 4)$ y $(-3, 6)$

7.4 Distancia y pendiente

Mientras trabaja con el sistema de coordenadas rectangulares, en ocasiones es necesario expresar la longitud de ciertos segmentos de recta. En otras palabras, necesita encontrar la distancia entre dos puntos. Considere primero dos ejemplos específicos y luego desarrolle la fórmula de distancia general.

EJEMPLO 1

Encuentre la distancia entre los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, 2)$ y también entre los puntos $C(-2, 5)$ y $D(-2, -4)$.

Solución

Grafique los puntos y dibuje $\overline{AB}$ como en la figura 7.28. Puesto que el $\overline{AB}$ es paralelo al eje x, su longitud se puede expresar como $|5 - 2|$ o $|2 - 5|$. (El símbolo de valor absoluto se usa para garantizar un valor no negativo.) Por tanto, la longitud del $\overline{AB}$ es de 3 unidades. Del mismo modo, la longitud del $\overline{CD}$ es $|5 - (-4)| = |-4 - 5| = 9$ unidades.

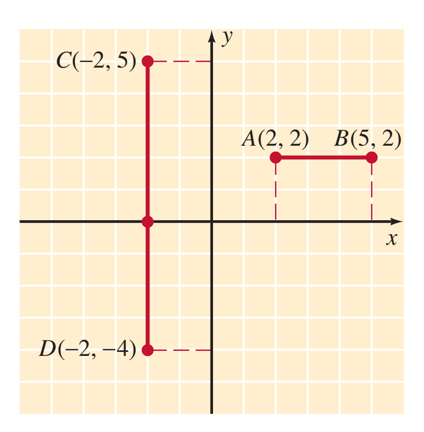
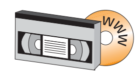


Figura 7.28 ■

EJEMPLO 2 Encuentre la distancia entre los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$.



Solución

Grafique los puntos y forme un triángulo recto como se indica en la figura 7.29. Note que las coordenadas del punto C son (5, 3). Puesto que el $\overline{AC}$ es paralelo al eje horizontal, su longitud se determina fácilmente en 3 unidades. Del mismo modo, el $\overline{CB}$ es paralelo al eje vertical y su longitud es de 4 unidades. Sea d la longitud del $\overline{AB}$ y aplique el teorema de Pitágoras para obtener

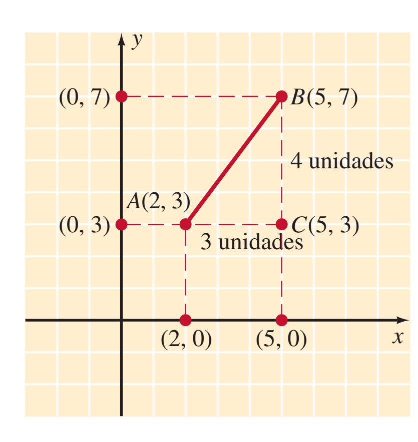


Figura 7.29

$$d^2 = 3^2 + 4^2$$
$$d^2 = 9 + 16$$
$$d^2 = 25$$
$$d = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

La "distancia entre" es un valor no negativo, de modo que la longitud del $\overline{AB}$ es de 5 unidades. ■

Puede usar el enfoque que se utilizó en el ejemplo 2 para desarrollar una fórmula general de distancia para encontrar la distancia entre cualesquiera dos puntos en un plano coordenado. El desarrollo procede del modo siguiente:

1. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ cualesquiera dos puntos en un plano coordenado.
2. Forme un triángulo recto como se indica en la figura 7.30. Las coordenadas del vértice del ángulo recto, punto R, son (x_2, y_1).

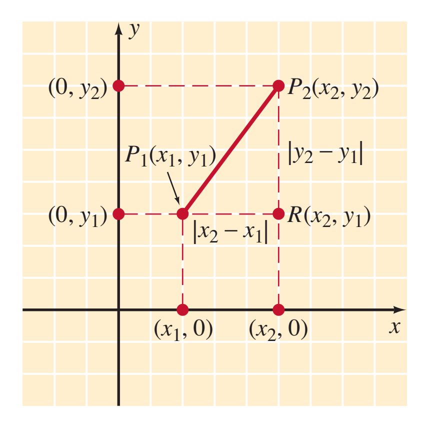


Figura 7.30

La longitud del $\overline{P_1R}$ es $|x_2 - x_1|$ y la longitud del $\overline{RP_2}$ es $|y_2 - y_1|$. (El símbolo de valor absoluto se usa para garantizar un valor no negativo.) Sea d la longitud de P_1P_2 aplique el teorema de Pitágoras para obtener

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Puesto que $|a|^2 = a^2$, la **fórmula de distancia** se puede enunciar como

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

No hay diferencia a cuál punto llame P_1 y P_2 cuando use la fórmula de distancia. Si olvida la fórmula, no tema. Sólo forme un triángulo recto y aplique el teorema de Pitágoras como se hizo en el ejemplo 2. Considere un ejemplo que demuestra el uso de la fórmula de distancia.

EJEMPLO 3

Encuentre la distancia entre $(-1, 4)$ y $(1, 2)$.

Solución

Sea $P_1 = (-1, 4)$ y $P_2 = (1, 2)$. Con la fórmula de distancia se obtiene

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[(1 - (-1))]^2 + (2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

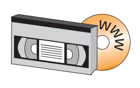
Exprese la respuesta en la forma radical más simple.

La distancia entre los dos puntos es $2\sqrt{2}$ unidades. ■

En el ejemplo 3 no se bosquejó una figura debido a la simplicidad del problema. Sin embargo, en ocasiones es útil usar una figura para organizar la información dada y auxiliarse en el análisis del problema, como se observa en el siguiente ejemplo.

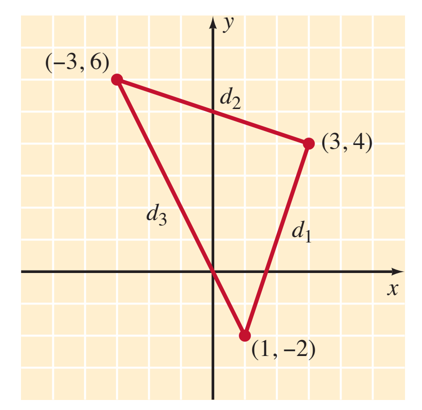
EJEMPLO 4

Verifique que los puntos $(-3, 6)$, $(3, 4)$ y $(1, -2)$ son vértices de un triángulo isósceles. (Un triángulo isósceles tiene dos lados de la misma longitud.)



Solución

Grafique los puntos y dibuje el triángulo (figura 7.31). Use la fórmula de distancia para encontrar las longitudes d_1, d_2 y d_3, del modo siguiente:



$$d_1 = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$d_2 = \sqrt{(-3-3)^2 + (6-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$
$$= 2\sqrt{10}$$
$$d_3 = \sqrt{(-3-1)^2 + (6-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Figura 7.31

Puesto que $d_1 = d_2$ se sabe que es un triángulo isósceles. ■

Pendiente de una recta

En geometría coordenada, el concepto de **pendiente** se usa para describir el "empinamiento" de las rectas. La pendiente de una recta es la razón del cambio vertical al cambio horizontal conforme uno se mueve desde un punto sobre una recta hacia otro punto. Esto se ilustra en la figura 7.32, con los puntos P_1 y P_2.

Una definición precisa de pendiente se puede dar al considerar las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y R como se indica en la figura 7.33. El cambio horizontal conforme uno se mueve desde P_1 hacia P_2 es $x_2 - x_1$ y el cambio vertical es $y_2 - y_1$. Por tanto, se proporciona la siguiente definición para pendiente.

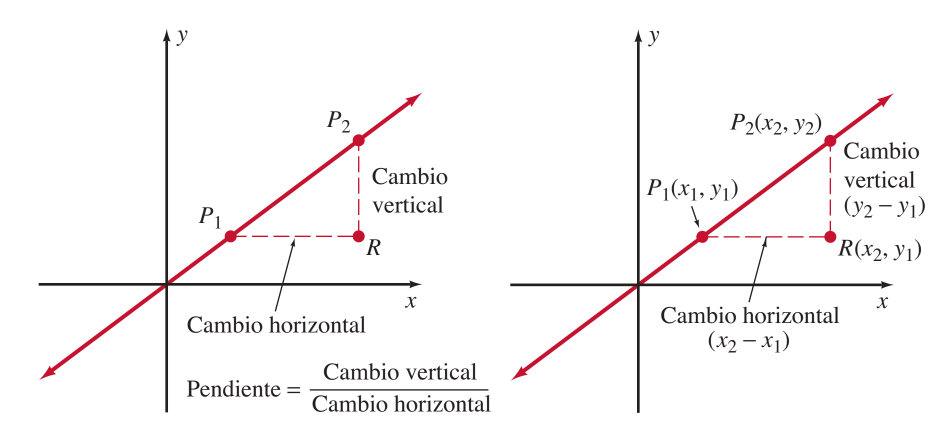


Figura 7.32 **Figura 7.33**

Definición 7.1

Si los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, son cualesquiera dos puntos diferentes sobre una recta, entonces la pendiente de la recta (denotada por m) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_2 \neq x_1$$

Puesto que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, cómo se designan P_1 y P_2 no es importante. Use la definición 7.1 para encontrar las pendientes de algunas rectas.

EJEMPLO 5

Encuentre la pendiente de la recta determinada por cada uno de los siguientes pares de puntos y grafique las rectas.

(a) (−1, 1) y (3, 2) **(b)** (4, −2) y (−1, 5)

(c) (2, −3) y (−3, −3)

Solución

(a) Sea $P_1 = (-1, 1)$ y $P_2 = (3, 2)$ (figura 7.34).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

(b) Sea $P_1 = (4, -2)$ y $P_2 = (-1, 5)$ (figura 7.35).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-2)}{-1 - 4} = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$$

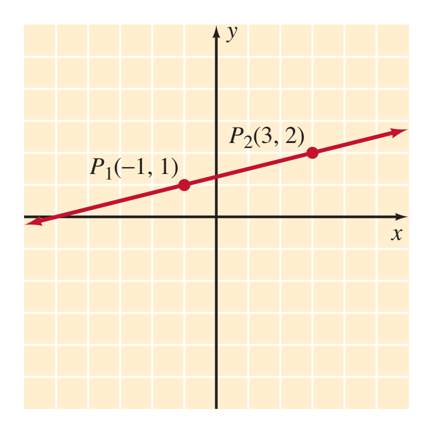


Figura 7.34

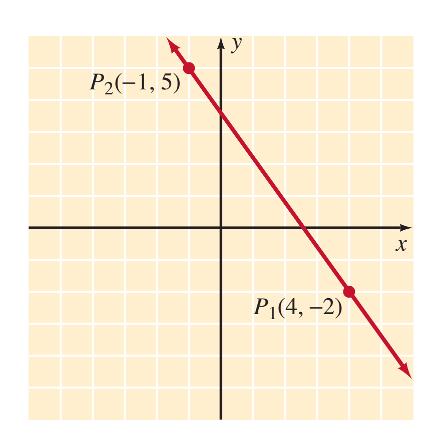


Figura 7.35

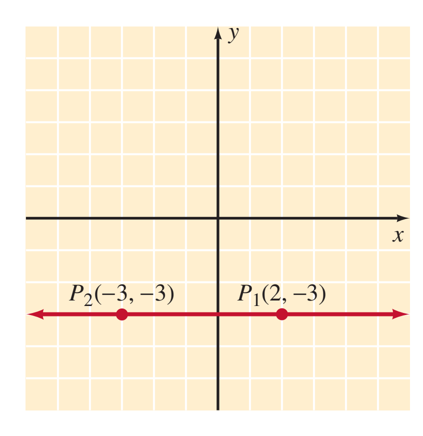


Figura 7.36

(c) Sea $(2, -3)\ P_1$ y $(-3, -3)\ P_2$ (figura 7.36).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-3 - (-3)}{-3 - 2}$$

$$= \frac{0}{-5} = 0$$

Los tres incisos del ejemplo 5 representan las tres posibilidades básicas para la pendiente; esto es, la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa o cero. Una recta que tenga una pendiente positiva se eleva conforme se mueve de izquierda a derecha, como en la figura 7.34. Una recta que tenga una pendiente negativa cae conforme se mueve de izquierda a derecha, como en la figura 7.35. Una recta horizontal, como en la figura 7.36, tiene una pendiente de cero. Finalmente, debe darse cuenta de que *el concepto de pendiente es indefinido para rectas verticales*. Esto se debe al hecho de que, para cualquier recta vertical, el cambio horizontal conforme se mueve de un punto sobre la recta a otro es cero. Por tanto, la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tendrá un denominador de cero y será indefinida. En concordancia, en la definición 7.1 se impone la restricción $x_2 \neq x_1$.

Es necesario enfatizar una idea final que pertenece al concepto de pendiente. La pendiente de una recta es una **razón**, la razón del cambio vertical al cambio horizontal. Una pendiente de $\frac{2}{3}$ significa que, por cada 2 unidades de cambio vertical, debe haber un correspondiente cambio horizontal de 3 unidades. Por ende, a partir de cierto punto sobre una recta que tenga una pendiente de $\frac{2}{3}$, podría localizar otros puntos sobre la recta del modo siguiente:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ → al moverse 4 unidades *arriba* y 6 unidades a la *derecha*

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ → al moverse 8 unidades *arriba* y 12 unidades a la *derecha*

$\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}$ → al moverse 2 unidades *abajo* y 3 unidades a la *izquierda*

Del mismo modo, si una recta tiene una pendiente de $-\frac{3}{4}$ entonces al partir de cualquier punto sobre la recta se podrían ubicar otros puntos sobre la recta del modo siguiente:

$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ → al moverse 3 unidades *abajo* y 4 unidades a la *derecha*

$-\frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$ → al moverse 3 unidades *arriba* y 4 unidades a la *izquierda*

$-\frac{3}{4} = \frac{-9}{12}$ → al moverse 9 unidades *abajo* y 12 unidades a la *derecha*

$-\frac{3}{4} = \frac{15}{-20}$ → al moverse 15 unidades *arriba* y 20 unidades a la *izquierda*

EJEMPLO 6

Grafique la recta que pasa a través del punto (0, −2) y tiene una pendiente de $\frac{1}{3}$.

Solución

Para graficar, ubique el punto (0, −2). Más aún, puesto que la pendiente = $\frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{1}{3}$, se puede localizar otro punto sobre la recta al comenzar desde el punto (0, −2) y moverse una unidad arriba y 3 unidades a la derecha para obtener el punto (3, −1). Puesto que dos puntos determinan una recta puede dibujar la recta (figura 7.37).

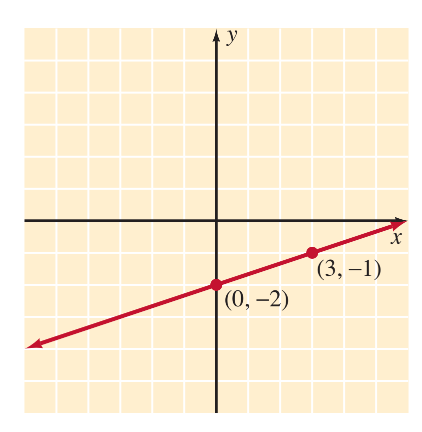


Figura 7.37

Observaciones: Puesto que $m = \frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$ puede localizar otro punto al moverse una unidad abajo y 3 unidades a la izquierda desde el punto (0, −2). ■

EJEMPLO 7

Grafique la recta que pasa a través del punto (1, 3) y tiene una pendiente de −2.

Solución

Para graficar la recta, ubique el punto (1, 3). Se sabe que $m = -2 = \frac{-2}{1}$. Más aún, puesto que la pendiente = $\frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{-2}{1}$ se puede localizar otro

punto sobre la recta al comenzar desde el punto (1, 3) y moverse 2 unidades abajo y una unidad a la derecha para obtener el punto (2, 1). Puesto que dos puntos determinan una recta puede dibujar la recta (figura 7.38).

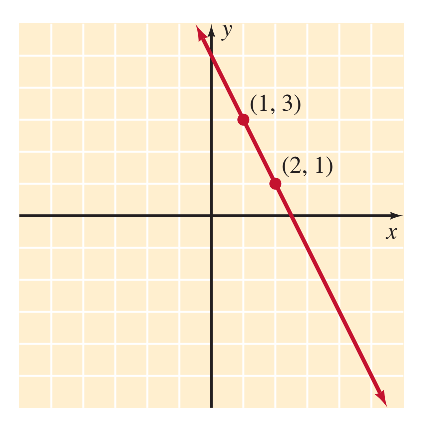


Figura 7.38

Observaciones: Dado que $m = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1}$ puede localizar otro punto al moverse 2 unidades arriba y una unidad a la izquierda desde el punto (1, 3). ■

Aplicaciones de la pendiente

El concepto de pendiente tiene muchas aplicaciones en el mundo real, aun cuando la palabra *pendiente* no se use con frecuencia. El concepto de pendiente se usa en la mayoría de las situaciones donde se implica un plano inclinado. Las camas de hospital están articuladas de modo que tanto el extremo de la cabeza como el extremo de los pies se elevan o bajan; esto es, la pendiente de cualquier extremo de la cama se puede cambiar. Del mismo modo, las caminadoras están diseñadas de modo que la inclinación (pendiente) de la plataforma se pueda ajustar. Un techador, cuando realiza la estimación para sustituir un techo, se preocupa no sólo por el área total a cubrir, sino también por la caída del techo. (Los contratistas no definen *caída* como la definición matemática de pendiente, pero ambos conceptos se refieren a "empinamiento".) En la figura 7.39, los dos techos pueden requerir la misma cantidad de tejas, pero el techo de la izquierda tardará más tiempo en completarse porque la caída es tan grande que se requerirá andamiaje.

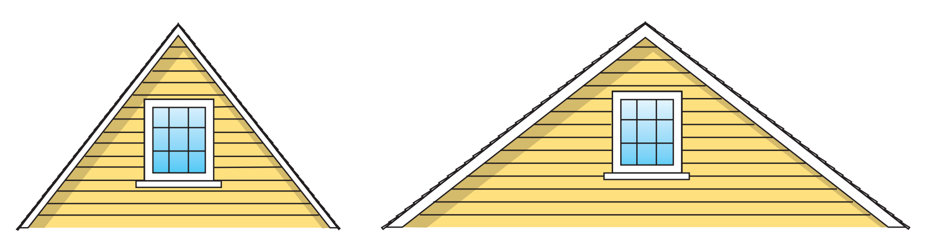


Figura 7.39

El concepto de pendiente también se usa en la construcción de tramos de escaleras (figura 7.40). En español usualmente se usan los términos *contrahuella* y *huella*, y la inclinación (pendiente) de las escaleras se puede expresar como la razón de contrahuella a huella. En la figura 7.40, las escaleras a la izquierda, donde la razón de contrahuella a carrera es $\frac{10}{11}$, son más inclinadas que las escaleras a la derecha, que tiene una razón de $\frac{7}{11}$.

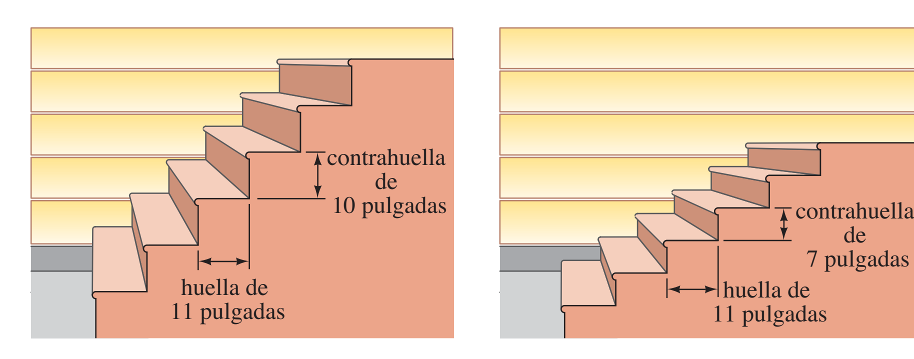


Figura 7.40

En la construcción de autopistas se usa la palabra *peralte* para el concepto de pendiente. Por ejemplo, en la figura 7.41 se dice que la autopista tiene un peralte de 17%. Esto significa que, para cada distancia horizontal de 100 pies, la autopista se eleva o cae 17 pies. En otras palabras, la pendiente de la autopista es $\frac{17}{100}$.

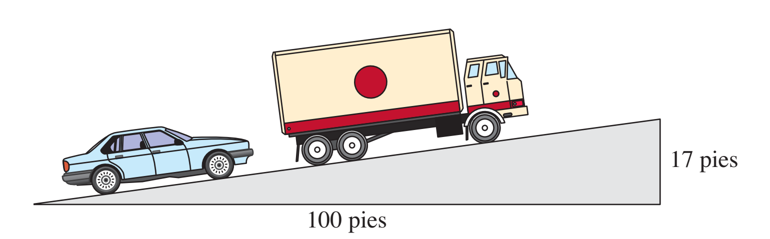
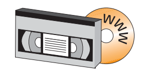


Figura 7.41

EJEMPLO 8

Cierta autopista tiene un peralte de 3%. ¿Cuántos pies se eleva en una distancia horizontal de 1 milla?



Solución

Un peralte de 3% significa una pendiente de $\frac{3}{100}$. Por tanto, si y representa la distancia vertical desconocida y se usa el hecho de que 1 milla = 5280 pies, se puede establecer y resolver la siguiente proporción.

$$\frac{3}{100} = \frac{y}{5280}$$

$$100y = 3(5280) = 15\,840$$

$$y = 158.4$$

La autopista se eleva 158.4 pies en una distancia horizontal de 1 milla. ■

Conjunto de problemas 7.4

Para los problemas 1-12 encuentre la distancia entre cada uno de los pares de puntos. Exprese las respuestas en la forma radical más simple.

1. $(-2, -1), (7, 11)$ **2.** $(2, 1), (10, 7)$

3. $(1, -1), (3, -4)$ **4.** $(-1, 3), (2, -2)$

5. $(6, -4), (9, -7)$ **6.** $(-5, 2), (-1, 6)$

7. $(-3, 3), (0, -3)$ **8.** $(-2, -4), (4, 0)$

9. $(1, -6), (-5, -6)$ **10.** $(-2, 3), (-2, -7)$

11. $(1, 7), (4, -2)$ **12.** $(6, 4), (-4, -8)$

13. Verifique que los puntos $(-3, 1)$, $(5, 7)$ y $(8, 3)$ son vértices de un triángulo rectángulo. [*Sugerencia:* Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces es un triángulo rectángulo con el ángulo recto opuesto al lado c.]

14. Verifique que los puntos $(0, 3)$, $(2, -3)$ y $(-4, -5)$ son vértices de un triángulo isósceles.

15. Verifique que los puntos $(7, 12)$ y $(11, 18)$ dividen el segmento de recta que une $(3, 6)$ y $(15, 24)$ en tres segmentos de igual longitud.

16. Verifique que $(3, 1)$ es el punto medio del segmento de recta que une $(-2, 6)$ y $(8, -4)$.

Para los problemas 17-28 grafique la recta determinada por los dos puntos y encuentre la pendiente de la recta.

17. $(1, 2), (4, 6)$ **18.** $(3, 1), (-2, -2)$

19. $(-4, 5), (-1, -2)$ **20.** $(-2, 5), (3, -1)$

21. $(2, 6), (6, -2)$ **22.** $(-2, -1), (2, -5)$

23. $(-6, 1), (-1, 4)$ **24.** $(-3, 3), (2, 3)$

25. $(-2, -4), (2, -4)$ **26.** $(1, -5), (4, -1)$

27. $(0, -2), (4, 0)$ **28.** $(-4, 0), (0, -6)$

29. Encuentre x si la recta a través de $(-2, 4)$ y $(x, 6)$ tiene una pendiente de $\frac{2}{9}$.

30. Encuentre y si la recta a través de $(1, y)$ y $(4, 2)$ tiene una pendiente de $\frac{5}{3}$.

31. Encuentre x si la recta a través de $(x, 4)$ y $(2, -5)$ tiene una pendiente de $-\frac{9}{4}$.

32. Encuentre y si la recta a través de $(5, 2)$ y $(-3, y)$ tiene una pendiente de $-\frac{7}{8}$.

Para los problemas 33-40 se le proporciona un punto sobre una recta y la pendiente de la recta. Encuentre las coordenadas de otros tres puntos sobre la recta.

33. $(2, 5),\ m = \frac{1}{2}$ **34.** $(3, 4), m = \frac{5}{6}$

35. $(-3, 4), m = 3$ **36.** $(-3, -6), m = 1$

37. $(5, -2), m = -\frac{2}{3}$ **38.** $(4, -1), m = -\frac{3}{4}$

39. $(-2, -4), m = -2$ **40.** $(-5, 3), m = -3$

Para los problemas 41-48 grafique la recta que pasa a través del punto dado y tiene la pendiente dada.

41. $(3, 1)$ $m = \frac{2}{3}$

42. $(-1, 0)$ $m = \frac{3}{4}$

43. $(-2, 3)$ $m = -1$

44. $(1, -4)$ $m = -3$

45. $(0, 5)$ $m = \frac{-1}{4}$

46. $(-3, 4)$ $m = \frac{-3}{2}$

47. $(2, -2)$ $m = \frac{3}{2}$

48. $(3, -4)$ $m = \frac{5}{2}$

Para los problemas 49-58 encuentre las coordenadas de dos puntos sobre la recta dada y luego use dichas coordenadas para encontrar la pendiente de la recta.

49. $2x + 3y = 6$

50. $4x + 5y = 20$

51. $x - 2y = 4$

52. $3x - y = 12$

53. $4x - 7y = 12$

54. $2x + 7y = 11$

55. $y = 4$

56. $x = 3$

57. $y = -5x$

58. $y - 6x = 0$

59. Cierta autopista tiene un peralte de 2%. ¿Cuántos pies se eleva en una distancia horizontal de 1 milla? (1 milla = 5280 pies).

60. El peralte de una autopista sobre una colina es de 30%. ¿Cuánto cambio en distancia horizontal existe, si la altura vertical de la colina es de 75 pies?

61. Suponga que una autopista se eleva una distancia de 215 pies en una distancia horizontal de 2640 pies. Exprese el peralte de la autopista a la décima de porcentaje más cercana.

62. Si la razón de contrahuella a huella será $\frac{3}{5}$ para algunos escalones y la contrahuella tiene 19 centímetros, encuentre la huella al centímetro más cercano.

63. Si la razón de contrahuella a huella será $\frac{2}{3}$ para algunos escalones, y la huella es de 28 centímetros, encuentre la contrahuella al centímetro más cercano.

64. Suponga que un mandato municipal requiere una "caída" de $2\frac{1}{4}$% para una tubería de desagüe desde la casa hasta la tubería principal en la calle. ¿Cuánta caída vertical debe haber para una distancia horizontal de 45 pies? Exprese la respuesta a la décima de pie más cercana.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

65. ¿Cómo explicaría el concepto de pendiente a alguien que faltó a clase el día cuando se estudió?

66. Si una recta tiene una pendiente de $\frac{2}{5}$ y otra recta tiene una pendiente de $\frac{3}{7}$, ¿cuál recta es más inclinada? Explique su respuesta.

67. Suponga que una recta tiene una pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto $(4, 7)$. ¿Los puntos $(7, 9)$ y $(1, 3)$ también están sobre la recta? Explique su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

68. En ocasiones es necesario encontrar las coordenadas de un punto sobre una recta numérica que se ubica en alguna parte entre dos puntos dados. Por ejemplo, suponga que quiere encontrar la coordenada (x) del punto ubicado a dos tercios de la distancia desde 2 hasta 8. Puesto que la distancia total desde 2 hasta 8 es $8 - 2 = 6$ unidades, comienza en 2 y se mueve $\frac{2}{3}(6) = 4$ unidades hacia 8. Por tanto, $x = 2 + \frac{2}{3}(6) = 2 + 4 = 6$.

Para cada una de las siguientes expresiones, encuentre la coordenada del punto indicado sobre una recta numérica:

(a) Dos tercios de la distancia de 1 a 10
(b) Tres cuartos de la distancia de -2 a 14
(c) Un tercio de la distancia de -3 a 7
(d) Dos quintos de la distancia de -5 a 6
(e) Tres quintos de la distancia de -1 a -11
(f) Cinco sextos de la distancia de 3 a -7

69. Ahora suponga que quiere encontrar las coordenadas del punto P, que se ubica a dos tercios de la distancia desde $A(1, 2)$ hacia $B(7, 5)$ en un plano coordenado. En la figura 7.42 se graficaron los puntos dados A y B para ayudarlo con el análisis de este problema. El punto D está a dos tercios de la distancia desde A hasta C porque rectas paralelas cortan segmentos proporcionales sobre cada transversal que interseca las rectas. Por ende, $\overline{AC}$ se puede tratar como un segmento de una recta numérica, como se muestra en la figura 7.43.

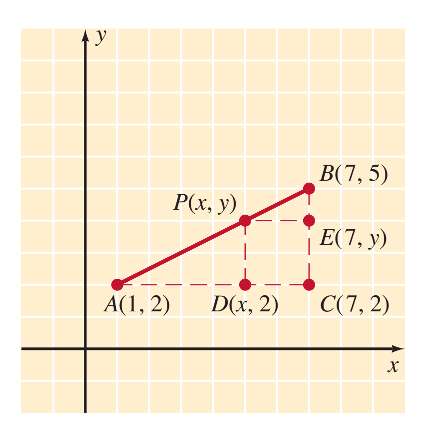


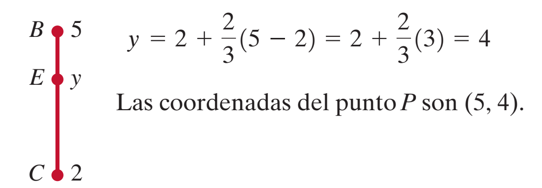
Figura 7.42

Figura 7.43

Por tanto,

$$x = 1 + \frac{2}{3}(7 - 1) = 1 + \frac{2}{3}(6) = 5$$

De igual modo, $\overline{CB}$ se puede tratar como un segmento de recta numérica, como se muestra en la figura 7.44. En consecuencia,



$$y = 2 + \frac{2}{3}(5 - 2) = 2 + \frac{2}{3}(3) = 4$$

Las coordenadas del punto P son (5, 4).

Figura 7.44

Para cada una de las siguientes expresiones, encuentre las coordenadas del punto indicado en el plano xy:

(a) Un tercio de la distancia desde (2, 3) hasta (5, 9)
(b) Dos tercios de la distancia desde (1, 4) hasta (7, 13)
(c) Dos quintos de la distancia desde (−2, 1) hasta (8, 11)
(d) Tres quintos de la distancia desde (2, −3) hasta (−3, 8)
(e) Cinco octavos de la distancia desde (−1, −2) hasta (4, −10)
(f) Siete octavos de la distancia desde (−2, 3) hasta (−1, −9)

70. Suponga que quiere encontrar las coordenadas del punto medio de un segmento de recta. Sea $P(x, y)$ el punto medio del segmento de recta desde $A(x_1, y_1)$ hasta $B(x_2, y_2)$. Con el método del problema 68, la fórmula para la coordenada x del punto medio es $x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$. Esta fórmula se puede simplificar algebraicamente para producir una fórmula más

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$$x = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1$$

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

simple.

Por tanto, la coordenada x del punto medio se puede interpretar como el promedio de las coordenadas x de los puntos extremos del segmento de recta. Un argumento similar para la coordenada y del punto medio produce la siguiente fórmula:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Para cada uno de los pares de puntos, use la fórmula para encontrar el punto medio del segmento de recta entre los puntos:

(a) (3, 1) y (7, 5)
(b) (−2, 8) y (6, 4)
(c) (−3, 2) y (5, 8)
(d) (4, 10) y (9, 25)
(e) (−4, −1) y (−10, 5)
(f) (5, 8) y (−1, 7)

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

71. Recuerde que en las actividades con calculadora graficadora del conjunto de problemas 7.1, se trabajó con rectas paralelas. Ahora lo hará con rectas perpendiculares. Asegúrese de establecer fronteras de modo que la distancia entre las marcas gruesas sea la misma en ambos ejes.

(a) Grafique $y = 4x$ y $y = -\frac{1}{4}x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Parecen ser rectas perpendiculares?

(b) Grafique $y = 3x$ y $y = \frac{1}{3}x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Parecen ser rectas perpendiculares?

(c) Grafique $y = \frac{2}{5}x - 1$ y $y = -\frac{5}{2}x + 2$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Parecen ser rectas perpendiculares?

(d) Grafique $y = \frac{3}{4}x - 3$, $y = \frac{4}{3}x + 2$ y $y = -\frac{4}{3}x + 2$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Parecen ser un par de rectas perpendiculares?

(e) Sobre la base de sus resultados en las partes de la (a) a la (d), plantee un enunciado acerca de cómo puede reconocer rectas perpendiculares a partir de sus ecuaciones.

72. Para cada uno de los siguientes pares de ecuaciones (1) prediga si representan rectas paralelas, rectas perpendiculares o rectas que se intersecan mas no son perpendiculares, y (2) grafique cada par de rectas para comprobar sus predicciones:

(a) $5.2x + 3.3y = 9.4$ y $5.2x + 3.3y = 12.6$
(b) $1.3x - 4.7y = 3.4$ y $1.3x - 4.7y = 11.6$
(c) $2.7x + 3.9y = 1.4$ y $2.7x - 3.9y = 8.2$
(d) $5x - 7y = 17$ y $7x + 5y = 19$
(e) $9x + 2y = 14$ y $2x + 9y = 17$
(f) $2.1x + 3.4y = 11.7$ y $3.4x - 2.1y = 17.3$

7.5 Determinación de la ecuación de una recta

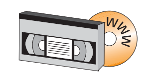
Para revisar, básicamente existen dos tipos de problemas a resolver en geometría coordenada:

1. Dada una ecuación algebraica, encontrar su gráfica geométrica.
2. Dado un conjunto de condiciones que pertenecen a una figura geométrica, encontrar su ecuación algebraica.

Los problemas del tipo 1 fueron la principal preocupación hasta el momento en este capítulo. Ahora se analizarán algunos problemas del tipo 2 que tratan específicamente con líneas rectas. Dados ciertos hechos acerca de una recta es necesario determinar su ecuación algebraica. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto $(1, 2)$.



Solución

Primero dibuje la recta y registre la información dada. Luego elija un punto (x, y) que represente cualquier punto sobre la recta distinta al punto dado $(1, 2)$. (Vea la figura 7.45.)

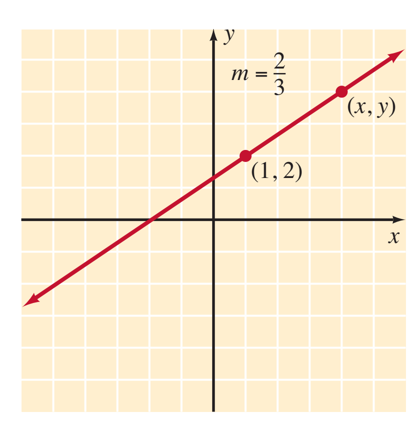


Figura 7.45

La pendiente determinada por $(1, 2)$ y (x, y) es $\frac{2}{3}$. Por tanto,

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$2(x-1) = 3(y-2)$$

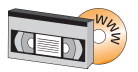
$$2x - 2 = 3y - 6$$

$$2x - 3y = -4$$

■

EJEMPLO 2

Encuentre la ecuación de la recta que contiene $(3, 2)$ y $(-2, 5)$



Solución

Primero dibuje la recta determinada por los puntos dados (figura 7.46); si conoce dos puntos puede encontrar la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

Ahora puede usar el mismo método que en el ejemplo 1.

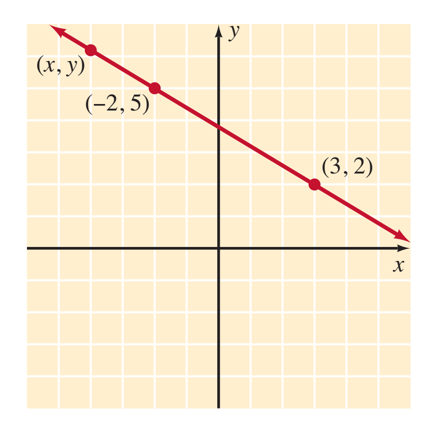


Figura 7.46

Forme una ecuación mediante un punto variable (x, y), uno de los dos puntos dados y la pendiente de $-\frac{3}{5}$.

$$\frac{y-5}{x+2} = \frac{3}{-5} \qquad \left(-\frac{3}{5} = \frac{3}{-5}\right)$$

$$3(x+2) = -5(y-5)$$

$$3x + 6 = -5y + 25$$

$$3x + 5y = 19$$

■

EJEMPLO 3

Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente de $\frac{1}{4}$ y una ordenada al origen de 2.

Solución

Una ordenada al origen de 2 significa que el punto (0, 2) está sobre la recta (figura 7.47).

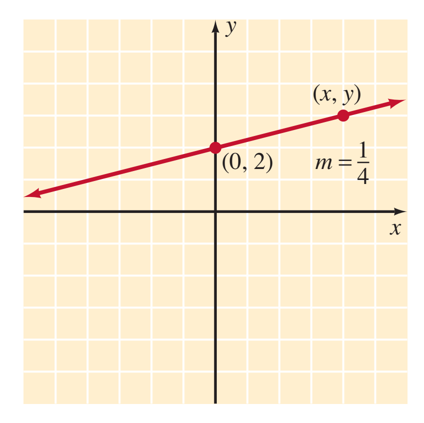


Figura 7.47

Elija un punto variable (x, y) y proceda como en los ejemplos anteriores.

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{1}{4}$$

$$1(x-0) = 4(y-2)$$

$$x = 4y - 8$$

$$x - 4y = -8$$

■

Tal vez sería útil detenerse un momento y estudiar nuevamente los ejemplos 1, 2 y 3. Observe que se usó el mismo método básico en las tres situaciones. Se elige un punto variable (x, y) y se le usa para determinar la ecuación que satisfaga las condiciones dadas en el problema. El método que se tomó en los ejemplos anteriores se puede generalizar para producir algunas formas especiales de ecuaciones de líneas rectas.

Forma punto-pendiente

EJEMPLO 4

Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de m y contiene el punto (x, y).

Solución

Elija (x, y) para representar cualquier otro punto sobre la recta (figura 7.48) y, por tanto, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \qquad x \neq x_1$$

de donde

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

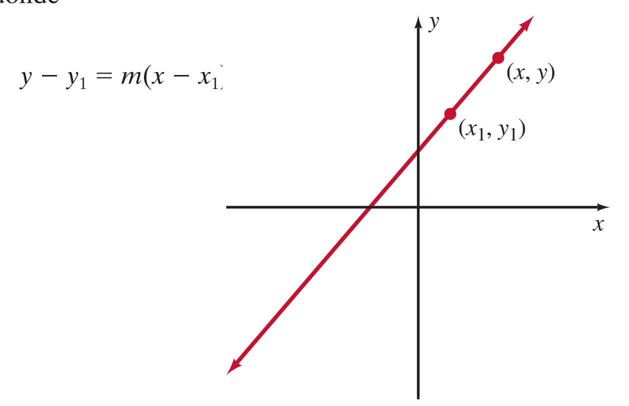


Figura 7.48

■

A la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

se le conoce como **forma punto-pendiente** de la ecuación de una línea recta. En lugar del método que se utilizó en el ejemplo 1 podría usar la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de una recta con una pendiente dada que contenga un punto dado. Por ejemplo, puede determinar la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $\frac{3}{5}$ y contiene el punto (2, 4) del modo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituya (2, 4) por (x_1, y_1) y $\frac{3}{5}$ por m.

$$y - 4 = \frac{3}{5}(x - 2)$$

$$5(y - 4) = 3(x - 2)$$

$$5y - 20 = 3x - 6$$

$$-14 = 3x - 5y$$

Forma pendiente-ordenada al origen

EJEMPLO 5

Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de m y una ordenada al origen de b.

Solución

Una ordenada al origen de b significa que la recta contiene el punto $(0, b)$, como en la figura 7.49. Por tanto, puede usar la forma punto-pendiente del modo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0)$$
$$y - b = mx$$
$$y = mx + b$$

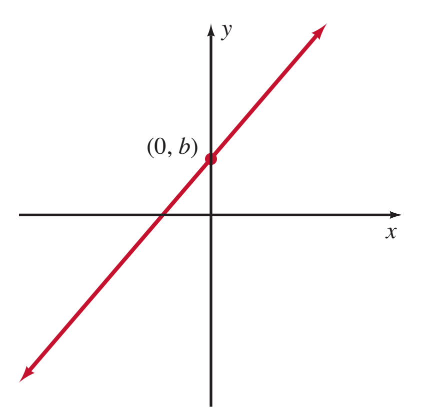


Figura 7.49 ■

A la ecuación

$$y = mx + b$$

se le conoce como **forma pendiente-ordenada al origen** de la ecuación de una línea recta. Se le usa para tres propósitos principales, como ilustran los siguientes tres ejemplos.

EJEMPLO 6

Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$ y una ordenada al origen de 2.

Solución

Éste es un nuevo enunciado del ejemplo 3, pero esta vez se usará la forma pendiente-ordenada al origen $(y = mx + b)$ de una línea para escribir su ecuación. Dado que $m = \frac{1}{4}$ y $b = 2$ puede sustituir estos valores en $y = mx + b$.

$$y = mx + b$$
$$y = \frac{1}{4}x + 2$$
$$4y = x + 8 \qquad \text{Multiplique ambos lados por 4.}$$
$$x - 4y = -8 \qquad \text{Mismo resultado que en el ejemplo 3.}$$ ■

EJEMPLO 7

Encuentre la pendiente de la recta cuando la ecuación es $3x + 2y = 6$

Solución

Puede resolver la ecuación para y en términos de x y luego compararla con la forma pendiente-ordenada al origen para determinar su pendiente. Por tanto

$$3x + 2y = 6$$

$$2y = -3x + 6$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \qquad y = mx + b$$

La pendiente de la recta es $-\frac{3}{2}$. Más aún, la ordenada al origen es 3. ■

EJEMPLO 8

Grafique la recta determinada por la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$

Solución

Al comparar la ecuación dada con la forma general pendiente-ordenada al origen se ve que la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es -1. Puesto que la ordenada al origen es -1 puede graficar el punto $(0, -1)$. Entonces, dado que la pendiente es $\frac{2}{3}$, muévase 3 unidades a la derecha y 2 unidades arriba desde $(0, -1)$ para ubicar el punto $(3, 1)$. Los dos puntos $(0, -1)$ y $(3, 1)$ determinan la recta en la figura 7.50. (De nuevo, debe determinar un tercer punto de comprobación.)

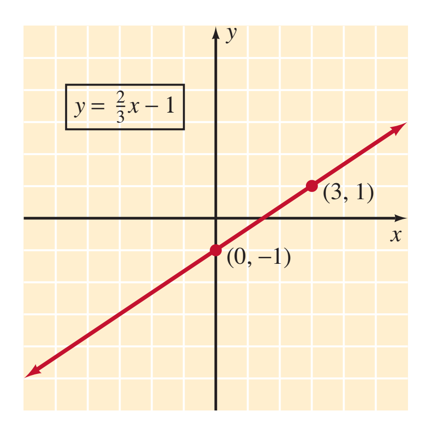


Figura 7.50 ■

En general, si la ecuación de una recta no vertical se escribe en forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$ el coeficiente de x es la pendiente de la recta, y el término constante es la ordenada al origen. (Recuerde que el concepto de pendiente no se define para una recta vertical.)

Rectas paralelas y perpendiculares

Es posible usar dos importantes relaciones entre rectas y sus pendientes para resolver ciertos tipos de problemas. Se puede demostrar que las rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente y que dos rectas no verticales son perpendiculares si el producto de sus pendientes es −1. (Los detalles para comprobar estos hechos se dejan para otro curso.) En otras palabras, si dos rectas tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

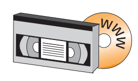
1. Las dos rectas son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

2. Las dos rectas son perpendiculares si y sólo si $(m_1)(m_2) = -1$.

Los siguientes ejemplos demuestran el uso de estas propiedades.

EJEMPLO 9

(a) Verifique que las gráficas de $2x + 3y = 7$ y $4x + 6y = 11$ son rectas paralelas.
(b) Verifique que las gráficas de $8x - 12y = 3$ y $3x + 2y = 2$ son rectas perpendiculares.



Solución

(a) Cambie cada ecuación a forma pendiente-ordenada al origen.

$$2x + 3y = 7 \rightarrow 3y = -2x + 7$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$
$$4x + 6y = 11 \rightarrow 6y = -4x + 11$$
$$y = -\frac{4}{6}x + \frac{11}{6}$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{6}$$

Ambas rectas tienen una pendiente de $-\frac{2}{3}$, pero tienen diferentes ordenadas al origen. Por tanto, las dos rectas son paralelas.

(b) Al resolver cada ecuación para y en términos de x se obtiene

$$8x - 12y = 3 \rightarrow -12y = -8x + 3$$
$$y = \frac{8}{12}x - \frac{3}{12}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$$

$$3x + 2y = 2 \quad \rightarrow \quad 2y = -3x + 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

Puesto que $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ (el producto de las dos pendientes es -1), las rectas son perpendiculares. ■

Observaciones: El enunciado "el producto de dos pendientes es -1" es lo mismo decir que las dos pendientes son recíprocos negativos mutuos; esto es, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

EJEMPLO 10

Encuentre la ecuación de la recta que contiene el punto (1, 4) y es paralela a la recta determinada por $x + 2y = 5$.

Solución

Primero dibuje una figura para auxiliarse en el análisis del problema (figura 7.51). Puesto que la recta a través de (1, 4) será paralela a la recta determinada por $x + 2y = 5$ debe tener la misma pendiente. Encuentre la pendiente al cambiar $x + 2y = 5$ a la forma pendiente-ordenada al origen.

$$x + 2y = 5$$

$$2y = -x + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

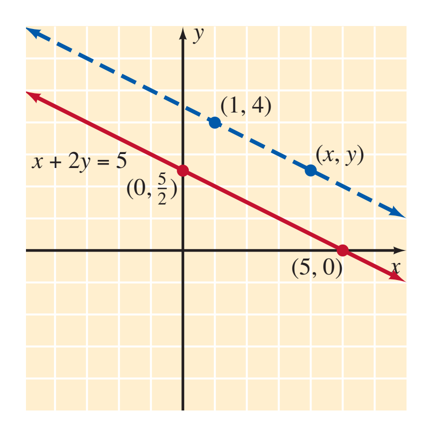


Figura 7.51

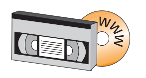
La pendiente de ambas rectas es $-\frac{1}{2}$. Ahora puede elegir un punto variable (x, y) sobre la recta a través de (1, 4) y proceder como en ejemplos anteriores.

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{1}{-2}$$
$$1(x-1) = -2(y-4)$$
$$x-1 = -2y+8$$
$$x+2y = 9$$

■

EJEMPLO 11

Encuentre la ecuación de la recta que contiene el punto $(-1, -2)$ y es perpendicular a la recta determinada por $2x - y = 6$.



Solución

Primero dibuje una figura para auxiliarse en el análisis del problema (figura 7.52). Puesto que la recta a través de $(-1, -2)$ será perpendicular a la recta determinada por $2x - y = 6$, su pendiente debe ser el recíproco negativo de la pendiente de $2x - y = 6$. Encuentre la pendiente de $2x - y = 6$ al cambiarla a la forma pendiente-ordenada al origen.

$$2x - y = 6$$
$$-y = -2x + 6$$
$$y = 2x - 6$$

La pendiente es 2.

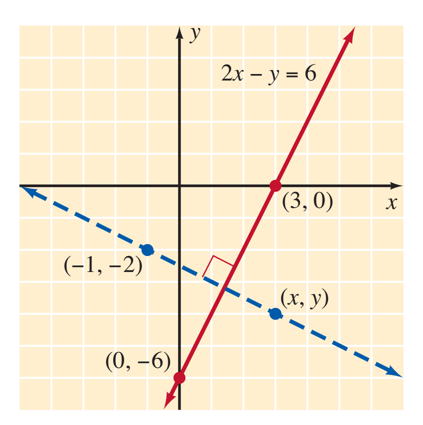


Figura 7.52

La pendiente de la recta deseada es $-\frac{1}{2}$ (el recíproco negativo de 2) y se puede proceder como antes al usar un punto variable (x, y).

$$\frac{y+2}{x+1} = \frac{1}{-2}$$
$$1(x+1) = -2(y+2)$$
$$x+1 = -2y-4$$
$$x+2y = -5$$

■

Dos formas de ecuaciones de líneas rectas se usan ampliamente. Son la **forma estándar** y la **forma pendiente-ordenada al origen** y se les describe del modo siguiente.

Forma estándar $Ax + By = C$, donde B y C son enteros, y A es un entero no negativo (A y B no son cero).

Forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es un número real que representa la pendiente y b es un número real que representa la ordenada al origen.

Conjunto de problemas 7.5

Para los problemas 1-8 escriba la ecuación de la recta que tiene la pendiente indicada y contiene el punto indicado. Exprese las ecuaciones finales en forma estándar.

1. $m = \frac{1}{2}$, $(3, 5)$

2. $m = \frac{1}{3}$, $(2, 3)$

3. $m = 3$, $(-2, 4)$

4. $m = -2$, $(-1, 6)$

5. $m = -\frac{3}{4}$, $(-1, -3)$

6. $m = -\frac{3}{5}$, $(-2, -4)$

7. $m = \frac{5}{4}$, $(4, -2)$

8. $m = \frac{3}{2}$, $(8, -2)$

Para los problemas 9-18 escriba la ecuación de la recta que contenga el par de puntos indicados. Exprese las ecuaciones finales en forma estándar.

9. $(2, 1)$, $(6, 5)$

10. $(-1, 2)$, $(2, 5)$

11. $(-2, -3)$, $(2, 7)$

12. $(-3, -4)$, $(1, 2)$

13. $(-3, 2)$, $(4, 1)$

14. $(-2, 5)$, $(3, -3)$

15. $(-1, -4)$, $(3, -6)$

16. $(3, 8)$, $(7, 2)$

17. $(0, 0)$, $(5, 7)$

18. $(0, 0)$, $(-5, 9)$

Para los problemas 19-26 escriba la ecuación de la recta que tiene la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) indicadas. Exprese las ecuaciones finales en forma pendiente-ordenada al origen.

19. $m = \frac{3}{7}$, $b = 4$

20. $m = \frac{2}{9}$, $b = 6$

21. $m = 2$, $b = -3$

22. $m = -3$, $b = -1$

23. $m = -\frac{2}{5}$, $b = 1$

24. $m = -\frac{3}{7}$, $b = 4$

25. $m = 0$, $b = -4$

26. $m = \frac{1}{5}$, $b = 0$

Para los problemas 27-42 escriba la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Exprese las ecuaciones finales en forma estándar.

27. Abscisa al origen de 2 y ordenada al origen de -4

28. Abscisa al origen de -1 y ordenada al origen de -3

29. Abscisa al origen de -3 y pendiente de $-\frac{5}{8}$

30. Abscisa al origen de 5 y pendiente de $-\frac{3}{10}$

31. Contiene el punto $(2, -4)$ y es paralela al eje y

32. Contiene el punto $(-3, -7)$ y es paralela al eje x

33. Contiene el punto $(5, 6)$ y es perpendicular al eje y

34. Contiene el punto $(-4, 7)$ y es perpendicular al eje x

35. Contiene el punto $(1, 3)$ y es paralela a la línea $x + 5y = 9$

36. Contiene el punto $(-1, 4)$ y es paralela a la línea $x - 2y = 6$

37. Contiene el origen y es paralela a la línea $4x - 7y = 3$

38. Contiene el origen y es paralela a la línea $-2x - 9y = 4$

39. Contiene el punto $(-1, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - y = 4$

40. Contiene el punto $(-2, -3)$ y es perpendicular a la recta $x + 4y = 6$

41. Contiene el origen y es perpendicular a la recta $-2x + 3y = 8$

42. Contiene el origen y es perpendicular a la recta $y = -5x$

Para los problemas 43-48 cambie la ecuación a forma pendiente-ordenada al origen y determine la pendiente y la ordenada al origen de la recta.

43. $3x + y = 7$

44. $5x - y = 9$

45. $3x + 2y = 9$

46. $x - 4y = 3$

47. $x = 5y + 12$

48. $-4x - 7y = 14$

Para los problemas 49-56 use la forma pendiente-ordenada al origen para graficar las rectas siguientes.

49. $y = \frac{2}{3}x - 4$

50. $y = \frac{1}{4}x + 2$

51. $y = 2x + 1$

52. $y = 3x - 1$

53. $y = -\frac{3}{2}x + 4$

54. $y = -\frac{5}{3}x + 3$

55. $y = -x + 2$

56. $y = -2x + 4$

Para los problemas 57-66 grafique las rectas siguientes usando la técnica que parezca más adecuada.

57. $y = -\frac{2}{5}x - 1$

58. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

59. $x + 2y = 5$

60. $2x - y = 7$

61. $-y = -4x + 7$

62. $3x = 2y$

63. $7y = -2x$

64. $y = -3$

65. $x = 2$

66. $y = -x$

Para los problemas 67-70, las situaciones se pueden describir con el uso de ecuaciones lineales con dos variables. Si se conocen dos pares de valores, entonces puede determinar la ecuación con el método que se utilizó en el ejemplo 2 de esta sección. Para cada uno de los siguientes suponga que la relación se puede expresar como una ecuación lineal con dos variables, y use la información dada para determinar la ecuación. Exprese la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

67. Una compañía usa 7 libras de fertilizante para un terreno que mide 5000 pies cuadrados y 12 libras para un terreno que mide 10 000 pies cuadrados. Sea y las libras de fertilizante y x el pietaje cuadrado del terreno.

68. Una dieta reciente afirma que una persona que pese 140 libras debe consumir 1490 calorías diarias y que una persona de 200 libras debe consumir 1700 calorías. Sea y las calorías y x el peso de la persona en libras.

69. Dos bancos en esquinas opuestas de una ciudad cuadrada tienen señales que muestran la temperatura actual. Un banco muestra la temperatura en grados Celsius y el otro en grados Fahrenheit. Una temperatura de 10ºC se muestra al mismo tiempo que una temperatura de 50ºF. Otro día, una temperatura de −5ºC se muestra al mismo tiempo que una temperatura de 23ºF. Sea y la temperatura en grados Fahrenheit y x la temperatura en grados Celsius.

70. Un contador tiene un programa de depreciación para algunos equipos comerciales. El programa muestra que, después de 12 meses, el equipo vale $7600 y que después de 20 meses vale $6000. Sea y el valor y x el tiempo en meses.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

71. ¿Qué quiere decir que dos puntos determinan una recta?

72. ¿Cómo ayudaría a un amigo a determinar la ecuación de la recta que es perpendicular a $x - 5y = 7$ y contiene el punto $(5, 4)$?

73. Explique cómo encontraría la pendiente de la recta $y = 4$.

MÁS INVESTIGACIÓN

74. La ecuación de una recta que contiene los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Con frecuencia, a tal ecuación se le refiere como **forma de dos puntos** de la ecuación de una línea recta. Use la forma de dos puntos y escriba la ecuación o la recta que contiene cada uno de los pares de puntos indicados. Exprese las ecuaciones finales en forma estándar:

(a) $(1, 1)$ y $(5, 2)$
(b) $(2, 4)$ y $(-2, -1)$
(c) $(-3, 5)$ y $(3, 1)$
(d) $(-5, 1)$ y $(2, -7)$

75. Sean $Ax + By = C$ y $A'x + B'y = C'$ dos rectas. Cambie ambas ecuaciones a forma pendiente-ordenada al origen y luego verifique cada una de las siguientes propiedades:

(a) Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, entonces las rectas son paralelas.
(b) Si $AA' = -BB'$, entonces las rectas son perpendiculares.

76. Las propiedades del problema 75 proporcionan otra forma de escribir la ecuación de una recta paralela o perpendicular a una recta dada que contenga un punto dado no sobre la recta. Por ejemplo, suponga que quiere que la ecuación de la línea perpendicular a $3x + 4y = 6$ contenga el punto $(1, 2)$. La forma $4x - 3x = k$, donde k es una constante, representa una familia de rectas perpendiculares a $3x + 4y = 6$, porque se satisface la condición $AA' = -BB'$. Por tanto, para encontrar cuál línea específica de la familia contiene $(1, 2)$, sustituya 1 por x y 2 por y para determinar k.

$$4x - 3y = k$$
$$4(1) - 3(2) = k$$
$$-2 = k$$

Por tanto, la ecuación de la recta deseada es $4x - 3y = -2$.

Use las propiedades del problema 75 para escribir la ecuación de cada una de las rectas siguientes:

(a) Contiene $(1, 8)$ y es paralela a $2x + 3y = 6$
(b) Contiene $(-1, 4)$ y es paralela a $x - 2y = 4$
(c) Contiene $(2, -7)$ y es perpendicular a $3x - 5y = 10$
(d) Contiene $(-1, -4)$ y es perpendicular a $2x + 5y = 12$

77. El problema de encontrar el bisector perpendicular de un segmento de recta se presenta con frecuencia en el estudio de la geometría analítica. Como con cualquier problema de escribir la ecuación de una recta, debe determinar la pendiente de la recta y un punto por el que pase la recta. Un bisector perpendicular pasa a través del punto medio del segmento de recta y tiene una pendiente que es el recíproco negativo de la pendiente del segmento de recta. El problema se puede resolver del modo siguiente:

Encuentre el bisector perpendicular del segmento de recta entre los puntos $(1, -2)$ y $(7, 8)$.

El punto medio del segmento de recta es $\left(\frac{1 + 7}{2}, \frac{-2 + 8}{2}\right) = (4, 3)$.

La pendiente del segmento de recta es $m = \frac{8 - (-2)}{7 - 1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Por tanto, el bisector perpendicular pasará a través del punto $(4, 3)$ y tiene una pendiente de $m = -\frac{3}{5}$.

$$y - 3 = -\frac{3}{5}(x - 4)$$
$$5(y - 3) = -3(x - 4)$$
$$5y - 15 = -3x + 12$$
$$3x + 5y = 27$$

Por tanto, la ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta entre los puntos $(1, -2)$ y $(7, 8)$ es $3x + 5y = 27$.

Encuentre el bisector perpendicular del segmento de recta entre los puntos para las siguientes coordenadas. Escriba la ecuación en forma estándar:

(a) $(-1, 2)$ y $(3, 0)$
(b) $(6, -10)$ y $(-4, 2)$
(c) $(-7, -3)$ y $(5, 9)$
(d) $(0, 4)$ y $(12, -4)$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

78. Prediga si cada uno de los siguientes pares de ecuaciones representan rectas paralelas, rectas perpendiculares o rectas que se intersecan pero no son perpendiculares. Luego grafique cada par de rectas para comprobar sus predicciones. (Las propiedades que se presentan en el problema 75 serán muy útiles.)

(a) $5.2x + 3.3y = 9.4$ y $5.2x + 3.3y = 12.6$
(b) $1.3x - 4.7y = 3.4$ y $1.3x - 4.7y = 11.6$
(c) $2.7x + 3.9y = 1.4$ y $2.7x - 3.9y = 8.2$
(d) $5x - 7y = 17$ y $7x + 5y = 19$
(e) $9x + 2y = 14$ y $2x + 9y = 17$
(f) $2.1x + 3.4y = 11.7$ y $3.4x - 2.1y = 17.3$
(g) $7.1x - 2.3y = 6.2$ y $2.3x + 7.1y = 9.9$
(h) $-3x + 9y = 12$ y $9x - 3y = 14$
(i) $2.6x - 5.3y = 3.4$ y $5.2x - 10.6y = 19.2$
(j) $4.8x - 5.6y = 3.4$ y $6.1x + 7.6y = 12.3$

Capítulo 7 Resumen

(7.1) El **sistema de coordenadas cartesianas** (o **rectangulares**) se usa para graficar pares ordenados de números reales. El primer número, a, del par ordenado (a, b) se llama **abscisa**, y el segundo número, b, se llama **ordenada**; en conjunto, se les conoce como las **coordenadas** de un punto.

En geometría coordenada existen dos tipos básicos de problemas:

1. Dada una ecuación algebraica, encontrar su gráfica geométrica.
2. Dado un conjunto de condiciones que pertenezcan a una figura geométrica, encontrar su ecuación algebraica.

Una **solución** de una ecuación con dos variables es un par ordenado de números reales que satisfacen la ecuación.

Cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son constantes (A y B no son cero) y x y y son variables, es una **ecuación lineal** y su gráfica es una **línea recta**.

Cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde $C = 0$, es una línea recta que contiene el origen.

Cualquier ecuación de la forma $x = a$, donde a es una constante, es una recta paralela al eje y que tiene una abscisa al origen de a.

Cualquier ecuación de la forma $y = b$, donde b es una constante, es una recta paralela al eje x que tiene una ordenada al origen de b.

(7.2) Las siguientes sugerencias se ofrecen para **graficar una ecuación** con dos variables.

1. Determine qué tipo de simetría muestra la ecuación.
2. Encuentre las intersecciones con los ejes.
3. Resuelva la ecuación para y en términos de x o para x en términos de y, si no está ya en esta forma.
4. Elabore una tabla de pares ordenados que satisfaga la ecuación. El tipo de simetría afectará su elección de valores en la tabla.
5. Grafique los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla, y conéctelos con una curva continua. Luego, si es adecuado, refleje esta parte de la curva de acuerdo con la simetría que muestre la ecuación.

(7.3) Las **desigualdades lineales** en dos variables son de la forma $Ax + By > C$ o $Ax + By < C$. Para **graficar una desigualdad lineal** se sugieren los siguientes pasos:

1. Primero grafique la igualdad correspondiente. Use una recta continua si la igualdad se incluye en el enunciado original. Use una recta discontinua si la igualdad no se incluye.
2. Elija un punto de prueba que no esté sobre la recta y sustituya sus coordenadas en la desigualdad.
3. La gráfica de la desigualdad original es
   (a) el medio plano que contiene el punto de prueba, si la desigualdad se satisface por dicho punto, o
   (b) el medio plano que no contiene el punto de prueba, si la desigualdad no se satisface por el punto.

(7.4) La distancia entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la **fórmula de distancia**,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La **pendiente** (denotada con m) de una recta determinada por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula de pendiente,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_2 \neq x_1$$

(7.5) La ecuación $y = mx + b$ se conoce como **forma pendiente-ordenada al origen** de la ecuación de una línea recta. Si la ecuación de una recta no vertical se escribe en esta forma y, el coeficiente de x es la pendiente de la recta y el término constante es la ordenada al origen.

Si dos rectas tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

1. Las dos rectas son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. Las dos rectas son perpendiculares si y sólo si $(m_1)(m_2) = -1$.

Para determinar la ecuación de una línea recta dado un conjunto de condiciones, puede usar la forma punto-pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$, o $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$. Por lo general, las condiciones caen en una de las siguientes cuatro categorías:

1. Dada la pendiente y un punto contenido en la recta
2. Dados dos puntos contenidos en la recta
3. Dado un punto contenido en la recta y que la recta es paralela a otra recta
4. Dado un punto contenido en la recta y que la recta es perpendicular a otra recta

Entonces el resultado se puede expresar en forma estándar o forma pendiente-ordenada al origen.

Capítulo 7 Conjunto de problemas de repaso

1. Encuentre la pendiente de la recta determinada por cada par de puntos.

(a) $(3, 4), (-2, -2)$ **(b)** $(-2, 3), (4, -1)$

2. Encuentre y si la recta a través de $(-4, 3)$ y $(12, y)$ tiene una pendiente de $\frac{1}{8}$.

3. Encuentre x si la recta a través de $(x, 5)$ y $(3, -1)$ tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$.

4. Encuentre la pendiente de cada una de las siguientes rectas.

(a) $4x + y = 7$ **(b)** $2x - 7y = 3$

5. Encuentre las longitudes de los lados de un triángulo cuyos vértices están en $(2, 3)$, $(5, -1)$ y $(-4, -5)$.

6. Encuentre la distancia entre cada uno de los pares de puntos.

(a) $(-1, 4), (1, -2)$ **(b)** $(5, 0), (2, 7)$

7. Verifique que $(1, 6)$ es el punto medio del segmento de recta que une $(3, 2)$ y $(-1, 10)$.

Para los problemas 8-15 escriba la ecuación de la recta que satisface las condiciones mencionadas. Exprese las ecuaciones finales en forma estándar.

8. Contiene los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -5)$

9. Tiene una pendiente de $-\frac{3}{7}$ y una ordenada al origen de 4

10. Contiene el punto $(-1, -6)$ y tiene una pendiente de $\frac{2}{3}$

11. Contiene el punto $(2, 5)$ y es paralela a la recta $x - 2y = 4$

12. Contiene el punto $(-2, -6)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y = 12$

13. Contiene los puntos $(0, 4)$ y $(2, 6)$

14. Contiene el punto $(3, -5)$ y tiene una pendiente de -1

15. Contiene el punto $(-8, 3)$ y es paralela a la recta $4x + y = 7$

Para los problemas 16-35 grafique cada ecuación.

16. $2x - y = 6$

17. $y = 2x - 5$

18. $y = -2x - 1$

19. $y = -4x$

20. $-3x - 2y = 6$

21. $x = 2y + 4$

22. $5x - y = -5$

23. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

24. $y = \dfrac{3x - 4}{2}$

25. $y = 4$

26. $2x + 3y = 0$

27. $y = \frac{3}{5}x - 4$

28. $x = 1$

29. $x = -3$

30. $y = -2$

31. $2x - 3y = 3$

32. $y = x^3 + 2$

33. $y = -x^3$

34. $y = x^2 + 3$

35. $y = -2x^2 - 1$

Para los problemas 36-41 grafique cada desigualdad.

36. $-x + 3y < -6$

37. $x + 2y \geq 4$

38. $2x - 3y \leq 6$

39. $y > -\frac{1}{2}x + 3$

40. $y < 2x - 5$

41. $y \geq \frac{2}{3}x$

42. Cierta autopista tiene un peralte de 6%. ¿Cuántos pies se eleva en una distancia horizontal de 1 milla?

43. Si la razón de contrahuella a huella será de $\frac{2}{3}$ para los escalones de una escalera, y la huella es de 12 pulgadas, encuentre la contrahuella.

44. Encuentre la pendiente de cualquier recta que sea perpendicular a la recta $-3x + 5y = 7$.

45. Encuentre la pendiente de cualquier recta que sea paralela a la recta $4x + 5y = 10$.

46. Los impuestos para una residencia se pueden describir mediante una relación recta. Encuentre la ecuación

para la relación si los impuestos para una casa valuada en \$200 000 son de \$2400, y los impuestos son de \$3150 cuando la casa se valúa en \$250 000. Sea y los impuestos y x el valor de la casa. Escriba la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

47. El cargo que cobra una empresa de transportación por un paquete que pesa menos de 200 libras depende de las millas que se le transportará. Para transportar 300 millas un paquete de 150 libras, el costo es de \$40. Si el mismo paquete se transporta 1000 millas, el costo es de \$180. Suponga que la relación entre el costo y las millas es lineal. Encuentre la ecuación para la relación. Sea y el costo y x las millas. Escriba la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

48. En un examen final en la clase de matemáticas, el número de puntos obtenidos tiene una relación lineal con el número de respuestas correctas. John obtuvo 96 puntos cuando respondió correctamente 12 preguntas. Kimberly obtuvo 144 puntos cuando respondió correctamente 18 preguntas. Encuentre la ecuación para la relación. Sea y el número de puntos y x el número de respuestas correctas. Escriba la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

49. El tiempo necesario para instalar cables de computadora tiene una relación lineal con el número de pies de cable a instalar. Si tarda $1\frac{1}{2}$ horas en instalar 300 pies, y 1050 pies se pueden instalar en 4 horas. Encuentre la ecuación para la relación. Sea y los pies de cable instalados y x el tiempo en horas. Escriba la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

50. Determine el tipo(s) de simetría (simetría con respecto al eje x, al eje y y/o el origen) que muestra la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones. No bosqueje la gráfica.

(a) $y = x^2 + 4$ **(b)** $xy = -4$
(c) $y = -x^3$ **(d)** $x = y^4 + 2y^2$

Capítulo 7 Examen

1. Encuentre la pendiente de la recta determinada por los puntos $(-2, 4)$ y $(3, -2)$.

2. Encuentre la pendiente de la recta determinada por la ecuación $3x - 7y = 12$.

3. Encuentre la longitud del segmento de recta cuyos puntos extremos son $(4, 2)$ y $(-3, -1)$. Exprese la respuesta en la forma radical más simple.

4. Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$ y contiene el punto $(4, -5)$. Exprese la ecuación en forma estándar.

5. Encuentre la ecuación de la recta que contiene los puntos $(-4, 2)$ y $(2, 1)$. Exprese la ecuación en forma pendiente-ordenada al origen.

6. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a la línea $5x + 2y = 7$ y contiene el punto $(-2, -4)$. Exprese la ecuación en forma estándar.

7. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $x - 6y = 9$ y contiene el punto $(4, 7)$. Exprese la ecuación en forma estándar.

8. ¿Qué tipo(s) de simetría muestra la gráfica de $y = 9x$?

9. ¿Qué tipo(s) de simetría muestra la gráfica de $y^2 = x^2 + 6$?

10. ¿Qué tipo(s) de simetría muestra la gráfica de $x^2 + 6x + 2y^2 - 8 = 0$?

11. ¿Cuál es la pendiente de todas las recta que son paralelas a la recta $7x - 2y = 9$?

12. ¿Cuál es la pendiente de todas las rectas que son perpendiculares a la recta $4x + 9y = -6$?

13. Encuentre la abscisa al origen de la línea $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}$.

14. Encuentre la ordenada al origen de la línea $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y = \frac{1}{4}$.

15. El peralte de una autopista en una colina es de 25%. ¿Cuánto cambio en distancia horizontal existe, si la altura vertical de la colina es de 120 pies?

16. Suponga que una autopista se eleva 200 pies en una distancia horizontal de 3000 pies. Exprese el peralte de la autopista a la décima porcentual más cercana.

17. Si la razón de contrahuella a huella será de $\frac{3}{4}$ para los escalones de una escalera, y la contrahuella es de 32 centímetros, encuentre la huella al centímetro más cercano.

Para los problemas 18-23 grafique cada ecuación.

18. $y = -x^2 - 3$

19. $y = -x - 3$

20. $-3x + y = 5$

21. $3y = 2x$

22. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2$

23. $y = \frac{-x - 1}{4}$

Para los problemas 24 y 25 grafique cada desigualdad.

24. $2x - y < 4$

25. $3x + 2y \geq 6$

8

Funciones

El precio de los bienes se puede decidir con el uso de una función para describir la relación entre el precio y la demanda. Tal función proporciona un medio para estudiar la demanda cuando el precio es variable.

© Dušan Račko | Dreamstime.com

© Michael Flippo | Dreamstime.com

La operadora de una tienda de artículos para golf descubre que puede vender 30 juegos de palos de golf en un año a $500 por juego. Más aún, predice que, por cada $25 de reducción en el precio, podría vender tres juegos adicionales de palos de golf. ¿A qué precio debe vender los palos para maximizar el ingreso bruto? Puede usar la función cuadrática $f(x) = (30 + 3x)(500 - 25x)$ para determinar que los palos se deben vender a $375 por juego.

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el de función. Las funciones unifican diferentes áreas de las matemáticas y también sirven para aplicar las matemáticas a muchos problemas. Proporcionan un medio para estudiar cantidades que varían mutuamente; esto es: un cambio en una produce un cambio correspondiente en otra. En este capítulo se (1) introducirán las ideas básicas pertenecientes a las funciones, (2) usará la idea de función para mostrar cómo se relacionan algunos conceptos de capítulos anteriores y (3) analizarán algunas aplicaciones en las que se usan las funciones.

8.1 Concepto de función

La noción de correspondencia se usa en situaciones cotidianas y es central al concepto de función. Considere las siguientes correspondencias.

1. A cada persona en una clase le corresponde un asiento asignado.
2. A cada día del año le corresponde un entero asignado que representa la temperatura promedio de dicho día en cierta ubicación geográfica.
3. A cada libro en una biblioteca le corresponde un número entero positivo que representa el número de páginas en el libro.

Tales correspondencias se pueden representar como en la figura 8.1. A cada miembro del conjunto A corresponde *uno y sólo un miembro* en el conjunto B. Por ejemplo, en la primera correspondencia, el conjunto A consistiría de los estudiantes en una clase, y el conjunto B sería los asientos asignados. En el segundo ejemplo, el conjunto A consistiría en los días de un año y el conjunto B sería un conjunto de enteros. Más aún, el mismo entero puede asignarse a más de un día del año. (Diferentes días pueden tener la misma temperatura promedio.) La idea clave es que *uno y sólo un* entero se asigna a *cada* día del año. Del mismo modo, en el tercer ejemplo, más de un libro puede tener el mismo número de páginas, pero a cada libro se le asigna uno y sólo un número de páginas.

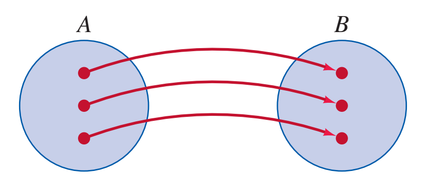


Figura 8.1

Matemáticamente, el concepto general de función se define del modo siguiente:

Definición 8.1

Una **función** f es una correspondencia entre dos conjuntos X y Y que asigna a cada elemento x del conjunto X uno y sólo un elemento y del conjunto Y. El elemento y a asignar se llama **imagen** de x. El conjunto X se llama **dominio** de la función y el conjunto de todas las imágenes se llama **rango** de la función.

En la definición 8.1 la imagen y usualmente se denota $f(x)$. Por tanto, el símbolo $f(x)$, que se lee "f de x" o "el **valor** de f en x", representa el elemento en el

rango asociado con el elemento x del dominio. La figura 8.2 muestra esta situación. De nuevo se destaca que cada número del dominio tiene precisamente una imagen en el rango; sin embargo, diferentes miembros en el dominio, como a y b en la figura 8.2, pueden tener la misma imagen.

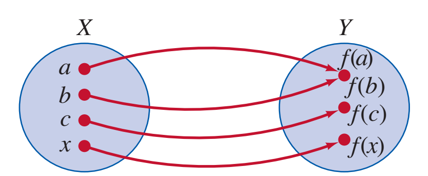


Figura 8.2

En la definición 8.1 la función se llamó f. Es común nombrar una función con una sola letra, y con frecuencia se usan las letras f, g y h. Cuando se usen funciones en situaciones del mundo real se sugieren elecciones más significativas. Por ejemplo, si un problema implica una función de ganancia (*profit*), entonces nombrar la función p o incluso P parece natural. Tenga cuidado de no confundir f y $f(x)$. Recuerde que f se usa para nombrar una función, mientras que $f(x)$ es un elemento del rango; a saber, el elemento asignado a x mediante f.

Las asignaciones hechas por una función con frecuencia se expresan como pares ordenados. Por ejemplo, las asignaciones en la figura 8.2 se podrían expresar como $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$, donde los primeros componentes son del dominio y los segundos componentes son del rango. Por ende, una función también se considera como un conjunto de pares ordenados donde ningún par de pares ordenados tiene el mismo primer componente.

Observaciones: En algunos textos primero se introduce el concepto de **relación**, y luego las funciones se definen como tipos especiales de relaciones. Una relación se define como un conjunto de pares ordenados y una función se define como una relación en la que ninguno de los pares ordenados tiene el mismo primer elemento.

Los pares ordenados que representan una función se generan a partir de varios medios, como una gráfica o diagrama. Sin embargo, una de las formas más comunes para generar pares ordenados es el uso de ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $f(x) = 2x + 3$ indica que, para cada valor de x en el dominio, se asigna $2x + 3$ del rango. Por ejemplo,

$f(1) = 2(1) + 3 = 5$ produce el par ordenado $(1, 5)$

$f(4) = 2(4) + 3 = 11$ produce el par ordenado $(4, 11)$

$f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$ produce el par ordenado $(-2, -1)$

Puede ser útil que usted visualice el concepto de una función en términos de una máquina de funciones, como se ilustra en la figura 8.3. Cada vez que un valor x se pone en la máquina, la ecuación $f(x) = 2x + 3$ se usa para generar uno y sólo un valor para $f(x)$ que salga de la máquina.

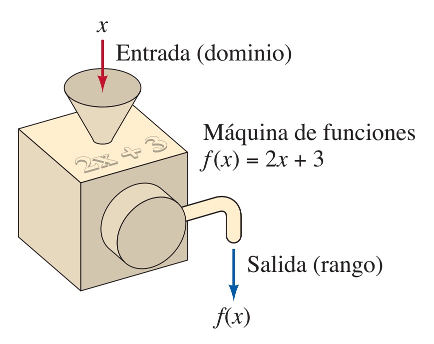


Figura 8.3

Al usar la interpretación de par ordenado de una función puede definir la **gráfica** de una función f como el conjunto de todos los puntos en un plano de la forma $(x, f(x))$, donde x es del dominio de f. En otras palabras, la gráfica de f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Más aún, puesto que $f(x)$, o y, toma sólo un valor para cada valor de x, fácilmente se puede decir si una gráfica dada representa una función. Por ejemplo, en la figura 8.4(a), para cualquier elección de x sólo hay un valor de y. Geométricamente esto significa que ninguna recta vertical interseca la curva en más de un punto. Por otra parte, la figura 8.4(b) no representa la gráfica de una función porque ciertos valores de x (todos valores positivos) producen más de un valor para y. En otras palabras, algunas rectas verticales intersecan la curva en más de un punto, como se ilustra en la figura 8.4(b). Una **prueba de recta vertical** para funciones se puede enunciar del modo siguiente.

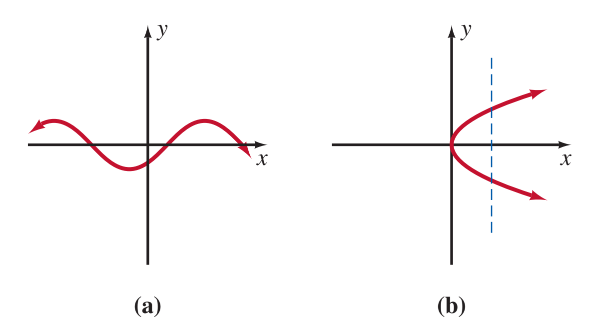


Figura 8.4

Prueba de recta vertical

Si cada recta vertical interseca una gráfica en no más de un punto, entonces la gráfica representa una función.

Considere algunos ejemplos para ilustrar estas ideas acerca de las funciones.

EJEMPLO 1

Si $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = x^3 - x^2$ encuentre $f(3)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(2a)$, $g(4)$, $g(-3)$, $g(m^2)$ y $g(-m)$.

Solución

$$f(3) = (3)^2 - (3) + 4 = 9 - 3 + 4 = 10 \qquad g(4) = 4^3 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 4 = 1 + 1 + 4 = 6 \qquad g(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 = -27 - 9 = -36$$

$$f(a) = (a)^2 - (a) + 4 = a^2 - a + 4 \qquad g(m^2) = (m^2)^3 - (m^2)^2 = m^6 - m^4$$

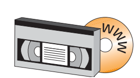
$$f(2a) = (2a)^2 - (2a) + 4 = 4a^2 - 2a + 4 \qquad g(-m) = (-m)^3 - (-m)^2 = -m^3 - m^2$$

■

Note que, en el ejemplo 1, se trabajó con dos funciones diferentes en el mismo problema. Es por esto que se usaron dos nombres diferentes, f y g. En ocasiones, la regla de asignación para una función consiste de más de una parte. Diferentes reglas se asignan dependiendo de x, el elemento en el dominio. Un ejemplo cotidiano de este concepto es que el precio de admisión a un parque temático depende de si se es niño, adulto o adulto mayor. En matemáticas, a tales funciones con frecuencia se les conoce como *funciones definidas en partes*. Considere un ejemplo de tal función.

EJEMPLO 2

Si $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \textit{para } x \geq 0 \\ 3x - 1 & \textit{para } x < 0 \end{cases}$, encuentre $f(2)$, $f(4)$, $f(-1)$ y $f(-3)$.



Solución

Para $x \geq 0$ use la asignación $f(x) = 2x + 1$.

$$f(2) = 2(2) + 1 = 5$$

$$f(4) = 2(4) + 1 = 9$$

Para $x < 0$ use la asignación $f(x) = 3x - 1$.

$$f(-1) = 3(-1) - 1 = -4$$

$$f(-3) = 3(-3) - 1 = -10$$

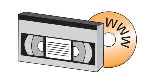
■

El cociente $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ con frecuencia se llama **cociente de diferencias**. Se le usa mucho con funciones cuando se estudia el concepto de límite en cálculo. Los siguientes ejemplos ilustran cómo encontrar el cociente de diferencias para funciones específicas.

EJEMPLO 3

Encuentre $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2 + 6$ **(b)** $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ **(c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Soluciones

(a) $f(a) = a^2 + 6$

$$f(a+h) = (a+h)^2 + 6 = a^2 + 2ah + h^2 + 6$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (a^2 + 2ah + h^2 + 6) - (a^2 + 6) \\ &= a^2 + 2ah + h^2 + 6 - a^2 - 6 \\ &= 2ah + h^2 \end{aligned}$$

y

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a + h$$

(b) $f(a) = 2a^2 + 3a - 4$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 + 3(a+h) - 4 \\ &= 2(a^2 + 2ha + h^2) + 3a + 3h - 4 \\ &= 2a^2 + 4ha + 2h^2 + 3a + 3h - 4 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (2a^2 + 4ha + 2h^2 + 3a + 3h - 4) - (2a^2 + 3a - 4) \\ &= 2a^2 + 4ha + 2h^2 + 3a + 3h - 4 - 2a^2 - 3a + 4 \\ &= 4ha + 2h^2 + 3h \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{4ha + 2h^2 + 3h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(4a + 2h + 3)}{\cancel{h}} \\ &= 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

(c) $f(a) = \dfrac{1}{a}$

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \\ &= \frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} \end{aligned}$$

Denominador común de $a(a+h)$.

$$= \frac{a - (a + h)}{a(a + h)}$$

$$= \frac{a - a - h}{a(a + h)}$$

$$= \frac{-h}{a(a + h)} \quad \text{o} \quad -\frac{h}{a(a + h)}$$

y

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{-\dfrac{h}{a(a + h)}}{h}$$

$$= -\frac{h}{a(a + h)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= -\frac{1}{a(a + h)}$$

■

Para los propósitos de este texto, si el dominio de una función no se indica de manera específica o se determina mediante una aplicación del mundo real, entonces se supondrá que el dominio es *todo número real* para sustituir a la variable, siempre que representen elementos en el dominio y produzcan valores funcionales de números reales.

EJEMPLO 4

Para la función $f(x) = \sqrt{x - 1}$, (a) especifique el dominio, (b) determine el rango y (c) evalúe $f(5)$, $f(50)$ y $f(25)$.

Soluciones

(a) El radical debe ser no negativo, de modo que $x - 1 \geq 0$ y por tanto $x \geq 1$. En consecuencia, el dominio (D) es

$$D = \{x | x \geq 1\}$$

(b) El símbolo $\sqrt{\ }$ indica la raíz cuadrada no negativa; por tanto, el rango (R) es

$$R = \{f(x) | f(x) \geq 0\}$$

(c) $f(5) = \sqrt{4} = 2$

$f(50) = \sqrt{49} = 7$

$f(25) = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

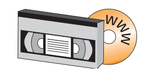
■

Como se verá más adelante, el rango de una función con frecuencia es más fácil de determinar después de haber graficado la función. Sin embargo, los procesos para resolver ecuaciones y desigualdades con frecuencia son suficientes para determinar el dominio de una función. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 5

Determine el dominio para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{3}{2x - 5}$ **(b)** $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ **(c)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$



Soluciones

(a) Es necesario eliminar cualquier valor de x que haga al denominador cero. Por tanto, resuelva la ecuación $2x - 5 = 0$:

$$2x - 5 = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Puede sustituir x con cualquier número real, excepto $\frac{5}{2}$, porque $\frac{5}{2}$ hace que el denominador sea cero. Por tanto, el dominio es

$$D = \left\{x \mid x \neq \frac{5}{2}\right\}$$

(b) Necesita eliminar cualquier valor de x que haga cero al denominador. Resuelva la ecuación $x^2 - 9 = 0$:

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

Por tanto, el dominio es el conjunto

$$D = \{x \mid x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$$

(c) El radicando, $x^2 + 4x - 12$, debe ser no negativo. Use un enfoque de recta numérica, como se hizo en el capítulo 6, para resolver la desigualdad $x^2 + 4x - 12 \geq 0$ (vea la figura 8.5):

$$x^2 + 4x - 12 \geq 0$$
$$(x + 6)(x - 2) \geq 0$$

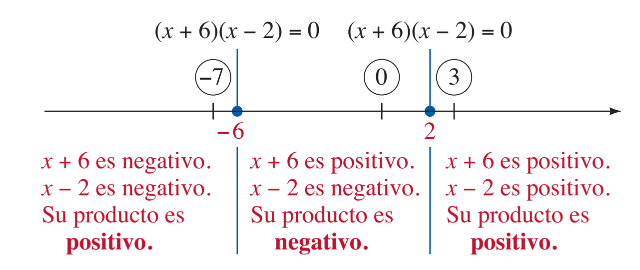


Figura 8.5

El producto $(x + 6)(x - 2)$ es no negativo si $x \leq -6$ o $x \geq 2$. Al usar notación de intervalo, el dominio se puede expresar como $(-\infty, -6] \cup [2, \infty)$. ■

Las funciones y la notación de función proporcional proporcionan la base para describir muchas relaciones del mundo real. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

EJEMPLO 6

Suponga que una fábrica determina que los costos operativos para producir una cantidad de cierto artículo es de \$500 y que el costo por cada artículo es de \$25. Exprese los gastos totales como función del número de artículos producidos y calcule los gastos para producir 12, 25, 50, 75 y 100 artículos.

Solución

Sea n el número de artículos producidos. Entonces $25n + 500$ representa los gastos totales. Al usar E para representar la función costo se tiene

$$E(n) = 25n + 500, \quad \text{donde } n \text{ es un número entero positivo}$$

Se obtiene

$$E(12) = 25(12) + 500 = 800$$
$$E(25) = 25(25) + 500 = 1125$$
$$E(50) = 25(50) + 500 = 1750$$
$$E(75) = 25(75) + 500 = 2375$$
$$E(100) = 25(100) + 500 = 3000$$

Por tanto, los gastos totales para producir 12, 25, 50, 75 y 100 artículos son \$800, \$1125, \$1750, \$2375 y \$3000, respectivamente. ■

Como se afirmó, una ecuación como $f(x) = 5x - 7$ que se usa para determinar una función también se puede escribir $y = 5x - 7$. En cualquier forma, a x se le conoce como **variable independiente** y a y, o $f(x)$, como la **variable dependiente**. Muchas fórmulas en matemáticas y otras áreas relacionadas también determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula de área para una región circular, $A = \pi r^2$, asigna a cada valor real positivo para r un valor único para A. Esta fórmula determina una función f, donde $f(r) = \pi r^2$. La variable r es la variable independiente y A, o $f(r)$, es la variable dependiente.

Conjunto de problemas 8.1

1. Si $f(x) = -2x + 5$, encuentre $f(3)$, $f(5)$ y $f(-2)$.

2. Si $f(x) = x^2 - 3x - 4$, encuentre $f(2)$, $f(4)$ y $f(-3)$.

3. Si $g(x) = -2x^2 + x - 5$, encuentre $g(3)$, $g(-1)$ y $g(2a)$.

4. Si $g(x) = -x^2 - 4x + 6$, encuentre $g(0)$, $g(5)$ y $g(-a)$.

5. Si $h(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$, encuentre $h(3)$, $h(4)$ y $h\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6. Si $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$, encuentre $h(-2)$, $h(6)$ y $h\left(-\frac{2}{3}\right)$.

7. Si $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, encuentre $f(5)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ y $f(23)$.

8. Si $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, encuentre $f\left(\frac{14}{3}\right)$, $f(10)$ y $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

9. Si $f(x) = -2x + 7$, encuentre $f(a)$, $f(a + 2)$ y $f(a + h)$.

10. Si $f(x) = x^2 - 7x$, encuentre $f(a)$ $f(a, -3)$ y $f(a + h)$.

11. Si $f(x) = x^2 - 4x + 10$, encuentre $f(-a)$, $f(a - 4)$ y $f(a + h)$.

12. Si $f(x) = 2x^2 - x - 1$, encuentre $f(-a)$, $f(a + 1)$ y $f(a + h)$.

13. Si $f(x) = -x^2 + 3x + 5$, encuentre $f(-a)$, $f(a + 6)$ y $f(-a + 1)$.

14. Si $f(x) = -x^2 - 2x - 7$, encuentre $f(-a)$, $f(-a - 2)$ y $f(a + 7)$.

15. Si $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$, encuentre $f(4)$, $f(10)$, $f(-3)$, y $f(-5)$.

16. Si $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{para } x \geq 0 \\ 5x - 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$, encuentre $f(2)$, $f(6)$, $f(-1)$ y $f(-4)$.

17. Si $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \geq 0 \\ -2x & \text{para } x < 0 \end{cases}$, encuentre $f(3)$, $f(5)$, $f(-3)$ y $f(-5)$.

18. Si $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ -1 & \text{para } x > 4 \end{cases}$, encuentre $f(3)$, $f(6)$, $f(0)$ y $f(-3)$.

19. Si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } -1 < x \leq 0 \\ -1 & \text{para } x \leq -1 \end{cases}$, encuentre $f(2)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $f(-4)$.

Para los problemas 20-31, encuentre $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

20. $f(x) = 4x + 5$

21. $f(x) = -7x - 2$

22. $f(x) = x^2 - 3x$

23. $f(x) = -x^2 + 4x - 2$

24. $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

25. $f(x) = 3x^2 - x - 4$

26. $f(x) = x^3$

27. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

29. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

31. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Para los problemas 32-39 (figuras de la 8.6 a la 8.13), determine si la gráfica indicada representa una función de x.

32.

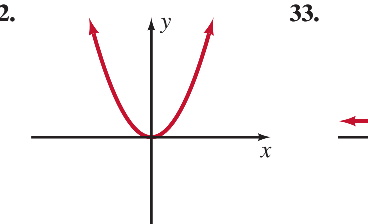


Figura 8.6

33.

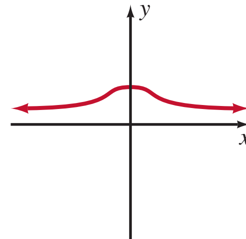


Figura 8.7

34.

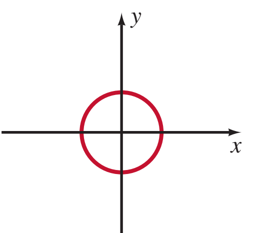


Figura 8.8

35.

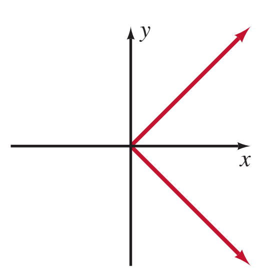


Figura 8.9

36.

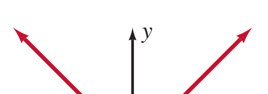
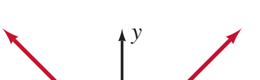



Figura 8.10

37.

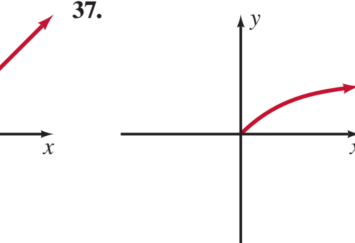


Figura 8.11

38.

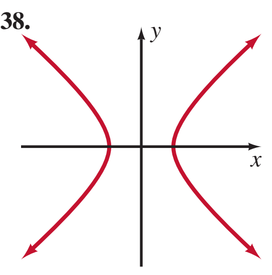


Figura 8.11

39.

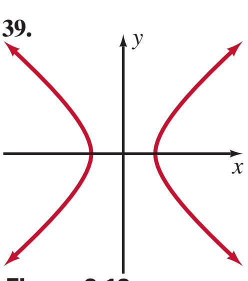


Figura 8.12

Para los problemas 40-47 determine el dominio y el rango.

40. $f(x) = \sqrt{x}$

41. $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

42. $f(x) = x^2 + 1$

43. $f(x) = x^2 - 2$

44. $f(x) = x^3$

45. $f(x) = |x|$

46. $f(x) = x^4$

47. $f(x) = -\sqrt{x}$

Para los problemas 48-57 determine el dominio de la función dada.

48. $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$

49. $f(x) = \dfrac{-4}{x + 2}$

50. $f(x) = \dfrac{2x}{(x - 2)(x + 3)}$

51. $f(x) = \dfrac{5}{(2x - 1)(x + 4)}$

52. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$

53. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

54. $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 5x + 6}$

55. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - x - 12}$

56. $g(x) = \dfrac{5}{x^2 + 4x}$

57. $g(x) = \dfrac{x}{6x^2 + 13x - 5}$

Para los problemas 58-67 exprese el dominio de la función dada usando notación de intervalo.

58. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

59. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

60. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

61. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 4$

62. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 24}$

63. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 40}$

64. $f(x) = \sqrt{12x^2 + x - 6}$

65. $f(x) = -\sqrt{8x^2 + 6x - 35}$

66. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

67. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Para los problemas 68-75 resuelva cada problema.

68. Suponga que la función de ganancia por vender n artículos está dada por

$$P(n) = -n^2 + 500n - 61\,500$$

Evalúe $P(200)$, $P(230)$, $P(250)$ y $P(260)$.

69. La ecuación $A(r) = \pi r^2$ expresa el área de una región circular como función de la longitud de un radio (r). Calcule $A(2)$, $A(3)$, $A(12)$ y $A(17)$ y exprese sus respuestas a la centésima más cercana.

70. En un experimento de física se descubre que la ecuación $V(t) = 1667t - 6940t^2$ expresa la velocidad de un objeto como función del tiempo (t). Calcule $V(0.1)$, $V(0.15)$ y $V(0.2)$.

71. La altura de un proyectil disparado verticalmente hacia el aire (desprecie la resistencia del aire), a una velocidad inicial de 64 pies por segundo, es una función del tiempo (t) y está dada por la ecuación $h(t) = 64t - 16t^2$. Calcule $h(1)$, $h(2)$ $h(3)$ y $h(4)$.

72. Una agencia de renta de automóviles cobra \$50 diarios más \$0.32 por milla. En consecuencia, el cargo diario por rentar un automóvil es una función del número de millas recorridas (m) y se puede expresar como $C(m) = 50 + 0.32m$. Calcule $C(75)$, $C(150)$, $C(225)$ y $C(650)$.

73. La ecuación $I(r) = 500r$ expresa la cantidad de interés simple ganado por una inversión de \$500 durante un año como función de la tasa de interés (r). Calcule $I(0.11)$, $I(0.12)$, $I(0.135)$ e $I(0.15)$.

74. Suponga que la altura de un pasaje abovedado semielíptico está dada por la función $h(x) = \sqrt{64 - 4x^2}$, donde x es la distancia desde la línea central del arco. Calcule $h(0)$, $h(2)$ y $h(4)$.

75. La ecuación $A(r) = 2\pi r^2 + 16\pi r$ expresa el área superficial total de un cilindro circular recto, de 8 centímetros de alto, como función de la longitud de un radio (r). Calcule $A(2)$, $A(4)$ y $A(8)$ y exprese sus respuestas a la centésima más cercana.

TH

76. Extienda la definición 8.1 para incluir una enunciación para el concepto de relación.

77. ¿Qué significa decir que el dominio de una función puede restringirse si la función representa una situación del mundo real? Proporcione tres ejemplos de tales funciones.

78. ¿$f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todas las funciones? Defienda su respuesta.

79. ¿Existen algunas funciones para las cuales $f(a + b) = f(a) + f(b)$? Defienda su respuesta.

8.2 Funciones lineales y aplicaciones

Conforme use el concepto de función en el estudio de las matemáticas, le será útil clasificar ciertos tipos de funciones y familiarizarse con sus ecuaciones, características y gráficas. Esto mejorará las capacidades para resolución de problemas.

Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$$f(x) = ax + b$$

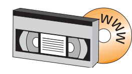
donde a y b son números reales, se llama **función lineal**. Las siguientes ecuaciones son ejemplos de funciones lineales.

$$f(x) = -2x + 4 \qquad f(x) = 3x - 6 \qquad f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$$

La ecuación $f(x) = ax + b$ también se puede escribir como $y = ax + b$. A partir de su trabajo en la sección 7.5, sabe que $y = ax + b$ es la ecuación de una línea recta que tiene una pendiente de a y una ordenada al origen de b. Esta información se puede usar para graficar funciones lineales, como se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = -2x + 4$



Solución

Puesto que la ordenada al origen es 4, el punto (0, 4) está sobre la recta. Más aún, dado que la pendiente es −2 se puede mover dos unidades abajo y una unidad a la derecha de (0, 4) para determinar el punto (1, 2). En la figura 8.14 se dibuja la recta determinada por (0, 4) y (1, 2).

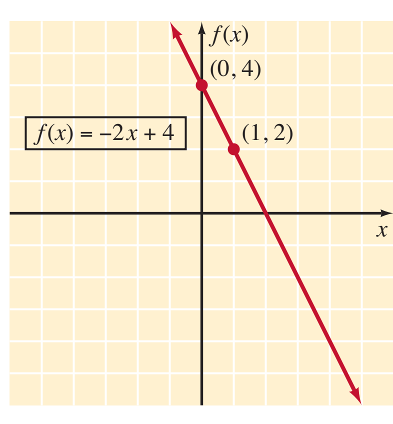


Figura 8.14

■

Note que en la figura 8.14, el eje vertical se marcó $f(x)$. También se le podría marcar y, porque $y = f(x)$. Se usará el marcaje $f(x)$ para la mayoría del trabajo con funciones; sin embargo, se continuará haciendo referencia a simetría en torno al eje y en lugar de simetría en torno al eje $f(x)$.

Recuerde de la sección 7.2 que también se pueden graficar ecuaciones lineales al encontrar las dos intersecciones con los ejes. Este mismo método se puede usar con funciones lineales, como se ilustra con los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 2 Grafique $f(x) = 3x - 6$

Solución

Primero, se ve que $f(0) = -6$; por tanto, el punto $(0, -6)$ está sobre la gráfica. Segundo, al hacer $3x - 6$ igual a cero y resolver para x, se obtiene

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Por tanto, $f(2) = 3(2) - 6 = 0$ y el punto $(2, 0)$ está sobre la gráfica. En la figura 8.15 se dibuja la recta determinada por $(0, -6)$ y $(2, 0)$.

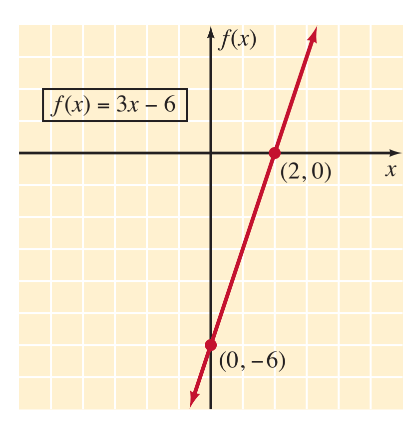


Figura 8.15

EJEMPLO 3 Grafique la función $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$

Solución

Puesto que $f(0) = \frac{5}{6}$, el punto $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ está sobre la gráfica. Al hacer $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ igual a cero y resolver para x, se obtiene

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$$
$$\frac{2}{3}x = -\frac{5}{6}$$
$$x = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $f\left(-\frac{5}{4}\right) = 0$, y el punto $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ está sobre la gráfica. En la figura 8.16 se muestra la recta determinada por los dos puntos $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ y $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

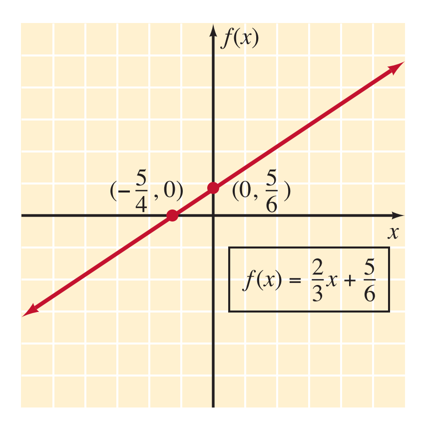


Figura 8.16

Conforme grafique funciones con notación de función, con frecuencia es útil pensar en la ordenada de cada punto sobre la gráfica como el valor de la función en un valor específico de x. Geométricamente, el valor funcional es la distancia dirigida del punto desde el eje x. Esta idea se ilustra en la figura 8.17 para la función $f(x) = x$ y en la figura 8.18 para la función $f(x) = 2$. La función lineal $f(x) = x$ con frecuencia se llama **función identidad**. Cualquier función lineal de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a = 0$, se llama **función constante**.

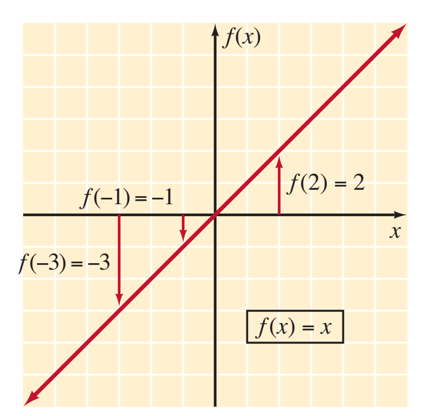


Figura 8.17

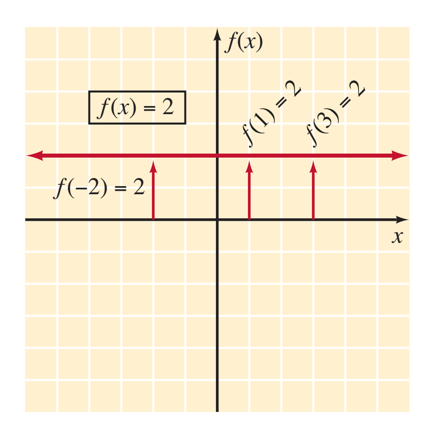


Figura 8.18

A partir del trabajo previo con ecuaciones lineales, se sabe que las rectas paralelas tienen pendientes iguales y que dos rectas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocos negativos mutuos. Por ende, cuando se trabaja con funciones lineales de la forma $f(x) = ax + b$, es fácil reconocer rectas paralelas y perpendiculares. Por ejemplo, las rectas determinadas por $f(x) = 0.21x + 4$ y $g(x) = 0.21x - 3$ son rectas paralelas porque ambas rectas tienen una pendiente de 0.21 y diferentes ordenadas al origen. Use una calculadora graficadora para dibujar estas dos funciones junto con $h(x) = 0.21x + 2$ y $p(x) = 0.21x - 7$ (figura 8.19).

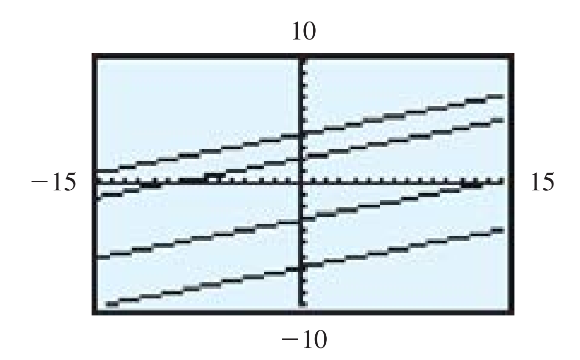


Figura 8.19

Las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{5}x + 8$ y $g(x) = -\frac{5}{2}x - 4$ son líneas perpendiculares porque las pendientes $\left(\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad -\frac{5}{2}\right)$ de las dos rectas son recíprocos negativos mutuos. De nuevo, con la calculadora graficadora, dibuje estas dos funciones junto con $h(x) = -\frac{5}{2}x + 2$ y $p(x) = -\frac{5}{2}x - 6$ (figura 8.20). Si las rectas no parecen ser perpendiculares, tal vez quiera cambiar la ventana con una opción de aproximación (*zoom*).

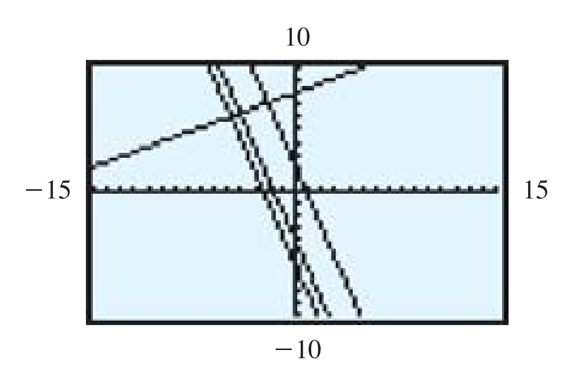


Figura 8.20

Observaciones: Una propiedad de la geometría plana afirma que, si dos o más rectas son perpendiculares a la misma recta, entonces son rectas paralelas. La figura 8.20 es una buena ilustración de dicha propiedad.

La notación de función también se puede usar para determinar funciones lineales que satisfagan ciertas condiciones. Vea cómo se hace.

EJEMPLO 4

Determine la función lineal cuya gráfica sea una recta con una pendiente de $\frac{1}{4}$, que contiene el punto (2, 5).

Solución

Puede sustituir $\frac{1}{4}$ por a en la ecuación $f(x) = ax + b$ para obtener $f(x) = \frac{1}{4}x + b$. El hecho de que la recta contenga al punto (2, 5) significa que $f(2) = 5$. Por tanto,

$$f(2) = \frac{1}{4}(2) + b = 5$$

$$b = \frac{9}{2}$$

y la función es $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$. ■

Aplicaciones de funciones lineales

En la sección 7.2 se trabajó con algunas aplicaciones de las ecuaciones lineales. Ahora considere algunas aplicaciones adicionales que usan el concepto de función lineal para conectar las matemáticas con el mundo real.

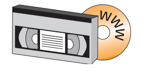
EJEMPLO 5

El costo de encender una bombilla de 60 watts está dado por la función $c(h) = 0.0036h$, donde h representa el número de horas que está encendida la bombilla.

(a) ¿Cuánto cuesta encender una bombilla de 60 watts durante 3 horas por noche, durante un mes de 30 días?

(b) Grafique la función $c(h) = 0.0036h$.

(c) Suponga que en un clóset deja encendida una bombilla de 60 watts durante una semana antes de que se percate y la apague. Use la gráfica del inciso (b) para aproximar el costo de dejar encendida la bombilla durante una semana. Luego use la función para encontrar el costo exacto.



Soluciones

(a) $c(90) = 0.0036(90) = 0.324$ El costo, al centavo más cercano, es \$0.32.

(b) Dado que $c(0) = 0$ y $c(100) = 0.36$, puede usar los puntos (0, 0) y (100, 0.36) para graficar la función lineal $c(h) = 0.0036h$ (figura 8.21).

(c) Si la bombilla se enciende durante 24 horas por día durante una semana, está encendida durante $24(7) = 168$ horas. Al trazar la gráfica puede aproximar 168 sobre el eje horizontal, y luego trazar a través del eje vertical. Parece que costará aproximadamente 60 centavos. Al usar $c(h) = 0.0036h$, se obtiene exactamente $c(168) = 0.0036(168) = 0.6048$.

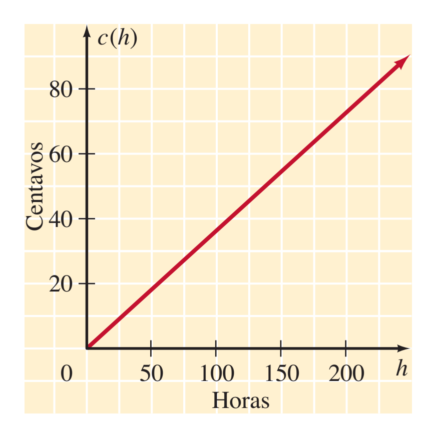


Figura 8.21 ■

EJEMPLO 6

La empresa EZ Car Rental cobra una cantidad fija por día más una cantidad por milla por rentar un automóvil. Para viajes de dos días diferentes, Ed rentó un automóvil en EZ. Pagó \$70 por 100 millas en un día y \$120 por 350 millas en otro día. Determine la función lineal que usa EZ Car Rental para determinar sus cargos de renta diarios.

Solución

La función lineal $f(x) = ax + b$, donde x representa el número de millas, modela esta situación. Los dos viajes de Ed se pueden representar mediante los pares ordenados (100, 70) y (350, 120). A partir de estos dos pares ordenados se puede determinar a, que es la pendiente de la línea.

$$a = \frac{120 - 70}{350 - 100} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Por tanto, $f(x) = ax + b$ se convierte en $f(x) = 0.2x + b$. Ahora cualquier par ordenado se puede usar para determinar el valor de b. Al usar (100, 70) se tiene $f(100) = 70$, de modo que

$$f(100) = 0.2(100) + b = 70$$
$$b = 50$$

La función lineal es $f(x) = 0.2x + 50$. En otras palabras, EZ Car Rental cobra una tarifa diaria de \$50 más \$0.20 por milla. ■

EJEMPLO 7

Suponga que Ed (ejemplo 6) también tiene acceso a la agencia A-OK Car Rental, que cobra una tarifa diaria de \$25 más \$0.30 por milla. ¿Ed debería usar EZ Car Rental del ejemplo 6, o A-OK Car Rental?

Solución

La función lineal $g(x) = 0.3x + 25$, donde x representa el número de millas, se puede usar para determinar los cargos diarios de A-OK Car Rental. Grafique esta función y $f(x) = 0.2x + 50$ del ejemplo 6 sobre el mismo conjunto de ejes (figura 8.22).

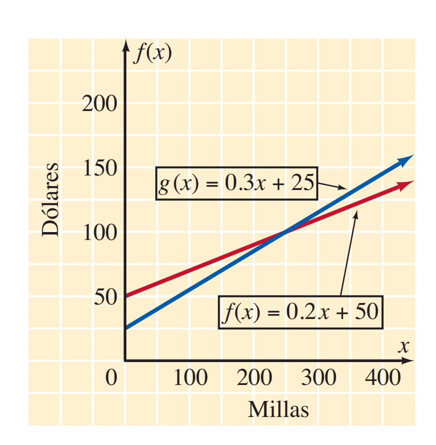


Figura 8.22

Ahora se ve que las dos funciones tienen valores iguales en el punto de intersección de las dos rectas. Para encontrar las coordenadas de este punto puede igualar $0.3x + 25$ con $0.2x + 50$ y resolver para x.

$$0.3x + 25 = 0.2x + 50$$
$$0.1x = 25$$
$$x = 250$$

Si $x = 250$, entonces $0.3(250) + 25 = 100$ y el punto de intersección es $(250, 100)$. De nuevo, al observar las rectas en la figura 8.22, Ed debe usar A-OK Car Rental para viajes diarios menores de 250 millas, pero debe usar EZ Car Rental para viajes de más de 250 millas. ■

Conjunto de problemas 8.2

Para los problemas 1-16 grafique cada una de las funciones lineales.

1. $f(x) = 2x - 4$

2. $f(x) = 3x + 3$

3. $f(x) = -x + 3$

4. $f(x) = -2x + 6$

5. $f(x) = 3x + 9$

6. $f(x) = 2x - 6$

7. $f(x) = -4x - 4$

8. $f(x) = -x - 5$

9. $f(x) = -3x$

10. $f(x) = -4x$

11. $f(x) = -3$

12. $f(x) = -1$

13. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

14. $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$

15. $f(x) = -\frac{3}{4}x - 6$

16. $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

17. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta con una pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto $(-1, 3)$.

18. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta con una pendiente de $-\frac{3}{5}$ y contiene el punto $(4, -5)$.

19. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que contiene los puntos $(-3, -1)$ y $(2, -6)$.

20. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que contiene los puntos $(-2, -3)$ y $(4, 3)$.

21. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que es perpendicular a la línea $g(x) = 5x - 2$ y contiene el punto $(6, 3)$.

22. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que es paralela a la línea $g(x) = -3x - 4$ y contiene el punto $(2, 7)$.

23. El costo por dejar encendida una bombilla de 75 watts está dado por la función $c(h) = 0.0045h$, donde h representa el número de horas que la bombilla está encendida.

 (a) ¿Cuánto cuesta encender una bombilla de 75 watts durante 3 horas por noche durante un mes de 31 días? Exprese su respuesta al centavo más cercano.

 (b) Grafique la función $c(h) = 0.0045h$.

 (c) Use la gráfica de la parte (b) para aproximar el costo de encender una bombilla de 75 watts durante 225 horas.

 (d) Use $c(h) = 0.0045h$ para encontrar el costo exacto, al centavo más cercano, de encender una bombilla de 75 watts durante 225 horas.

24. Rent-Me Car Rental cobra $15 por día más $0.22 por milla para rentar un automóvil. Determine una función lineal que se pueda usar para calcular las rentas de automóviles diarias. Luego, use dicha función para determinar el costo de rentar un automóvil durante un día y conducir 175 millas; 220 millas; 300 millas; 460 millas.

25. ABC Car Rental usa la función $f(x) = 26$ para cualquier uso diario de un automóvil hasta e incluidas 200 millas. Para conducir más de 200 millas por día, use la función $g(x) = 26 + 0.15(x - 200)$ para determinar los cargos. ¿Cuánto cobraría la compañía por conducir diariamente 150 millas? ¿230 millas? ¿360 millas? ¿430 millas?

26. Suponga que una agencia de renta de automóviles cobra una cantidad fija por día más una cantidad por milla por rentar un automóvil. Heidi rentó un automóvil un día y pagó $80 por 200 millas. Otro día rentó un automóvil de la misma agencia y pagó $117.50 por 350 millas. Determine la función lineal que podría usar la agencia para determinar sus cargos de renta diarios.

27. Un minorista tiene algunos artículos que quiere vender y obtener una ganancia de 40% sobre el costo de cada artículo. La función $s(c) = c + 0.4c = 1.4c$, donde c representa el costo de un artículo, se puede usar para determinar el precio de venta. Encuentre el precio de venta de los artículos que cuestan $1.50, $3.25, $14.80, $21 y $24.20.

28. Zack quiere vender cinco artículos que le cuestan $1.20, $2.30, $6.50, $12 y $15.60. Quiere obtener una ganancia de 60% del costo. Cree una función que pueda usar para determinar el precio de venta de cada artículo, y luego use la función para calcular cada precio de venta.

29. “Todas las mercancías tienen 20% de descuento sobre el precio marcado” es una señal en un campo de golf local. Cree una función y luego úsela para determinar cuánto tiene que pagar por cada uno de los artículos marcados: un sombrero de $9.50, una sombrilla de $15, un par de zapatos de golf de $75, unos guantes de golf de $12.50, un juego de palos de golf de $750.

30. El método de depreciación lineal supone que un artículo se deprecia la misma cantidad cada año. Suponga que una nueva pieza de maquinaria cuesta $32 500 y se deprecia $1950 cada año durante t años.

 (a) Establezca una función lineal que produzca el valor de la maquinaria después de t años.

 (b) Encuentre el valor de la maquinaria después de 5 años.

 (c) Encuentre el valor de la maquinaria después de 8 años.

 (d) Grafique la función de la parte (a).

 (e) Use la gráfica de la parte (d) para aproximar cuántos años tarda en volverse cero el valor de la maquinaria.

 (f) Use la función para determinar cuánto tiempo transcurre para que el valor de la maquinaria se vuelva cero.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

31. ¿$f(x) = (3x - 2) - (2x + 1)$ es una función lineal? Explique su respuesta.

32. Suponga que Bianca camina a un ritmo constante de 3 millas por hora. Explique qué significa que la distancia que Bianca camina es una función lineal del tiempo que ella camina.

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 33-37 grafique cada una de las funciones.

33. $f(x) = |x|$

34. $f(x) = x + |x|$

35. $f(x) = x - |x|$

36. $f(x) = |x| - x$

37. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

38. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 1-16.

39. Use una calculadora graficadora para resolver las partes (b) y (c) del ejemplo 5.

40. Use una calculadora graficadora para comprobar su solución al ejemplo 7.

41. Use una calculadora graficadora para resolver las partes (b) y (c) del problema 23.

42. Use una calculadora graficadora para resolver las partes (d) y (e) del problema 30.

43. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 33-37.

44. **(a)** Grafique $f(x) = |x|$, $f(x) = 2|x|$, $f(x) = 4|x|$ y $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ sobre el mismo conjunto de ejes.

(b) Grafique $f(x) = |x|$, $f(x) = -|x|$, $f(x) = -3|x|$ y $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$ sobre el mismo conjunto de ejes.

(c) Use sus resultados de los incisos (a) y (b) para hacer una conjetura acerca de las gráficas de $f(x) = a|x|$, donde a es un número real distinto de cero.

(d) Grafique $f(x) = |x|$, $f(x) = |x| + 3$, $f(x) = |x| - 4$ y $f(x) = |x| + 1$ sobre el mismo conjunto de ejes. Haga una conjetura acerca de las gráficas de $f(x) = |x| + k$, donde k es un número real distinto de cero.

(e) Grafique $f(x) = |x|$, $f(x) = |x - 3|$, $f(x) = |x - 1|$ y $f(x) = |x + 4|$ sobre el mismo conjunto de ejes. Haga una conjetura acerca de las gráficas de $f(x) = |x - h|$, donde h es un número real distinto de cero.

(f) Sobre la base de sus resultados de los incisos (a) a (e), bosqueje cada una de las siguientes gráficas. Luego use una calculadora graficadora para comprobar sus bosquejos.

(1) $f(x) = |x - 2| + 3$

(2) $f(x) = |x + 1| - 4$

(3) $f(x) = 2|x - 4| - 1$

(4) $f(x) = -3|x + 2| + 4$

(5) $f(x) = -\frac{1}{2}|x - 3| - 2$

8.3 Funciones cuadráticas

Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$, se llama **función cuadrática**. La gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**. Mientras trabaje con parábolas se usará el vocabulario indicado en la figura 8.23.

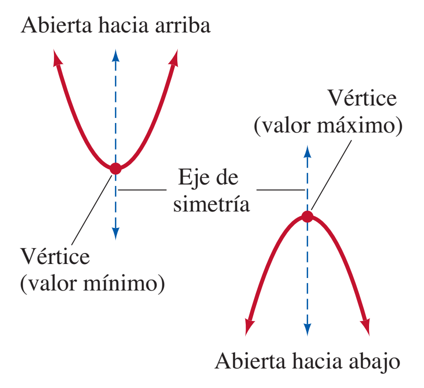


Figura 8.23

La graficación de una parábola se apoya en el descubrimiento del vértice, al determinar si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, y ubicar dos puntos en lados opuestos al eje de simetría. También se tiene interés en comparar parábolas producidas por ecuaciones como $f(x) = x^2 + k$, $f(x) = ax^2$, $f(x) = (x - h)^2$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$ con la parábola básica producida por la ecuación $f(x) = x^2$. En la figura 8.24 se muestra la gráfica de $f(x) = x^2$. Note que el vértice de la parábola está en el origen, (0, 0), y la gráfica es simétrica con el eje y, o $f(x)$. Recuerde que una ecuación muestra simetría con respecto al eje y si al sustituir x con $-x$ se produce una ecuación equivalente. Por tanto, dado que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$, la ecuación muestra simetría con respecto al eje y.

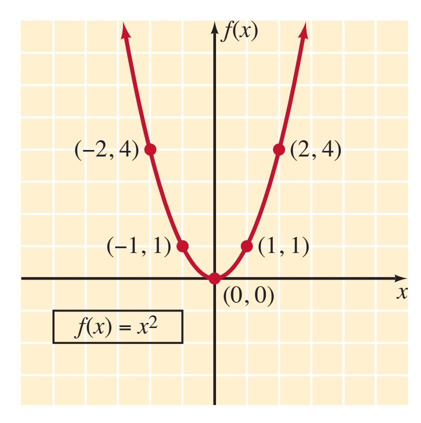


Figura 8.24

Ahora considere una ecuación de la forma $f(x) = x^2 + k$, donde k es una constante. (Tenga en mente que todas esas ecuaciones muestran simetría con respecto al eje y.)

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = x^2 - 2$

Solución

Elabore una tabla para realizar algunas comparaciones de valores de función. Puesto que la gráfica muestra simetría con respecto al eje y, sólo se calcularán valores positivos y luego se reflejarán los puntos a través del eje y.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 - 2$
0	0	−2
1	1	−1
2	4	2
3	9	7

Debe observar que los valores funcionales para $f(x) = x^2 - 2$ son 2 menos que los correspondientes valores funcionales para $f(x) = x^2$. Por ende, la gráfica de $f(x) = x^2 - 2$ es la misma que la parábola de $f(x) = x^2$, excepto que se movió hacia abajo dos unidades (figura 8.25).

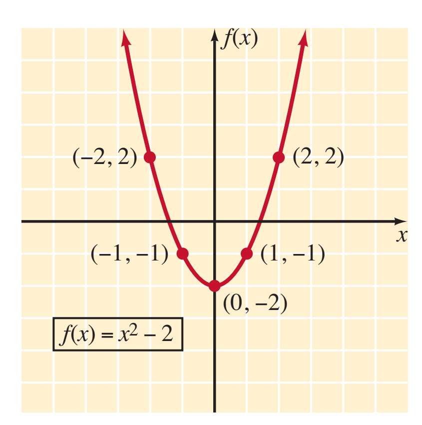


Figura 8.25

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + k$ es la misma de la gráfica de $f(x) = x^2$ excepto que se movió arriba o abajo $|k|$ unidades, dependiendo de si k es positiva o negativa. Se dice que la gráfica de $f(x) = x^2 + k$ es una **traslación vertical** de la gráfica de $f(x) = x^2$.

Ahora considere algunas funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, donde a es una constante distinta de cero. (Las gráficas de estas ecuaciones también tienen simetría con respecto al eje y.)

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = 2x^2$

Solución

Elabore una tabla para hacer algunas comparaciones de valores funcionales. Note que, en la tabla, los valores funcionales para $f(x) = 2x^2$ son *el doble* de los correspondientes valores funcionales para $f(x) = x^2$. Por tanto, la parábola asociada con $f(x) = 2x^2$ tiene el mismo vértice (el origen) que la gráfica de $f(x) = x^2$, pero es *más estrecha*, como se muestra en la figura 8.26.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = 2x^2$
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18

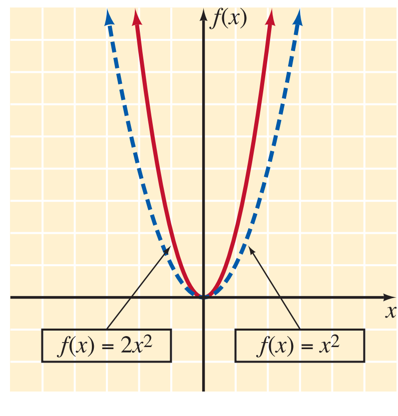


Figura 8.26 ■

EJEMPLO 3

Grafique $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Solución

Como se ve de la tabla, los valores funcionales para $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ son *la mitad* de los valores funcionales correspondientes para $f(x) = x^2$. Por tanto, la parábola asociada con $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ es *más ancha* que la parábola básica, como se muestra en la figura 8.27.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2$
0	0	0
1	1	
2	4	2
3	9	
4	16	8

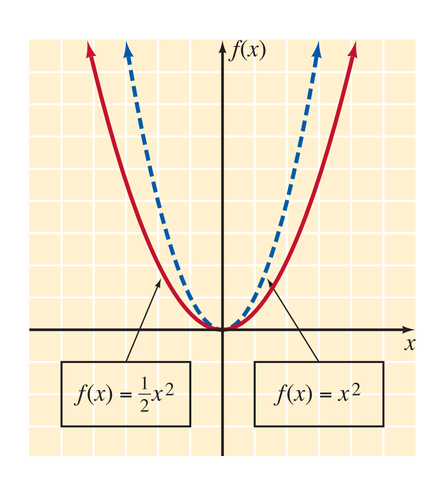


Figura 8.27 ■

EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = -x^2$

Solución

Debe ser evidente que los valores funcionales para $f(x) = -x^2$ son los *opuestos* de los valores funcionales correspondientes para $f(x) = x^2$. En consecuencia, la gráfica de $f(x) = -x^2$ es una reflexión a través del eje x de la parábola básica (figura 8.28).

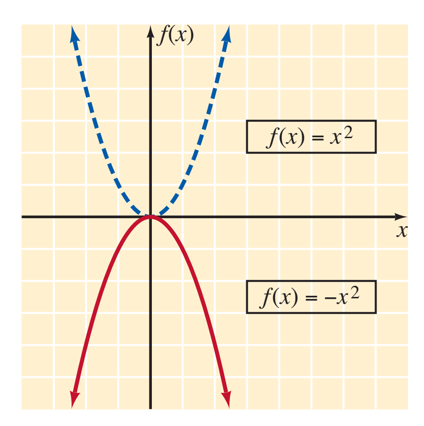


Figura 8.28

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$ tiene su vértice en el origen y se abre hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa. La parábola es más estrecha que la parábola básica si $|a| > 1$ y más ancha si $|a| < 1$.

La investigación de las funciones cuadráticas continúa con la consideración de aquellas con la forma $f(x) = (x - h)^2$, donde h es una constante distinta de cero.

EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = (x - 3)^2$

Solución

Una tabla de valores bastante extensa ilustra un patrón. Note que $f(x) = (x - 3)^2$ y $f(x) = x^2$ toman los mismos valores funcionales pero para diferentes valores de x. De manera más específica, si $f(x) = x^2$ logra cierto valor funcional en un valor específico de x, entonces $f(x) = (x - 3)^2$ logra el mismo valor funcional en *x más tres*. En otras palabras, la gráfica de $f(x) = (x - 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ *movida tres unidades hacia la derecha* (figura 8.29).

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x - 3)^2$
−1	1	16
0	0	9
1	1	4
2	4	1
3	9	0
4	16	1
5	25	4
6	36	9
7	49	16

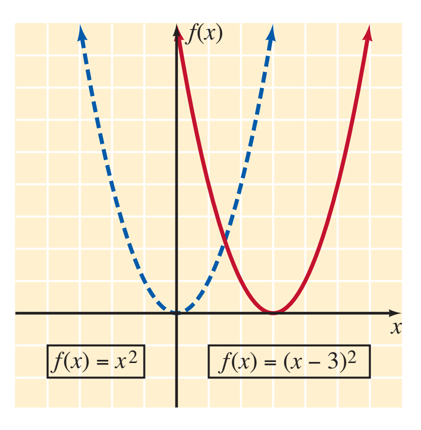
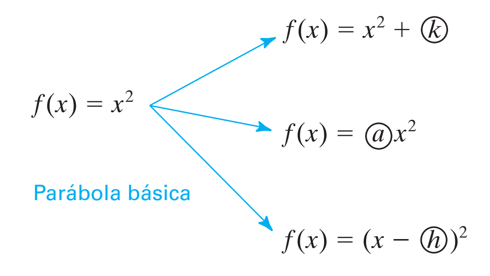


Figura 8.29

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = (x - h)^2$ es la misma que la gráfica de $f(x) = x^2$ excepto que se movió hacia la derecha h unidades si h es positiva o se movió a la izquierda $|h|$ unidades si h es negativa. Se dice que la gráfica de $f(x) = (x - h)^2$ es una **traslación horizontal** de la gráfica de $f(x) = x^2$.

El siguiente diagrama resume el trabajo realizado hasta el momento para graficar funciones cuadráticas.



Mueve la parábola hacia arriba o hacia abajo

Afecta el ancho y la forma en que se abre la parábola

Mueve la parábola a derecha o izquierda

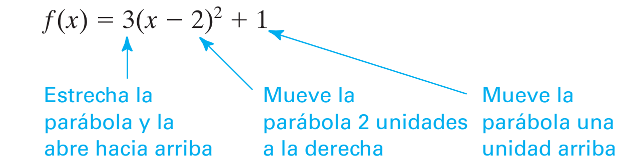
Se estudiaron, por separado, los efectos que a, h y k tienen sobre la gráfica de una función cuadrática. Sin embargo, es necesario considerar la forma general de una función cuadrática cuando todos estos efectos están presentes.

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene su vértice en (h, k) y se abre hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa. La parábola es más estrecha que la parábola básica si $|a| > 1$ y más ancha si $|a| < 1$.

EJEMPLO 6

Grafique $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$

Solución



El vértice es (2, 1) y la línea $x = 2$ es el eje de simetría. Si $x = 1$, entonces $f(1) = 3(1 - 2)^2 + 1 = 4$. Por tanto, el punto (1, 4) está sobre la gráfica, y también su reflejo, (3, 4), a través de la recta de simetría. La parábola se muestra en la figura 8.30.

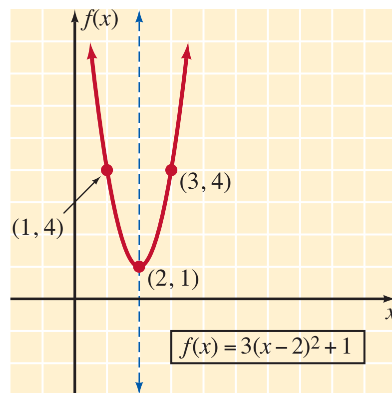
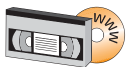


Figura 8.30

EJEMPLO 7



Grafique $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$

Solución

$$f(x) = -\frac{1}{2}[x - (-1)]^2 - 3$$

Ensancha la parábola y la abre hacia abajo

Mueve la parábola una unidad hacia la izquierda

Mueve la parábola 3 unidades abajo

El vértice está en $(-1, -3)$ y la recta $x = -1$ es el eje de simetría. Si $x = 0$, entonces $f(0) = -\frac{1}{2}(0 + 1)^2 - 3 = -\frac{7}{2}$. Por tanto, el punto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ está sobre la gráfica, al igual que su reflejo, $\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$, a través de la línea de simetría. La parábola se muestra en la figura 8.31.

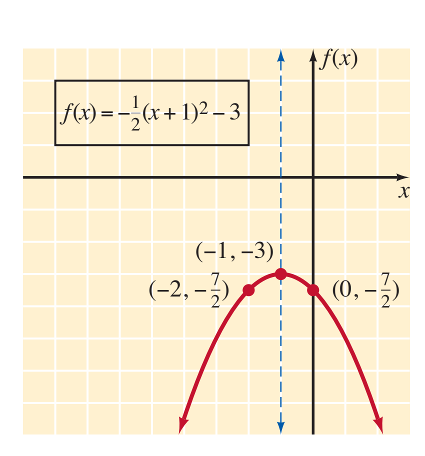


Figura 8.31

Funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ahora está listo para graficar funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. El método general es cambiar de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y luego proceder como se hizo en los ejemplos 6 y 7. El proceso de *completar el cuadrado* es la base para hacer el cambio en la forma. Considere dos ejemplos para ilustrar los detalles.

EJEMPLO 8

Grafique $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x^2 - 4x) + 3 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + 3 - 4 \\ &= (x - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Sume 4, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Reste 4 para compensar el 4 que se agregó.

La gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ es la parábola básica movida dos unidades a la derecha y una unidad abajo (figura 8.32).

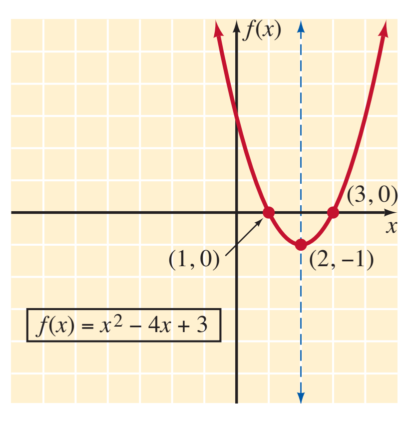
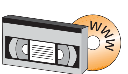


Figura 8.32

EJEMPLO 9



Grafique $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 - 4x + 1 \\ &= -2(x^2 + 2x) + 1 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1) - (-2)(1) + 1 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1) + 2 + 1 \\ &= -2(x + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Factorice −2 de los primeros dos términos.

Sume 1 dentro de los paréntesis para completar el cuadrado. Reste 1, pero también se debe multiplicar por un factor de −2.

La gráfica de $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ se muestra en la figura 8.33.

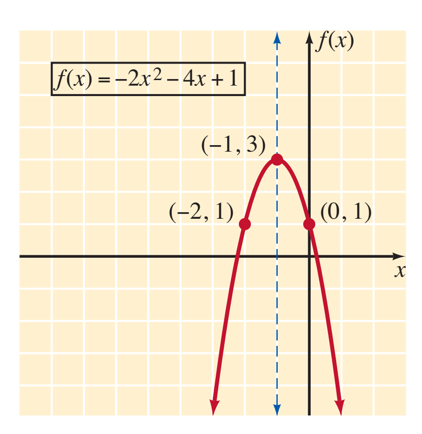


Figura 8.33 ■

Ahora grafique una función definida en partes que implica reglas de asignación tanto lineales como cuadráticas.

EJEMPLO 10

Grafique $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

Solución

Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = 2x$. Por tanto, para valores no negativos de x, grafique la función lineal $f(x) = 2x$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = x^2 + 1$. Por tanto, para valores negativos de x grafique la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$. La gráfica completa se muestra en la figura 8.34.

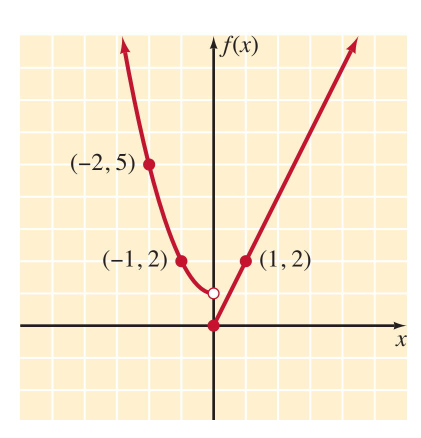


Figure 8.34 ■

Lo que se sabe acerca de las parábolas y el proceso de completar el cuadrado puede ser útil cuando use una herramienta de graficación para bosquejar una función cuadrática. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11 Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica de la función cuadrática

$$f(x) = -x^2 + 37x - 311$$

Solución

Primero, se sabe que la parábola abre hacia abajo y su ancho es el mismo que el de la parábola básica $f(x) = x^2$. Entonces puede comenzar el proceso de completar el cuadrado para determinar una ubicación aproximada del vértice:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 37x - 311 \\ &= -(x^2 - 37x) - 311 \\ &= -\left(x^2 - 37x + \left(\frac{37}{2}\right)^2\right) - 311 + \left(\frac{37}{2}\right)^2 \\ &= -(x^2 - 37x + (18.5)^2) - 311 + 342.25 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice está cerca de $x = 18$ y $y = 31$. Al establecer las fronteras del rectángulo de visualización de modo que $-2 \leq x \leq 25$ y $-10 \leq y \leq 35$ se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 8.35.

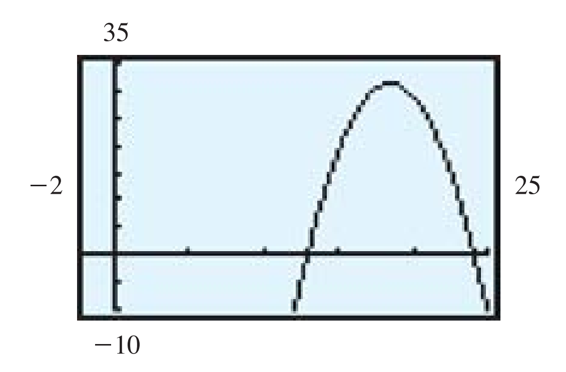


Figura 8.35 ■

Observaciones: La gráfica en la figura 8.35 es suficiente para la mayoría de los propósitos porque muestra el vértice y la abscisa al origen de la parábola. Ciertamente podría usar otras fronteras que también dieran esta información.

Conjunto de problemas 8.3

Para los problemas 1-26 grafique cada función cuadrática.

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 - 3$
3. $f(x) = 3x^2$
4. $f(x) = -2x^2$
5. $f(x) = -x^2 + 2$
6. $f(x) = -3x^2 - 1$
7. $f(x) = (x + 2)^2$
8. $f(x) = (x - 1)^2$
9. $f(x) = -2(x + 1)^2$
10. $f(x) = 3(x - 2)^2$

11. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

12. $f(x) = -(x + 2)^2 + 3$

13. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$

14. $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1$

15. $f(x) = x^2 + 2x + 4$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

17. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

18. $f(x) = x^2 + 5x + 5$

19. $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$

20. $f(x) = 3x^2 - 6x$

21. $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

22. $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$

23. $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$

24. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

25. $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$

26. $f(x) = -3x^2 + x - 2$

Para los problemas 27-34 grafique cada función.

27. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ 3x & \text{para } x < 0 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{para } x \geq 0 \\ 4x & \text{para } x < 0 \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } x \geq 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{para } x > 2 \\ 1 & \text{para } 0 < x \leq 2 \\ -1 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{para } 3 \leq x < 4 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x < 0 \\ x^2 & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

35. La **función mayor entero** se define mediante la ecuación $f(x) = [x]$, donde $[x]$ se refiere al entero más grande menor que o igual a x. Por ejemplo, $[2.6] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[4] = 4$ y $[-1.4] = -2$. Grafique $f(x) = [x]$ para $-4 \leq x < 4$.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

36. Explique el concepto de una función definida en partes.

37. ¿$f(x) = (3x^2 - 2) - (2x + 1)$ es una función cuadrática? Explique su respuesta.

38. Proporcione una descripción paso a paso de cómo usaría las ideas presentadas en esta sección para graficar $f(x) = 5x^2 + 10x + 4$.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

39. Este problema se diseñó para reforzar las ideas presentadas en la sección. Para cada parte, prediga primero las formas y ubicaciones de las parábolas, y luego use su calculadora graficadora para graficarlas sobre el mismo conjunto de ejes.

(a) $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + 5$

(b) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 5)^2$, $f(x) = (x + 5)^2$, $f(x) = (x - 3)^2$

(c) $f(x) = x^2$, $f(x) = 5x^2$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $f(x) = -2x^2$

(d) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 7)^2 - 3$, $f(x) = -(x + 8)^2 + 4$, $f(x) = -3x^2 - 4$

(e) $f(x) = x^2 - 4x - 2$, $f(x) = -x^2 + 4x + 2$, $f(x) = -x^2 - 16x - 58$, $f(x) = x^2 + 16x + 58$

40. **(a)** Grafique tanto $f(x) = x^2 - 14x + 51$ como $f(x) = x^2 + 14x + 51$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(b) Grafique tanto $f(x) = x^2 + 12x + 34$ como $f(x) = x^2 - 12x + 34$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(c) Grafique tanto $f(x) = -x^2 + 8x - 20$ como $f(x) = -x^2 - 8x - 20$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(d) Plantee un enunciado que generalice sus hallazgos en los incisos (a) a (c).

41. Use su calculadora graficadora para graficar las funciones definidas en partes en los problemas 27-34. Tal vez necesite consultar su manual del usuario para instrucciones acerca de la graficación de estas funciones.

8.4 Más acerca de las funciones cuadráticas y aplicaciones

En la sección anterior se usó el proceso de completar el cuadrado para cambiar una función cuadrática como $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a la forma $f(x) = (x - 2)^2 - 1$. A partir de la forma $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ es fácil identificar el vértice $(2, -1)$ y el eje de simetría $x = 2$ de la parábola. En general, si completa el cuadrado en

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Por tanto, la parábola asociada con la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

y la ecuación de su eje de simetría es $x = -b/2a$. Estos hechos se ilustran en la figura 8.36.

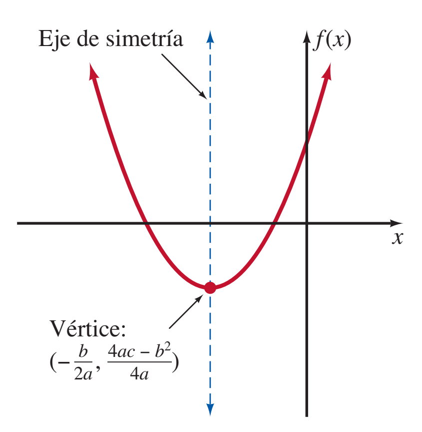


Figura 8.36

Al usar la información de la figura 8.36, ahora se tiene otra forma de graficar funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, como se indica mediante los siguientes pasos:

1. Determine si la parábola se abre hacia arriba (si $a > 0$) o hacia abajo (si $a < 0$).
2. Encuentre $-b/2a$, que es la coordenada x del vértice.
3. Encuentre $f(-b/2a)$, que es la coordenada y del vértice, o encuentre la coordenada y al evaluar

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

4. Ubique otro punto sobre la parábola, y también su imagen a través del eje de simetría, que es la recta con ecuación $x = -b/2a$.

Los tres puntos encontrados en los pasos 2, 3 y 4 determinan la forma general de la parábola. Este procedimiento se ilustra con dos ejemplos.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Soluciones

Paso 1 Dado que $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.

Paso 2 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2(3)} = -\dfrac{(-6)}{6} = 1$

Paso 3 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2$. Por tanto, el vértice está en (1, 2).

Paso 4 Al hacer $x = 2$ se obtiene $f(2) = 12 - 12 + 5 = 5$. Por tanto, (2, 5) está sobre la gráfica, y también su reflejo, (0, 5), a través de la recta de simetría, $x = 1$.

Los tres puntos (1, 2), (2, 5) y (0, 5) se usan para graficar la parábola de la figura 8.37.

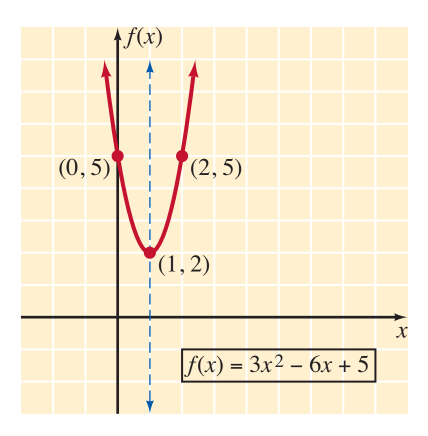


Figura 8.37

■

EJEMPLO 2 Grafique $f(x) = -x^2 - 4x - 7$

Solución

Paso 1 Puesto que $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Paso 2 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2(-1)} = -\dfrac{(-4)}{(-2)} = -2$

Paso 3 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) - 7 = -3$. Por tanto, el vértice está en $(-2, -3)$.

Paso 4 Al hacer $x = 0$ se obtiene $f(0) = -7$. Por tanto $(0, -7)$ está sobre la gráfica y también su reflejo, $(-4, -7)$, a través de la recta de simetría $x = -2$.

Los tres puntos $(-2, -3)$, $(0, -7)$ y $(-4, -7)$ se usan para dibujar la parábola de la figura 8.38.

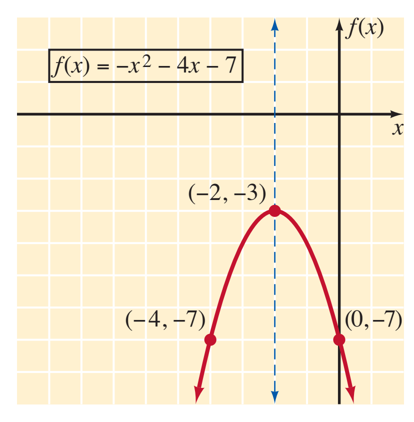


Figura 8.38

En resumen, se tienen dos métodos para graficar una función cuadrática:

1. Puede expresar la función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y usar los valores de a, h y k para determinar la parábola.

2. Puede expresar la función en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y usar el método que se demostró en los ejemplos 1 y 2.

Las parábolas poseen varias propiedades que las hacen muy útiles. Por ejemplo, si una parábola rota en torno a su eje, se forma una superficie parabólica, y tales superficies se usan para reflectores de luz y sonido. Un proyectil disparado hacia el aire sigue la curvatura de una parábola. La línea de tendencia de las funciones de ganancia y costo en ocasiones siguen una curva parabólica. En la mayoría de las aplicaciones de la parábola, el interés principal está en las abscisas al origen y el vértice. Considere algunos ejemplos de encontrar las abscisas al origen y el vértice.

EJEMPLO 3

Encuentre las abscisas al origen y el vértice de cada una de las siguientes parábolas.

(a) $f(x) = -x^2 + 11x - 18$ **(b)** $f(x) = x^2 - 8x - 3$ **(c)** $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Soluciones

(a) Para encontrar las abscisas al origen, sea $f(x) = 0$ y resuelva la ecuación resultante:

$$-x^2 + 11x - 18 = 0$$
$$x^2 - 11x + 18 = 0$$
$$(x - 2)(x - 9) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 9$$

Por tanto, las abscisas al origen son 2 y 9. Para encontrar el vértice, determine el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$:

$$f(x) = -x^2 + 11x - 18$$
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{11}{2(-1)} = -\frac{11}{-2} = \frac{11}{2}$$
$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{11}{2}\right) - 18$$
$$= -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - 18$$
$$= \frac{-121 + 242 - 72}{4}$$
$$= \frac{49}{4}$$

En consecuencia, el vértice está en $\left(\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right)$.

(b) Para encontrar las abscisas al origen, sea $f(x) = 0$ y resuelva la ecuación resultante:

$$x^2 - 8x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{76}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{19}}{2}$$
$$= 4 \pm \sqrt{19}$$

Por tanto, las abscisas al origen son $4 + \sqrt{19}$ y $4 - \sqrt{19}$. Esta vez, para encontrar el vértice, complete el cuadrado en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 8x - 3 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 3 - 16 \\ &= (x-4)^2 - 19 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice está en $(4, -19)$

(c) Para encontrar las abscisas al origen, sea $f(x) = 0$ y resuelva la ecuación resultante:

$$2x^2 - 12x + 23 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(23)}}{2(2)} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{-40}}{4} \end{aligned}$$

Puesto que estas soluciones son números complejos no reales, no hay abscisas al origen. Para encontrar el vértice, determine el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ -\frac{b}{2a} &= -\frac{-12}{2(2)} \\ &= 3 \\ f(3) &= 2(3)^2 - 12(3) + 23 \\ &= 18 - 36 + 23 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice está en $(3, 5)$. ■

Observaciones: Note que, en las partes (a) y (c), se usó el punto general

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

para encontrar los vértices. Sin embargo, en la parte (b) se completó el cuadrado y se usó dicha forma para determinar el vértice. Queda a su elección cuál enfoque usar. Aquí se eligió completar el cuadrado en la parte (b) porque el álgebra requerida era muy sencilla.

En el inciso (a) del ejemplo 3 se resolvió la ecuación $-x^2 + 11x - 18 = 0$ para determinar que 2 y 9 son las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 11x - 18$. Los números 2 y 9 también se llaman **raíces numéricas reales** de la función. Es decir, $f(2) = 0$ y $f(9) = 0$. En el inciso (b) del ejemplo 3, los números reales $4 + \sqrt{19}$ y $4 - \sqrt{19}$ son las abscisas al origen de la gráfica de la función

$f(x) = x^2 - 8x - 3$ y son las raíces numéricas reales de la función. De nuevo, esto significa que $f(4 + \sqrt{19}) = 0$ y $f(4 - \sqrt{19}) = 0$. En el inciso (c) del ejemplo 3, los números complejos no reales $\frac{12 \pm \sqrt{-40}}{4}$, que se simplifican a $\frac{6 \pm i\sqrt{10}}{2}$ indican que la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$ no tiene puntos sobre el eje x. Los números complejos son ceros de la función, pero no tienen otro significado físico para la gráfica que el indicar que la gráfica no tiene puntos sobre el eje x.

La figura 8.39 muestra el resultado que se obtiene cuando se usa una calculadora graficadora para bosquejar las tres funciones del ejemplo 3 sobre el mismo conjunto de ejes. Esto brinda una interpretación visual de las conclusiones extraídas en cuanto a las abscisas al origen y los vértices.

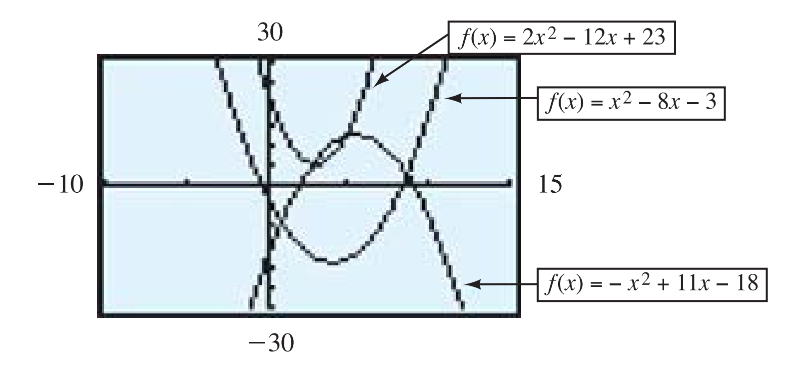


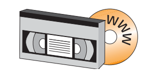
Figura 8.39

De vuelta a la resolución de problemas

Como ha visto, el vértice de la gráfica de una función cuadrática es o el punto más bajo o el más alto sobre la gráfica. Por ende, con frecuencia se habla del **valor mínimo** o el **valor máximo** de una función en aplicaciones de la parábola. El valor x del vértice indica dónde ocurre el mínimo o el máximo, y $f(x)$ produce el valor mínimo o máximo de la función. Considere algunos ejemplos que ilustren estas ideas.

PROBLEMA 1

Un granjero tiene 120 barras de cerca y quiere encerrar un terreno rectangular que requiere barda sólo en tres lados, porque en un lado tiene como frontera un río. Encuentre la longitud y el ancho del terreno que maximizará el área.



Solución

Sea x el ancho; entonces $120 - 2x$ representa la longitud, como se indica en la figura 8.40.

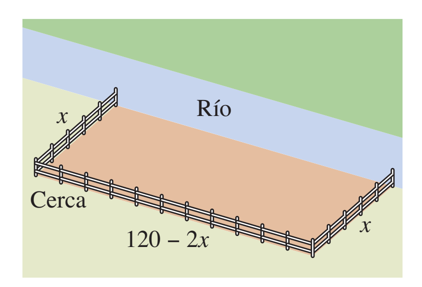


Figura 8.40

La función $A(x) = x(120 - 2x)$ representa el área del terreno en términos del ancho x. Puesto que

$$\begin{aligned} A(x) &= x(120 - 2x) \\ &= 120x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 120x \end{aligned}$$

se tiene una función cuadrática con $a = -2$, $b = 120$ y $c = 0$. Por tanto, el valor *máximo* ($a < 0$, de modo que la parábola se abre hacia abajo) de la función se obtiene donde el valor x es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = 30$$

Si $x = 30$, entonces $120 - 2x = 120 - 2(30) = 60$. En consecuencia, el granjero debe hacer la cerca con 30 barras de ancho y 60 barras de largo para maximizar el área a $(30)(60) = 1800$ barras cuadradas. ■

PROBLEMA 2

Encuentre dos números cuya suma sea 30, tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

Solución

Sea x uno de los números; entonces $30 - x$ representa al otro número. Al expresar la suma de sus cuadrados como función de x, se obtiene

$$f(x) = x^2 + (30 - x)^2$$

que se puede simplificar a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 900 - 60x + x^2 \\ &= 2x^2 - 60x + 900 \end{aligned}$$

Ésta es una función cuadrática con $a = 2$, $b = -60$ y $c = 900$. Por tanto, el valor x donde ocurre el *mínimo* es

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{-60}{4} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Si $x = 15$, entonces $30 - x = 30 - 15 = 15$. Por tanto, los dos números deben ser 15. ■

PROBLEMA 3

Un vendedor de artículos para golf se da cuenta de que puede vender 30 juegos de palos de golf a \$500 por juego en un año. Más aún, predice que, por cada \$25 de reducción en el precio, podría vender tres juegos más de palos de golf. ¿A qué precio debe vender los palos para maximizar el ingreso bruto?

Solución

Al analizar tal problema, en ocasiones es útil comenzar por elaborar una tabla. Se usa el hecho de que se pueden vender tres juegos adicionales por cada \$25 de reducción en el precio.

Número de juegos	×	Precio por juego	=	Ingreso
30	×	\$500	=	\$15 000
33	×	\$475	=	\$15 675
36	×	\$450	=	\$16 200

Sea x el número de reducciones de \$25 en el precio. Entonces el ingreso se puede expresar como función de x.

$$f(x) = (\underset{\text{Número de juegos}}{30 + 3x})(\underset{\text{Precio por juego}}{500 - 25x})$$

Al simplificar esto se obtiene

$$f(x) = 15\,000 - 750x + 1500x - 75x^2$$
$$= -75x^2 + 750x + 15\,000$$

Complete el cuadrado con la finalidad de analizar la parábola.

$$f(x) = -75x^2 + 750x + 15\,000$$
$$= -75(x^2 - 10x) + 15\,000$$
$$= -75(x^2 - 10x + 25) + 15\,000 + 1875$$
$$= -75(x - 5)^2 + 16\,875$$

A partir de esta forma se sabe que el vértice de la parábola está en (5, 16 875) y dado que $a = -75$, se sabe que en el vértice ocurre un *máximo*. Por ende, cinco reducciones de \$25 (esto es, una reducción de \$125 en el precio) dará un ingreso máximo de \$16 875. Los palos de golf se deben vender a \$375 por juego. ■

Se determinó que el vértice de una parábola asociada con $f(x) = ax^2 + bx + c$ se ubica en $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, y que las abscisas al origen de la gráfica se pueden encontrar al resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En consecuencia,

una herramienta de graficación no proporciona mucho poder adicional cuando se trabaja con funciones cuadráticas. Sin embargo, conforme las funciones se vuelven más complejas, una herramienta de graficación se vuelve más útil. En este momento puede adquirir más confianza en el uso de una herramienta de graficación, mientras obtiene una forma de comprobar sus resultados.

EJEMPLO 4

Use una herramienta de graficación para graficar $f(x) = x^2 - 8x - 3$ y encuentre las abscisas al origen de la gráfica. [Ésta es la parábola del inciso (b) del ejemplo 3.]

Solución

En la figura 8.41 se muestra una gráfica de la parábola.

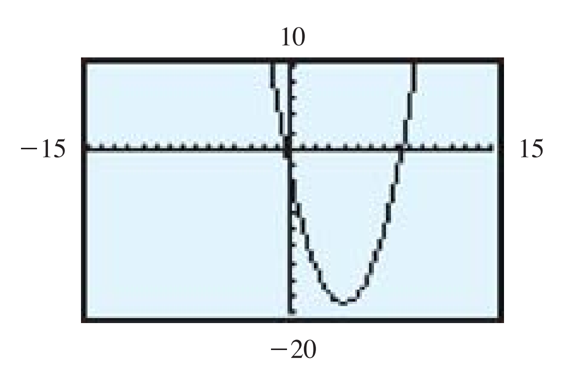


Figura 8.41

Una abscisa al origen parece estar entre 0 y −1 y la otra entre 8 y 9. Haga un acercamiento a la abscisa al origen entre 8 y 9. Esto produce una gráfica como la figura 8.42.

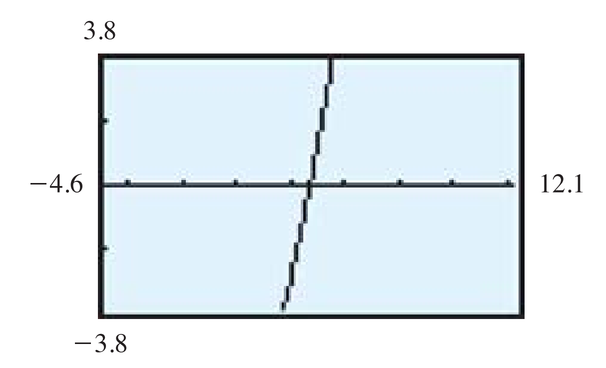


Figura 8.42

Ahora puede usar la función TRACE para determinar que esta abscisa al origen está aproximadamente en 8.4. (Esto concuerda con la respuesta de $4 + \sqrt{19}$ que se obtuvo en el ejemplo 3.) En forma similar, puede determinar que la otra abscisa al origen está aproximadamente en −0.4. ■

Conjunto de problemas 8.4

Para los problemas 1-12 use el método de los ejemplos 1 y 2 de esta sección para graficar cada función cuadrática.

1. $f(x) = x^2 - 8x + 15$
2. $f(x) = x^2 + 6x + 11$
3. $f(x) = 2x^2 + 20x + 52$
4. $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$
5. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$
6. $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
7. $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$
8. $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$
9. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
10. $f(x) = x^2 + 5x + 2$
11. $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$
12. $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

Para los problemas 13-20 use el método que considere el más adecuado para graficar cada función cuadrática.

13. $f(x) = -x^2 + 3$
14. $f(x) = (x + 1)^2 + 1$
15. $f(x) = x^2 + x - 1$
16. $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
17. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$
18. $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$
19. $f(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
20. $f(x) = x^2 - 4x$

Para los problemas 21-36 encuentre las abscisas al origen y el vértice de cada parábola.

21. $f(x) = 3x^2 - 12$
22. $f(x) = 6x^2 - 4$
23. $f(x) = 5x^2 - 10x$
24. $f(x) = 3x^2 + 9x$
25. $f(x) = x^2 - 8x + 15$
26. $f(x) = x^2 - 16x + 63$
27. $f(x) = 2x^2 - 28x + 96$
28. $f(x) = 3x^2 - 60x + 297$
29. $f(x) = -x^2 + 10x - 24$
30. $f(x) = -2x^2 + 36x - 160$
31. $f(x) = x^2 - 14x + 44$
32. $f(x) = x^2 - 18x + 68$
33. $f(x) = -x^2 + 9x - 21$
34. $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$
35. $f(x) = -4x^2 + 4x + 4$
36. $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$

Para los problemas 37-42 encuentre las raíces de cada función.

37. $f(x) = x^2 + 3x - 88$
38. $f(x) = 6x^2 - 5x - 4$
39. $f(x) = 4x^2 - 48x + 108$
40. $f(x) = x^2 - 6x - 6$
41. $f(x) = x^2 - 4x + 11$
42. $f(x) = x^2 - 23x + 126$

Para los problemas 43-52 resuelva cada uno de ellos.

43. Suponga que la ecuación $p(x) = -2x^2 + 280x - 1000$, donde x representa el número de artículos vendidos, describa la función ganancia para cierto negocio. ¿Cuántos artículos debe vender para maximizar la ganancia?

44. Suponga que la función costo para la producción de un artículo particular está dada por la ecuación $C(x) = 2x^2 - 320x + 12\,920$, donde x representa el número de artículos. ¿Cuántos artículos se deben producir para minimizar el costo?

45. Si desprecia la resistencia del aire, la altura de un proyectil disparado verticalmente al aire, a una velocidad inicial de 96 pies por segundo, es una función del tiempo x y está dada por la ecuación $f(x) = 96x - 16x^2$. Encuentre el punto más alto que alcanza el proyectil.

46. Encuentre dos números cuya suma es 30, tales que la suma del cuadrado de un número más diez veces el otro número es un mínimo.

47. Encuentre dos números cuya suma es 50 y cuyo producto es un máximo.

48. Encuentre dos números cuya diferencia es 40 y cuyo producto es un mínimo.

49. Doscientos cuarenta metros de barda están disponibles para cubrir un patio rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del patio para maximizar el área?

50. Los gerentes de un motel publicitan que proporcionarán cena, baile y bebidas por $50 por pareja para una fiesta de fin de año. Deben tener un mínimo de 30 parejas. Más aún, estarán de acuerdo en que, por cada pareja que supere las 30, reducirán el precio por pareja en $0.50 para todos los asistentes. ¿Cuántas parejas se requerirán para maximizar los ingresos del motel?

51. Una compañía de televisión por cable tiene 1000 suscriptores, cada uno de los cuales paga $15 al mes. Sobre la base de una encuesta, la compañía cree que, por cada reducción de $0.25 en la tasa mensual, podría obtener 20 suscriptores adicionales. ¿A qué tasa se obtendrán los ingresos máximos y cuántos suscriptores habrá a esta tasa?

52. Un fabricante descubre que para las primeras 500 unidades de su producto, que fabrica y vende, la ganancia es de $50 por unidad. La ganancia por cada una de las unidades más allá de 500 se reduce en $0.10 por el número de unidades adicionales vendidas. ¿Qué nivel de producción maximizará la ganancia?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

53. Suponga que su amiga se ausentó el día que se estudió esta sección. ¿Cómo le explicaría los temas de las abscisas al origen de la gráfica de una función, las raíces de la función y las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$?

54. Proporcione una explicación paso a paso de cómo encontrar las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$.

55. Proporcione una explicación paso a paso de cómo encontrar el vértice de la parábola determinada por la ecuación $f(x) = -x^2 - 6x - 5$.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

56. Suponga que la ventana de visualización en su calculadora graficadora se establece de modo que $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$. Ahora intente graficar la función $f(x) = x^2 - 8x + 28$. Nada aparece en la pantalla, de modo que la parábola debe estar afuera de la ventana de visualización. Podría expandir arbitrariamente la ventana hasta que la parábola aparezca. Sin embargo, sea un poco más sistemático y use $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ para encontrar el vértice. El vértice se encuentra en (4, 12), así que se cambian los valores y de la ventana de modo que $0 \leq y \leq 25$. Ahora obtiene una buena imagen de la parábola.

Grafique cada una de las siguientes parábolas y tenga en mente que tal vez necesite cambiar las dimensiones de la ventana de visualización para obtener una buena imagen.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 12$
(b) $f(x) = -x^2 - 4x - 16$
(c) $f(x) = x^2 + 12x + 44$
(d) $f(x) = x^2 - 30x + 229$
(e) $f(x) = -2x^2 + 8x - 19$

57. Use una calculadora graficadora para dibujar cada una de las siguientes parábolas y luego use la función TRACE para auxiliarse a estimar las abscisas al origen y el vértice. Finalmente, use el abordaje del ejemplo 3 para encontrar las abscisas al origen y el vértice.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$
(b) $f(x) = x^2 - 18x + 66$
(c) $f(x) = -x^2 + 8x - 3$
(d) $f(x) = -x^2 + 24x - 129$
(e) $f(x) = 14x^2 - 7x + 1$
(f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{2}$

58. En los problemas 21-36 se le pidió encontrar las abscisas al origen y el vértice de algunas parábolas. Ahora use una calculadora graficadora para bosquejar cada parábola y justificar visualmente sus respuestas.

59. En cada una de las siguientes funciones cuadráticas use el discriminante para determinar el número de raíces numéricas reales y luego grafique la función con una calculadora graficadora para comprobar su respuesta.

(a) $f(x) = 3x^2 - 15x - 42$
(b) $f(x) = 2x^2 - 36x + 162$
(c) $f(x) = -4x^2 - 48x - 144$
(d) $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$
(e) $f(x) = 4x^2 - 4x - 120$
(f) $f(x) = 5x^2 - x + 4$

8.5 Transformaciones de algunas curvas básicas

A partir del trabajo en la sección 8.3, sabe que la gráfica de $f(x) = (x - 5)^2$ es la parábola básica $f(x) = x^2$ trasladada cinco unidades a la derecha. Del mismo modo sabe que la gráfica de $f(x) = -x^2 - 2$ es la parábola básica reflejada a través del eje x y trasladada hacia abajo dos unidades. Las traslaciones y las reflexiones no sólo se aplican a parábolas sino también a curvas. Por tanto, si se conocen las formas de

algunas curvas básicas es sencillo bosquejar numerosas variaciones de dichas curvas usando los conceptos de traslación y reflexión.

Esta sección comienza por establecer las gráficas de cuatro curvas básicas y luego aplica algunas transformaciones a dichas curvas. Primero reformule, en términos de vocabulario de funciones, las sugerencias de graficación ofrecidas en el capítulo 7. Ponga especial atención a las sugerencias 2 y 3, en las que se reformulan los conceptos de intersecciones con los ejes y simetría usando notación de funciones.

1. Determine el dominio de la función.
2. Encuentre la ordenada al origen [el eje y se etiqueta como $f(x)$] al evaluar $f(0)$. Encuentre la abscisa al origen al encontrar el valor(es) de x tal que $f(x) = 0$.
3. Determine cualquier tipo de simetría que posea la ecuación. Si $f(-x) = f(x)$, entonces la función muestra simetría con respecto al eje y. Si $f(-x) = -f(x)$, entonces la función muestra simetría en torno al origen. (Note que la definición de una función regula la posibilidad de que la gráfica de una función tenga simetría con respecto al eje x.)
4. Elabore una tabla de pares ordenados que satisfagan la ecuación. El tipo de simetría y el dominio afectarán su elección de valores de x en la tabla.
5. Grafique los puntos asociados con los pares ordenados y conéctelos con una curva continua. Luego, si es adecuado, refleje esta parte de la curva de acuerdo con cualquier simetría que posea la gráfica.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = x^3$

Solución

El dominio es el conjunto de los números reales. Puesto que $f(0) = 0$, el origen está sobre la gráfica. Puesto que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Por tanto, puede concentrar la tabla en los valores positivos de x. Al conectar los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla con una curva suave y luego reflejarla a través del origen, se obtiene la gráfica de la figura 8.43.

x	$f(x) = x^3$
0	0
1	1
2	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

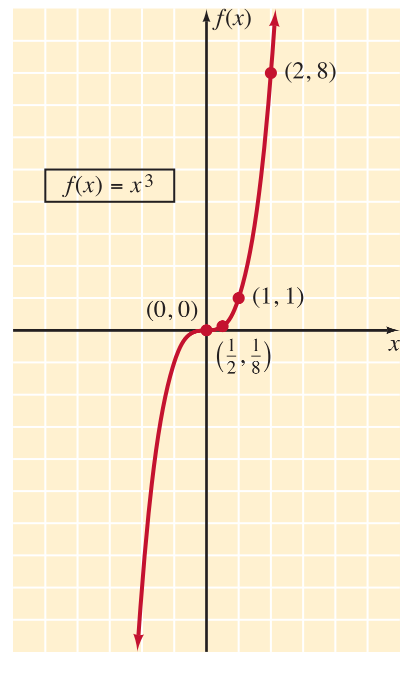


Figura 8.43 ■

EJEMPLO 2 Grafique $f(x) = x^4$

Solución

El dominio es el conjunto de los números reales. Puesto que $f(0) = 0$, el origen está sobre la gráfica. Puesto que $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, la gráfica tiene simetría con respecto al eje y, y puede concentrar la tabla de valores en los valores positivos de x. Si conecta los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla con una curva continua y luego los refleja a través del eje vertical, obtiene la gráfica de la figura 8.44.

x	$f(x) = x^4$
0	0
1	1
2	16
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

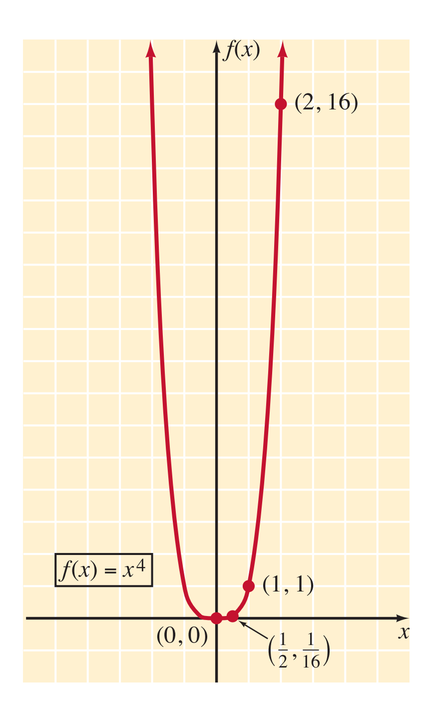


Figura 8.44 ■

Observaciones: La curva en la figura 8.44 no es una parábola, aun cuando recuerde a una; esta curva es más plana en el fondo y más inclinada.

EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

El dominio de la función es el conjunto de los números reales no negativos. Puesto que $f(0) = 0$, el origen está sobre la gráfica. Puesto que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, no hay simetría, así que se elabora una tabla de valores usando valores no negativos para x. Al graficar los puntos determinados por la tabla y conectarlos con una curva continua se produce la figura 8.45.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3

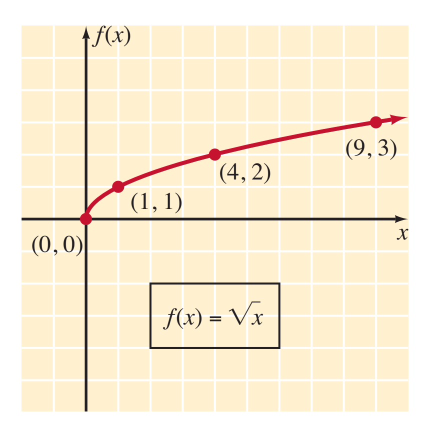


Figura 8.45

En ocasiones una nueva función se define en términos de funciones anteriores. En tales casos, la definición juega un importante papel en el estudio de la nueva función. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = |x|$

Solución

El concepto de valor absoluto se define para todos los números reales mediante

$$|x| = x \qquad \text{si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

Por tanto, la función valor absoluto se puede expresar como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $f(x) = x$ para $x \geq 0$ es el rayo en el primer cuadrante, y la gráfica de $f(x) = -x$ para $x < 0$ es la media línea (no incluido el origen) en el segundo cuadrante, como se indica en la figura 8.46. Note que la gráfica tiene simetría con respecto al eje y.

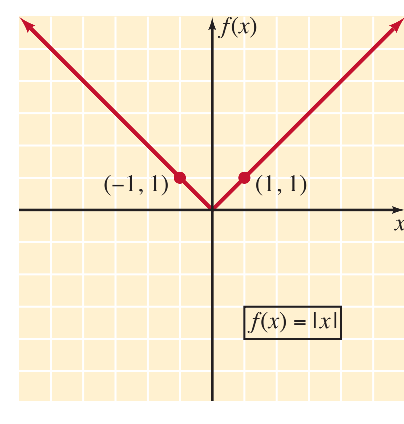


Figura 8.46

Traslaciones de las curvas básicas

A partir del trabajo en la sección 8.3, sabe que

1. La gráfica de $f(x) = x^2 + 3$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ movida arriba tres unidades.

2. La gráfica de $f(x) = x^2 - 2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ movida abajo dos unidades.

Ahora se describe el concepto general de una traslación vertical.

Traslación vertical

La gráfica de $y = f(x) + k$ es la gráfica de $y = f(x)$ corrida k unidades hacia arriba si $k > 0$ o corrida $|k|$ unidades hacia abajo, si $k < 0$.

En la figura 8.47, la gráfica de $f(x) = |x| + 2$ se obtiene al correr la gráfica de $f(x) = |x|$ hacia arriba dos unidades, y la gráfica de $f(x) = |x| - 3$ se obtiene al correr la gráfica de $f(x) = |x|$ hacia abajo tres unidades. [Recuerde que $f(x) = |x| - 3$ se puede escribir como $f(x) = |x| + (-3)$.]

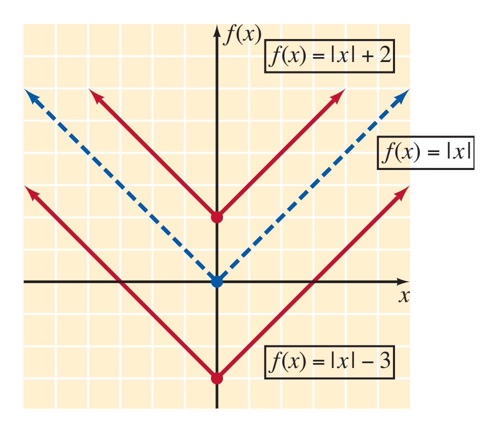


Figura 8.47

En la sección 8.3 también se graficaron traslaciones horizontales de la parábola básica. Por ejemplo:

1. La gráfica de $f(x) = (x - 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ corrida cuatro unidades a la derecha.

2. La gráfica de $f(x) = (x + 5)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ corrida cinco unidades a la izquierda.

El concepto general de una traslación horizontal se puede describir del modo siguiente.

Traslación horizontal

La gráfica de $y = f(x - h)$ es la gráfica de $y = f(x)$ corrida h unidades a la derecha si $h > 0$ o corrida $|h|$ unidades a la izquierda si $h < 0$.

En la figura 8.48 la gráfica de $f(x) = (x - 3)^3$ se obtiene al correr la gráfica de $f(x) = x^3$ tres unidades a la derecha. Del mismo modo, la gráfica de $f(x) = (x + 2)^3$ se obtiene al correr la gráfica de $f(x) = x^3$ dos unidades a la izquierda.

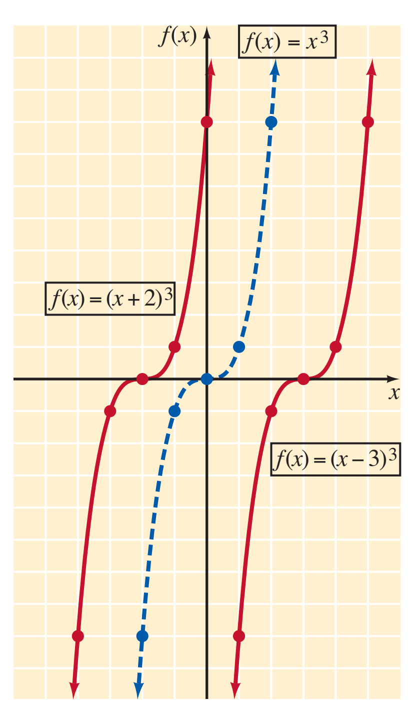


Figure 8.48

Reflexiones de las curvas básicas

A partir del trabajo en la sección 8.3 se sabe que la gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada a través del eje x. El concepto general de una reflexión con respecto al eje x se puede describir del modo siguiente:

Reflexión con respecto al eje *x*

La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada a través del eje x.

En la figura 8.49 la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a través del eje x. En ocasiones, a las reflexiones se les conoce como **imágenes especulares**. Por ende, si el eje x de la figura 8.49 se considera como un espejo, entonces las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = -\sqrt{x}$ son imágenes especulares una de la otra.

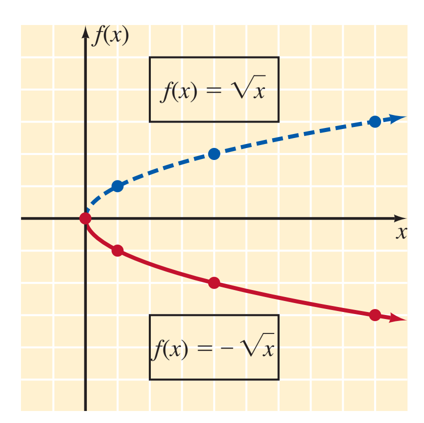


Figura 8.49

En la sección 8.3 no se consideró una reflexión en torno al eje y de la parábola básica $f(x) = x^2$, porque es simétrica con respecto al eje y. En otras palabras, una reflexión sobre el eje y de $f(x) = x^2$ produce la misma figura. Sin embargo, en este momento, se describe el concepto general de una reflexión con respecto al eje y.

Reflexión con respecto al eje *y*

La gráfica de $y = f(-x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada a través del eje y.

Ahora suponga que se quiere hacer una reflexión con respecto al eje y de $f(x) = \sqrt{x}$. Puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ se define por $x \geq 0$, la reflexión con respecto al eje y $f(x) = \sqrt{-x}$ se define por $-x \geq 0$, que es equivalente a $x \leq 0$. La figura 8.50 muestra la reflexión con respecto al eje y de $f(x) = \sqrt{x}$.

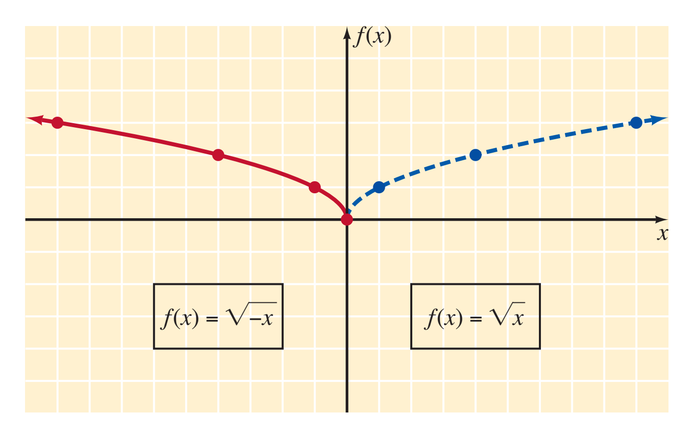


Figura 8.50

Estiramiento y encogimiento verticales

Las traslaciones y las reflexiones se llaman **transformaciones rígidas** porque la forma básica de la curva a transformar no cambia. En otras palabras, sólo lo hacen las posiciones de las gráficas. Ahora se quieren considerar algunas transformaciones que distorsionan un poco la forma de la figura original.

En la sección 8.3 se graficó la función $f(x) = 2x^2$ al doblar los valores $f(x)$ de los pares ordenados que satisfacen la función $f(x) = x^2$. Se obtuvo una parábola con su vértice en el origen, simétrica al eje y, pero *más estrecha* que la parábola básica. Del mismo modo, se graficó la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ al reducir a la mitad los valores $f(x)$ de los pares ordenados que satisfacen $f(x) = x^2$. En este caso se obtuvo una parábola con su vértice en el origen, simétrica al eje y, pero *más ancha* que la parábola básica.

Los conceptos de *más estrecha* y *más ancha* se pueden usar para describir parábolas, pero no se pueden usar para describir algunas otras curvas con precisión. En vez de ello se usan los conceptos más generales de estiramiento y encogimiento verticales.

Estiramiento y encogimiento verticales

La gráfica de $y = cf(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de $y = f(x)$ al multiplicar por c las coordenadas y para $y = f(x)$ por c. Si $|c| > 1$, se dice que la gráfica se *estira* por un factor de $|c|$ y si $0 < |c| < 1$ se dice que la gráfica se *encoge* por un factor de $|c|$.

En la figura 8.51, la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x}$ se obtuvo al duplicar las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. Del mismo modo, la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ se obtuvo al reducir a la mitad las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

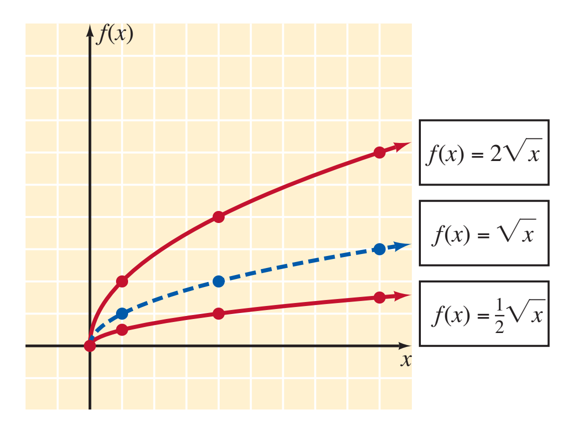


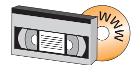
Figura 8.55

Transformaciones sucesivas

Algunas curvas son resultado de realizar más de una transformación sobre una curva básica. Considere la gráfica de una función que implica un estiramiento, una reflexión, una traslación horizontal y una traslación vertical de la función valor absoluto básica.

EJEMPLO 5

Grafique $f(x) = -2|x - 3| + 1$



Solución

Ésta es la curva valor absoluto básica estirada por un factor de 2, reflejada a través del eje x, corrida tres unidades a la derecha, y corrida una unidad hacia arriba. Para bosquejar la gráfica, ubique el punto (3, 1) y luego determine un punto sobre cada uno de los rayos. La gráfica se muestra en la figura 8.52.

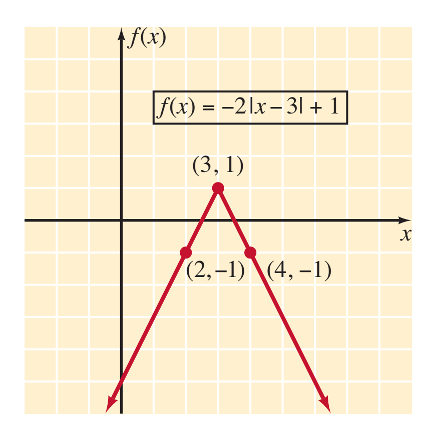


Figura 8.52

Observaciones: Note que, en el ejemplo 5, no se bosquejó la curva básica original $f(x) = |x|$ o alguna de las transformaciones intermedias. Sin embargo, es útil dibujar mentalmente cada transformación. Esto ubica el punto (3, 1) y establece el hecho de que los dos rayos apuntan hacia abajo. Entonces un punto sobre cada rayo determina la gráfica final.

No es necesario darse cuenta que cambiar el orden en la realización de las transformaciones puede producir una gráfica incorrecta. En el ejemplo 5 realizar primero las transformaciones y luego realizar el estiramiento y la reflexión en torno al eje x, ubicaría el vértice de la gráfica en (3, −1) en lugar de (3, 1). **A menos que los paréntesis indiquen otra cosa, estiramientos, encogimientos y reflexiones se deben realizar antes que las traslaciones**.

Suponga que necesita graficar la función $f(x) = \sqrt{-3 - x}$. Más aún, suponga que no tiene certeza de cuáles transformaciones de la función raíz cuadrada básica producirán esta función. Al graficar algunos puntos y usar su conocimiento

de la forma general de una curva raíz cuadrada, debe bosquejar la curva como se muestra en la figura 8.53.

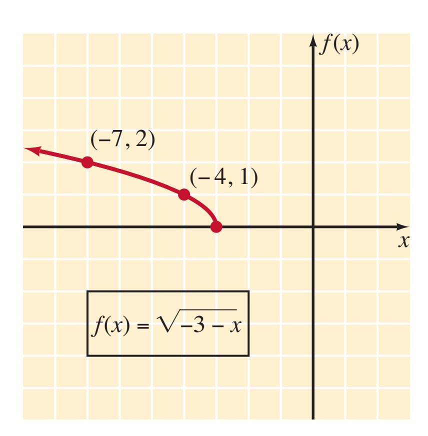


Figura 8.53

Ahora suponga que quiere graficar la siguiente función.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$$

Puesto que no es una función básica reconocida ni una transformación de una función básica, debe invertir las experiencias de graficación anteriores. En otras palabras, necesita encontrar el dominio, hallar las intersecciones con los ejes, verificar la simetría, comprobar cualquier restricción, elaborar una tabla de valores, graficar los puntos y bosquejar la curva. (Si quiere hacer esto ahora, puede comprobar su resultado en la página 503.) Más aún, si la nueva función se define en términos de una función anterior, puede aplicar la definición de la función anterior y en consecuencia simplificar la nueva función para propósitos de graficación. Suponga que se le pide graficar la función $f(x) = |x| + x$. Esta función se puede simplificar al aplicar la definición de valor absoluto. Esto se dejará para su resolución en el siguiente conjunto de problemas.

Finalmente, use una herramienta de graficación para dar otra ilustración del concepto de estiramiento y encogimiento de una curva.

EJEMPLO 6

Si $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, bosqueje una gráfica de $y = 2(f(x))$ y $y = \frac{1}{2}(f(x))$

Solución

Si $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, entonces

$$y = 2(f(x)) = 2\sqrt{25 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{25 - x^2}$$

Graficar estas tres funciones en el mismo conjunto de ejes produce la figura 8.54.

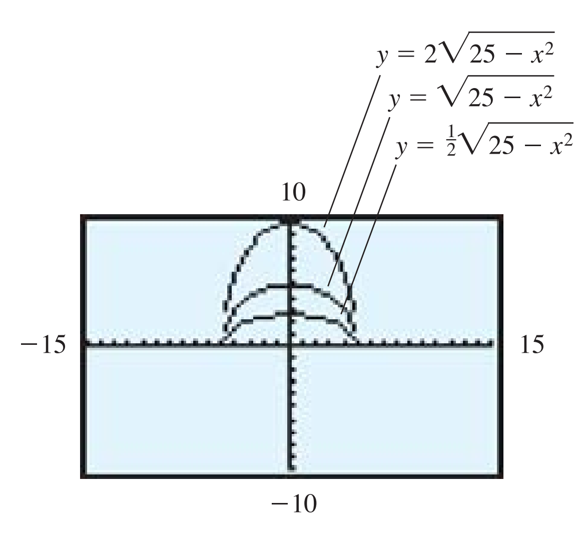


Figura 8.54

Conjunto de problemas 8.5

Para los problemas 1-30 grafique cada función.

1. $f(x) = x^4 + 2$

2. $f(x) = -x^4 - 1$

3. $f(x) = (x - 2)^4$

4. $f(x) = (x + 3)^4 + 1$

5. $f(x) = -x^3$

6. $f(x) = x^3 - 2$

7. $f(x) = (x + 2)^3$

8. $f(x) = (x - 3)^3 - 1$

9. $f(x) = |x - 1| + 2$

10. $f(x) = -|x + 2|$

11. $f(x) = |x + 1| - 3$

12. $f(x) = 2|x|$

13. $f(x) = x + |x|$

14. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

15. $f(x) = -|x - 2| - 1$

16. $f(x) = 2|x + 1| - 4$

17. $f(x) = x - |x|$

18. $f(x) = |x| - x$

19. $f(x) = -2\sqrt{x}$

20. $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

22. $f(x) = -\sqrt{x + 2} + 2$

23. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

24. $f(x) = \sqrt{-1 - x}$

25. $f(x) = -2x^4 + 1$

26. $f(x) = 2(x - 2)^4 - 4$

27. $f(x) = -2x^3$

28. $f(x) = 2x^3 + 3$

29. $f(x) = 3(x - 2)^3 - 1$

30. $f(x) = -2(x + 1)^3 + 2$

31. Suponga que la gráfica de $y = f(x)$, con un dominio de $-2 \leq x \leq 2$, se muestra en la figura 8.55.

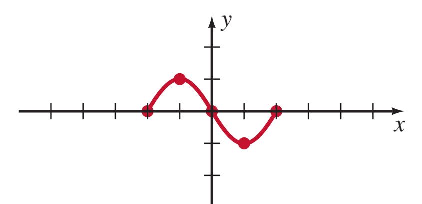


Figura 8.55

Bosqueje la gráfica de cada una de las siguientes transformaciones de $y = f(x)$.

(a) $y = f(x) + 3$

(b) $y = f(x - 2)$

(c) $y = -f(x)$

(d) $y = f(x + 3) - 4$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

32. ¿Las gráficas de las dos funciones, $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$, son reflejos mutuos sobre el eje y? Defienda su respuesta.

33. ¿Las gráficas de $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2x}$ son idénticas? Defienda su respuesta.

34. ¿Las gráficas de $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = \sqrt{-x+4}$ son reflejos mutuos sobre el eje y? Defienda su respuesta.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

35. Use su calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 13-30.

36. Grafique $f(x) = \sqrt{x^2+8}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ y $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sobre el mismo conjunto de ejes. Observe las gráficas y prediga la gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2-4}$. Ahora grafíquela con la calculadora para poner a prueba su predicción.

37. Para cada una de las siguientes expresiones, prediga la forma general y ubicación de la gráfica, y luego use su calculadora para graficar la función y comprobar su predicción.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x^3}$
(c) $f(x) = |x^2|$ **(d)** $f(x) = |x^3|$

38. Grafique $f(x) = x^4 + x^3$ Ahora prediga la gráfica para cada una de las siguientes expresiones y compruebe cada predicción con su calculadora graficadora.

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 4$
(b) $f(x) = (x-3)^4 + (x-3)^3$
(c) $f(x) = -x^4 - x^3$
(d) $f(x) = x^4 - x^3$

39. Grafique $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ahora prediga la gráfica para cada una de las siguientes expresiones y compruebe cada predicción con su calculadora graficadora.

(a) $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$ **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$
(c) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ **(d)** $f(x) = \sqrt[3]{x-3} - 5$
(e) $f(x) = \sqrt[3]{-x}$

8.6 Combinación de funciones

En cursos posteriores de matemáticas le será común encontrar funciones que se definan en términos de sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones más simples. Por ejemplo, si $h(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$, entonces puede considerar la función h como la suma de f y g, donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$. En general, si f y g son funciones y D es la intersección de sus dominios, entonces se pueden hacer las siguientes definiciones:

Suma	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferencia	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

EJEMPLO 1

Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 - x - 2$, encuentre (a) $(f + g)(x)$; (b) $(f - g)(x)$; (c) $(f \cdot g)(x)$, y (d) $(f/g)(x)$. Determine el dominio de cada una.

Soluciones

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 - x - 2) = x^2 + 2x - 3$

(b)
$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (3x - 1) - (x^2 - x - 2)\\ &= 3x - 1 - x^2 + x + 2\\ &= -x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (3x - 1)(x^2 - x - 2)\\ &= 3x^3 - 3x^2 - 6x - x^2 + x + 2\\ &= 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2\end{aligned}$$

(d) $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 2}$$

El dominio de f y g es el conjunto de todos los números reales. Por tanto, el dominio de $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ es el conjunto de todos los números reales. Para f/g, el denominador $x^2 - x - 2$ no puede ser igual a cero. Al resolver $x^2 - x - 2 = 0$ se produce

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

En consecuencia, el dominio para f/g es el conjunto de todos los números reales, excepto -1. ■

Las gráficas de las funciones pueden ayudarle a ordenar visualmente sus procesos de pensamiento. Por ejemplo, suponga que $f(x) = 0.46x - 4$ y $g(x) = 3$. Si piensa en términos de valores ordenados, parece razonable que la gráfica de $f + g$ es la gráfica de f movida arriba tres unidades. Del mismo modo, la gráfica de $f - g$ debe ser la gráfica de f movida abajo tres unidades. Use una calculadora graficadora para apoyar estas conclusiones. Al hacer $Y_1 = 0.46x - 4$, $Y_2 = 3$, $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y $Y_4 = Y_1 - Y_2$, se obtiene la figura 8.56.

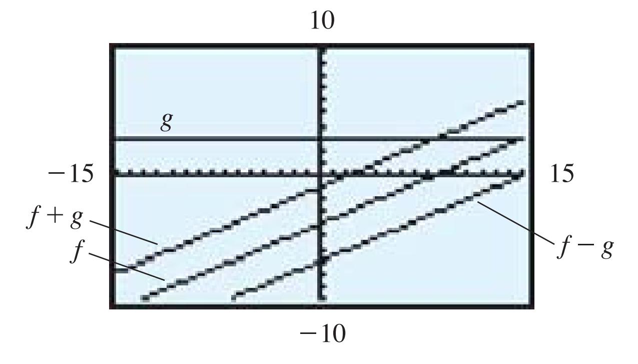


Figura 8.56

Ciertamente la figura apoya las conclusiones. Este tipo de análisis gráfico se vuelve más importante conforme las funciones se hacen más complejas.

Composición de funciones

Además de sumar, restar, multiplicar y dividir funciones, existe otra importante operación llamada *composición*. La composición de dos funciones se define del modo siguiente:

Definición 8.2

La **composición** de funciones f y g se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

para toda x en el dominio de g, tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

El lado izquierdo, $(f \circ g)(x)$, de la ecuación en la definición 8.2 se lee "la composición de f y g", y el lado derecho se lee "f de g de x". También puede serle útil tener una imagen mental de la definición 8.2 como dos máquinas de funciones enganchadas para producir otra función (llamada **función compuesta**), como se ilustra en la figura 8.57. Note que lo que sale de la función g se sustituye en la función f. Por ende, la composición a veces se conoce como **sustitución de funciones**.

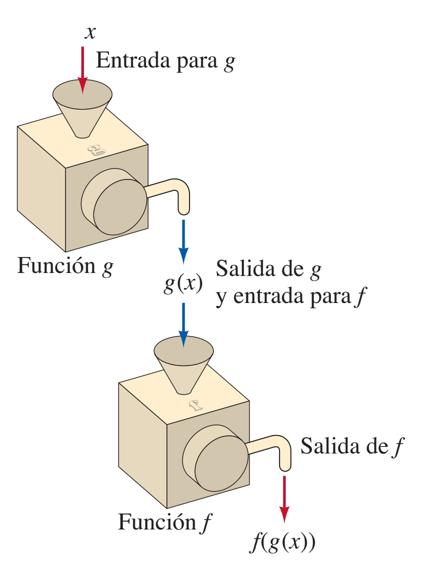


Figura 8.57

La figura 8.57 también ilustra el hecho de que $f \circ g$ se define para toda x en el dominio de g, tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, lo que sale de g debe poder alimentarse en f. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 2

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 4$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y determine su dominio.

Solución

Aplique la definición 8.2 para obtener

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x - 4) \\ &= (3x - 4)^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

Puesto que g y f se definen para todo número real, igual sucede con $f \circ g$. ■

La definición 8.2, con f y g intercambiadas, define la composición de g y f como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

EJEMPLO 3

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x - 4$, encuentre $(g \circ f)(x)$ y determine su dominio.

Solución

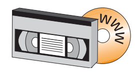
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 3x^2 - 4\end{aligned}$$

Puesto que f y g se definen para todo número real, lo mismo sucede con $g \circ f$. ■

Los resultados de los ejemplos 2 y 3 demuestran una idea importante: **la composición de funciones no es una operación conmutativa**. En otras palabras, $f \circ g \neq g \circ f$ para todas las funciones f y g. Sin embargo, como se verá en la sección 10.3, hay una clase especial de funciones para las cuales $f \circ g = g \circ f$.

EJEMPLO 4

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 1$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Determine también el dominio de cada función compuesta.



Solución

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 1) \\ &= \sqrt{2x - 1}\end{aligned}$$

El dominio y el rango de g son el conjunto de todos los números reales, pero el dominio de f es todo número real *no negativo*. Por tanto, $g(x)$, que es $2x - 1$, debe ser no negativa.

$$2x - 1 \geq 0$$
$$2x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{2}$$

En consecuencia, el dominio de $f \circ g$ es $D = \left\{x \middle| x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} - 1\end{aligned}$$

El dominio y el rango de f son el conjunto de los números reales no negativos. El dominio de g es el conjunto de todos los números reales. Por tanto, el dominio de $g \circ f$ es $D = \{x | x \geq 0\}$. ■

EJEMPLO 5

Si $f(x) = \frac{3}{x - 1}$ y $g(x) = \frac{1}{2x}$, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Determine el dominio para cada función compuesta.

Solución

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{2x}\right) \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2x} - 1} = \frac{3}{\frac{1}{2x} - \frac{2x}{2x}} = \frac{3}{\frac{1 - 2x}{2x}} \\ &= \frac{6x}{1 - 2x}\end{aligned}$$

El dominio de g es todos los números reales excepto 0, y el dominio de f es todos los números reales excepto 1. Por tanto, $g(x) \neq 1$. De modo que es necesario resolver $g(x) = 1$ para encontrar los valores de x que harán $g(x) = 1$.

$$g(x) = 1$$
$$\frac{1}{2x} = 1$$
$$1 = 2x$$
$$\frac{1}{2} = x$$

Por tanto, $x \neq \frac{1}{2}$, así que el dominio de $f \circ g$ es $D = \left\{x \middle| x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}\right\}$.

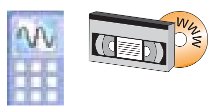
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{3}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{2\left(\frac{3}{x-1}\right)} = \frac{1}{\frac{6}{x-1}} \\ &= \frac{x-1}{6}\end{aligned}$$

El dominio de f es todos los números reales excepto 1, y el dominio de g es todos los números reales excepto 0. Puesto que $f(x)$, que es $3/(x-1)$, nunca será igual a 0, el dominio de $g \circ f$ es $D = \{x|x \neq 1\}$. ■

Puede usar una herramienta de graficación para encontrar la gráfica de una función compuesta sin realmente formar la función de manera algebraica. Vea cómo hacerlo.

EJEMPLO 6

Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 4$ use una herramienta de graficación para obtener las gráficas de $y = (f \circ g)(x)$ y de $y = (g \circ f)(x)$.



Solución

Para encontrar la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ puede hacer las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = x - 4$$
$$Y_2 = (Y_1)^3$$

[Note que se sustituyó Y_1 por x en $f(x)$ y esta expresión se asignó a Y_2, en gran medida como se haría algebraicamente.] La gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ se muestra en la figura 8.58.

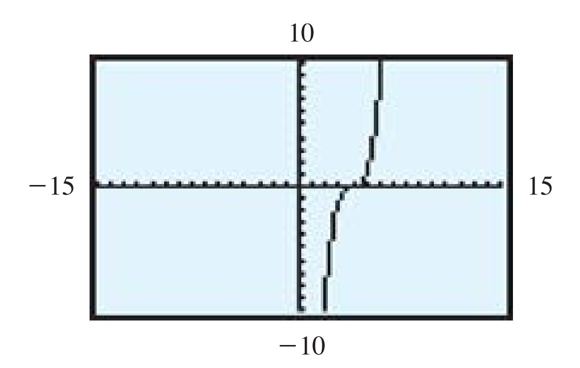


Figura 8.58

Para encontrar la gráfica de $y = (g \circ f)(x)$ puede hacer las siguientes asignaciones.

$$Y_1 = x^3$$
$$Y_2 = Y_1 - 4$$

La gráfica de $y = (g \circ f)(x)$ se muestra en la figura 8.59.

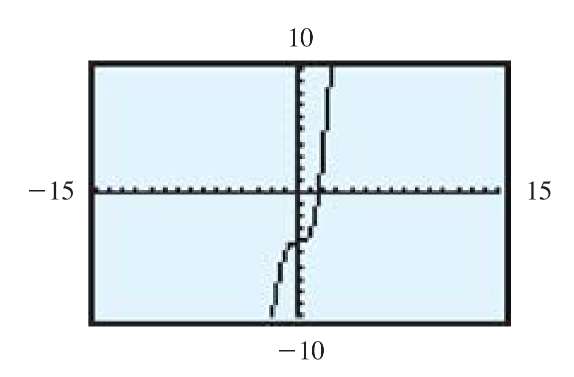


Figura 8.59

Revise nuevamente las figuras 8.58 y 8.59. Note que en la figura 8.58, la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ es la curva cúbica básica $f(x) = x^3$, trasladada cuatro unidades a la derecha. Del mismo modo, en la figura 8.59, la gráfica de $y = (g \circ f)(x)$ es la curva cúbica básica trasladada cuatro unidades abajo. Éstos son ejemplos de un concepto más general del uso de las funciones compuestas para representar varias transformaciones geométricas.

Conjunto de problemas 8.6

Para los problemas 1-8 encuentre $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g. Especifique también el dominio para cada una.

1. $f(x) = 3x - 4, \quad g(x) = 5x + 2$

2. $f(x) = -6x - 1, \quad g(x) = -8x + 7$

3. $f(x) = x^2 - 6x + 4, \quad g(x) = -x - 1$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5, \quad g(x) = x^2 - 4$

5. $f(x) = x^2 - x - 1, \quad g(x) = x^2 + 4x - 5$

6. $f(x) = x^2 - 2x - 24, \quad g(x) = x^2 - x - 30$

7. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

8. $f(x) = \sqrt{x + 2}, \quad g(x) = \sqrt{3x - 1}$

Para los problemas 9-26, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Especifique también el dominio para cada una.

9. $f(x) = 2x, \quad g(x) = 3x - 1$

10. $f(x) = 4x + 1, \quad g(x) = 3x$

11. $f(x) = 5x - 3, \quad g(x) = 2x + 1$

12. $f(x) = 3 - 2x, \quad g(x) = -4x$

13. $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = x^2 + 1$

14. $f(x) = 3, \quad g(x) = -3x^2 - 1$

15. $f(x) = 3x - 4, \quad g(x) = x^2 + 3x - 4$

16. $f(x) = 2x^2 - x - 1, \quad g(x) = x + 4$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = 2x + 7$

18. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = x$

19. $f(x) = \sqrt{x - 2}, \quad g(x) = 3x - 1$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

22. $f(x) = \dfrac{4}{x+2}, \quad g(x) = \dfrac{3}{2x}$

23. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

24. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = 5x - 2$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad g(x) = \dfrac{x+1}{x}$

26. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Para los problemas 27-32 resuelva cada problema.

27. Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 + 1$, encuentre $(f \circ g)(-1)$ y $(g \circ f)(3)$.

28. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x + 4$, encuentre $(f \circ g)(2)$ y $(g \circ f)(-4)$.

29. Si $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 - 3x - 4$, encuentre $(f \circ g)(-2)$ y $(g \circ f)(1)$.

30. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 2x + 1$, encuentre $(f \circ g)(1)$ y $(g \circ f)(2)$.

31. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 3x - 1$, encuentre $(f \circ g)(4)$ y $(g \circ f)(4)$.

32. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = |x|$, encuentre $(f \circ g)(-4)$ y $(g \circ f)(-4)$.

Para los problemas 33-38 muestre que $(f \circ g)(x) = x$ y que $(g \circ f)(x) = x$.

33. $f(x) = 2x, \quad g(x) = \dfrac{1}{2}x$

34. $f(x) = \dfrac{3}{4}x, \quad g(x) = \dfrac{4}{3}x$

35. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x + 2$

36. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{2}$

37. $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = \dfrac{x-4}{3}$

38. $f(x) = 4x - 3, \quad g(x) = \dfrac{x+3}{4}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

39. Analice si la suma, la resta, la multiplicación y la división de funciones son operaciones conmutativas.

40. Explique por qué la composición de dos funciones no es una operación conmutativa.

41. Explique cómo encontrar el dominio de

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ si } f(x) = \frac{x-1}{x+2} \text{ y } g(x) = \frac{x+3}{x-5}.$$

MÁS INVESTIGACIÓN

42. Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = ax + b$, encuentre condiciones sobre a y b que garantizarán que $f \circ g = g \circ f$.

43. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, ambas con dominio del conjunto de números reales no negativos, entonces demuestre que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$.

44. Si $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $g(x) = x$, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. (Recuerde que anteriormente $g(x) = x$ se llamó “función identidad”.)

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

45. Para cada una de las siguientes expresiones prediga la forma general y la ubicación de la gráfica, y luego use su calculadora para graficar la función y comprobar su predicción. (Su conocimiento de las gráficas de las funciones básicas que se suman o restan, debe ser útil cuando realice sus predicciones.)

(a) $f(x) = x^4 + x^2$ **(b)** $f(x) = x^3 + x^2$
(c) $f(x) = x^4 - x^2$ **(d)** $f(x) = x^2 - x^4$
(e) $f(x) = x^2 - x^3$ **(f)** $f(x) = x^3 - x^2$
(g) $f(x) = |x| + \sqrt{x}$ **(h)** $f(x) = |x| - \sqrt{x}$

46. Para cada una de las siguientes expresiones, encuentre la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ y de $y = (g \circ f)(x)$.

(a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 5$
(b) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + 3$
(d) $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$
(e) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 4$
(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x^3 - 5$

8.7 Variaciones directa e inversa

La cantidad de interés simple ganada por una cantidad fija de dinero invertido a cierta tasa *varía directamente* con el tiempo.

A una temperatura constante, el volumen de un gas encerrado *varía inversamente* con la presión.

Tales enunciados ilustran dos tipos básicos de relaciones funcionales, **variación directa** y **variación inversa**, que se usan ampliamente, en especial en las ciencias físicas. Dichas relaciones se expresan mediante ecuaciones que determinan funciones. El propósito de esta sección es investigar estas funciones especiales.

Variación directa

El enunciado "y varía directamente con x" significa

$$y = kx$$

donde k es una constante distinta de cero llamada **constante de variación**. La frase "y es directamente proporcional a x" también se usa para indicar variación directa; entonces a k se le conoce como **constante de proporcionalidad**.

Observaciones: Note que la ecuación $y = kx$ define una función y se puede escribir $f(x) = kx$. Sin embargo, en esta sección, es más conveniente no usar notación de función sino, en vez de ello, usar variables que sean significativas en términos de las entidades físicas implicadas en el problema particular.

Los enunciados que indican variación directa también pueden involucrar potencias de una variable. Por ejemplo, "y varía directamente como el cuadrado de x" se puede escribir $y = kx^2$. En general, y varía directamente como la n-ésima potencia de x ($n > 0$) significa

$$y = kx^n$$

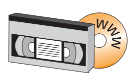
Existen tres tipos básicos de problemas en los cuales se lidia con variación directa:

1. Traducción de un enunciado verbal a una ecuación que exprese la variación directa;
2. Encontrar la constante de variación a partir de valores dados de las variables, y
3. Encontrar valores adicionales de las variables, una vez determinada la constante de variación.

Considere un ejemplo de cada tipo de problema.

EJEMPLO 1

Traduzca el enunciado "la tensión sobre un resorte varía directamente con la distancia que se estira" en una ecuación y use k como la constante de variación.



Solución

Sea t la tensión y d la distancia; la ecuación es

$$t = kd$$ ■

EJEMPLO 2

Si A varía directamente como el cuadrado de e, y si $A = 96$ cuando $e = 4$, encuentre la constante de variación.

Solución

Puesto que A varía directamente como el cuadrado de e, se tiene

$$A = ke^2$$

Sustituya A por 96 y e por 4 para obtener

$$96 = k(4)^2$$

$$96 = 16k$$

$$6 = k$$

La constante de variación es 6. ■

EJEMPLO 3

Si y es directamente proporcional a x, y si $y = 6$ cuando $x = 8$, encuentre el valor de y cuando $x = 24$

Solución

El enunciado "y es directamente proporcional a x" se traduce en

$$y = kx$$

Sea $y = 6$ y $x = 8$; la constante de variación se vuelve

$$6 = k(8)$$

$$\frac{6}{8} = k$$

$$\frac{3}{4} = k$$

Por ende, la ecuación específica es

$$y = \frac{3}{4}x$$

Ahora sea $x = 24$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}(24) = 18$$

Variación inversa

El segundo tipo básico de variación es la *variación inversa*. El enunciado "y varía inversamente con x" significa

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es una constante distinta de cero, que de nuevo se conoce como la constante de variación. La frase "y es inversamente proporcional a x" también se usa para expresar variación inversa. Como con la variación directa, los enunciados que indican variación inversa pueden requerir potencias de x. Por ejemplo, "y varía inversamente como el cuadrado de x" se puede escribir $y = k/x^2$. En general, y varía inversamente como la n-ésima potencia de x ($n > 0$) significa

$$y = \frac{k}{x^n}$$

Los siguientes ejemplos ilustran los tres tipos básicos de problemas que implican variación inversa.

EJEMPLO 4

Traduzca el enunciado “la longitud de un rectángulo de área fija varía inversamente con el ancho” en una ecuación, y use k como la constante de variación.

Solución

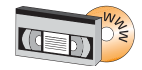
Sea l la longitud y w el ancho; la ecuación es

$$l = \frac{k}{w}$$

■

EJEMPLO 5

Si y es inversamente proporcional a x, y si $y = 14$ cuando $x = 4$, encuentre la constante de variación.



Solución

Puesto que y es inversamente proporcional a x, se tiene

$$y = \frac{k}{x}$$

Sustituya x por 4 y y por 14 para obtener

$$14 = \frac{k}{4}$$

Al resolver esta ecuación se tiene

$$k = 56$$

La constante de variación es 56.

EJEMPLO 6

El tiempo requerido para que un automóvil recorra cierta distancia varía inversamente con la rapidez a la que viaja. Si tarda 4 horas a 50 millas por hora en recorrer la distancia, ¿cuánto tardará a 40 millas por hora?

Solución

Sea t el tiempo y r la rapidez. La frase “tiempo requerido... varía inversamente con la rapidez” se traduce en

$$t = \frac{k}{r}$$

Sustituya t por 4 y r por 50 para encontrar la constante de variación.

$$4 = \frac{k}{50}$$

$$k = 200$$

Por tanto, la ecuación específica es

$$t = \frac{200}{r}$$

Ahora sustituya r por 40 para producir

$$t = \frac{200}{40}$$
$$= 5$$

Tardará 5 horas a 40 millas por hora. ■

Los términos *directa* e *inversa*, aplicadas a la variación, se refieren al comportamiento relativo de las variables involucradas en la ecuación. Esto es: en la *variación directa* ($y = kx$), una asignación de **valores absolutos crecientes para x** produce **valores absolutos crecientes para y**. Sin embargo, en la *variación inversa* ($y = k/x$), una asignación de **valores absolutos crecientes de x** produce **valores absolutos decrecientes en y**.

Variación conjunta

La variación puede involucrar más de dos variables. La siguiente tabla ilustra algunos tipos diferentes de enunciados de variación y sus ecuaciones algebraicas equivalentes que usan k como la constante de variación. Los enunciados 1, 2 y 3 ilustran el concepto de **variación conjunta**. Los enunciados 4 y 5 muestran que, en el mismo problema, pueden ocurrir tanto la variación directa como la inversa. El enunciado 6 combina la variación conjunta con la variación inversa.

Enunciado de variación	Ecuación algebraica
1. y varía conjuntamente con x y z.	$y = kxz$
2. y varía conjuntamente con x, z y w.	$y = kxzw$
3. V varía conjuntamente con h y con el cuadrado de r.	$V = khr^2$
4. h varía directamente con V e inversamente con w.	$h = \frac{kV}{w}$
5. y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z.	$y = \frac{kx}{z^2}$
6. y varía conjuntamente con w y z e inversamente con x.	$y = \frac{kwz}{x}$

Los dos ejemplos finales de esta sección ilustran diferentes tipos de problemas que implican algunas de estas situaciones de variación.

EJEMPLO 7

El volumen de una pirámide varía conjuntamente con su altura y el área de su base. Si una pirámide con una altura de 9 pies y una base con un área de 17 pies cuadrados tiene un volumen de 51 pies cúbicos, encuentre el volumen de una pirámide con una altura de 14 pies y una base con un área de 45 pies cuadrados.

Solución

Use las siguientes variables:

V = volumen h = altura

B = área de la base k = constante de variación

El hecho de que el volumen varíe conjuntamente con la altura y el área de la base se puede representar mediante la ecuación

$$V = kBh$$

Sustituya V con 51, B con 17 y h con 9 para obtener

$$51 = k(17)(9)$$

$$51 = 153k$$

$$\frac{51}{153} = k$$

$$\frac{1}{3} = k$$

Por tanto, la ecuación específica es $V = \frac{1}{3}Bh$. Ahora sustituya B con 45 y h con 14 para obtener

$$V = \frac{1}{3}(45)(14) = (15)(14) = 210$$

El volumen es 210 pies cúbicos. ■

EJEMPLO 8

Suponga que y varía conjuntamente con x y z, e inversamente con w. Si $y = 154$ cuando $x = 6$, $z = 11$ y $w = 3$, encuentre y cuando $x = 8$, $z = 9$ y $w = 6$.

Solución

El enunciado "y varía conjuntamente con x y z, e inversamente con w" se traduce en la ecuación

$$y = \frac{kxz}{w}$$

Sustituya y con 154, x con 6, z con 11 y w con 3 para producir

$$154 = \frac{(k)(6)(11)}{3}$$

$$154 = 22k$$

$$7 = k$$

Por tanto, la ecuación específica es

$$y = \frac{7xz}{w}$$

Ahora sustituya x por 8, z por 9 y w por 6 para obtener

$$y = \frac{7(8)(9)}{6} = 84$$

■

Conjunto de problemas 8.7

Para los problemas 1-8 traduzca cada enunciado de variación en una ecuación; use k como la constante de variación.

1. y varía directamente como el cubo de x.

2. a varía inversamente como el cuadrado de b.

3. A varía conjuntamente con l y w.

4. s varía conjuntamente con g y el cuadrado de t.

5. A una temperatura constante, el volumen (V) de un gas varía inversamente con la presión (P).

6. y varía directamente como el cuadrado de x e inversamente con el cubo de w.

7. El volumen (V) de un cono varía conjuntamente con su altura (h) y el cuadrado de un radio (r).

8. l es directamente proporcional a r y t.

Para los problemas 9-18 encuentre la constante de variación para cada condición enunciada.

9. y varía directamente con x y $y = 72$ cuando $x = 3$.

10. y varía inversamente con el cuadrado de x y $y = 4$ cuando $x = 2$.

11. A varía directamente como el cuadrado de r y $A = 154$ cuando $r = 7$.

12. V varía conjuntamente con B y h, y $V = 104$ cuando $B = 24$ y $h = 13$.

13. A varía conjuntamente con b y h, y $A = 81$ cuando $b = 9$ y $h = 18$.

14. s varía conjuntamente con g y el cuadrado de t, y $s = -108$ cuando $g = 24$ y $t = 3$.

15. y varía conjuntamente con x y z, e inversamente con w, y $y = 154$ cuando $x = 6$, $z = 11$ y $w = 3$.

16. V varía conjuntamente con h y el cuadrado de r, y $V = 1100$ cuando $h = 14$ y $r = 5$.

17. y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de w y $y = 18$ cuando $x = 9$ y $w = 3$.

18. y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de w, y $y = \frac{1}{5}$ cuando $x = 9$ y $w = 10$.

Para los problemas 19-32 resuelva cada uno de ellos.

19. Si y es directamente proporcional a x y $y = 5$ cuando $x = -15$, encuentre el valor de y cuando $x = -24$.

20. Si y es inversamente proporcional al cuadrado de x y $y = \frac{1}{8}$ cuando $x = 4$, encuentre y cuando $x = 8$.

21. Si V varía conjuntamente con B y h y $V = 96$ cuando $B = 36$ y $h = 8$, encuentre V cuando $B = 48$ y $h = 6$.

22. Si A varía directamente con el cuadrado de e y $A = 150$ cuando $e = 5$, encuentre A cuando $e = 10$.

23. El tiempo requerido para que un automóvil recorra cierta distancia varía inversamente con la rapidez a la que viaja. Si tarda 3 horas en recorrer la distancia a 50 millas por hora, ¿cuánto tardará a 30 millas por hora?

24. La distancia que cae un cuerpo en caída libre varía directamente con el cuadrado del tiempo que cae. Si un cuerpo cae 144 pies en 3 segundos, ¿cuánto caerá en 5 segundos?

25. El periodo (el tiempo requerido para una oscilación completa) de un péndulo simple varía directamente como la raíz cuadrada de su longitud. Si un péndulo de 12 pies de largo tiene un periodo de 4 segundos, encuentra el periodo de un péndulo de 3 pies de largo.

26. Suponga que el número de días que tarda en completar un trabajo de construcción varía inversamente con el número de personas asignadas. Si a 7 personas les toma 8 días realizar el trabajo, ¿cuánto tardarán 10 personas en completarlo?

27. El número de días necesarios para ensamblar algunas máquinas varía directamente con el número de máquinas e inversamente con el número de personas que trabajan. Si a 4 personas les toma 32 días ensamblar 16 máquinas, ¿cuántos días tardarán 8 personas en ensamblar 24 máquinas?

28. El volumen de un gas a una temperatura constante varía inversamente con la presión. ¿Cuál es el volumen de un gas bajo una presión de 25 libras, si el gas ocupa 15 centímetros cúbicos bajo una presión de 20 libras?

29. El volumen (V) de un gas varía directamente con la temperatura (T) e inversamente con la presión (P). Si $V = 48$ cuando $T = 320$ y $P = 20$, encuentre V cuando $T = 280$ y $P = 30$.

30. El volumen de un cilindro varía conjuntamente con su altura y el cuadrado del radio de su base. Si el volumen de un cilindro es de 1386 centímetros cúbicos cuando el radio de la base es de 7 centímetros, y su altura es de 9 centímetros, encuentre el volumen de un cilindro que tiene una base de 14 centímetros de radio, si la altura del cilindro es de 5 centímetros.

31. El costo de la mano de obra varía conjuntamente con el número de trabajadores y el número de días que trabajan. Si cuesta $900 tener 15 personas trabajando durante 5 días, ¿cuánto costará tener 20 personas trabajando durante 10 días?

32. El costo de publicar panfletos varía directamente con el número de panfletos producidos. Si cuesta $96 publicar 600 panfletos, ¿cuánto costará publicar 800 panfletos?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

33. ¿Cómo explicaría la diferencia entre variación directa y variación inversa?

34. Suponga que y varía directamente con el cuadrado de x. ¿Duplicar el valor de x también duplica el valor de y? Explique su respuesta.

35. Suponga que y varía inversamente con x. ¿Duplicar el valor de x también duplica el valor de y? Explique su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

C En los problemas anteriores se eligieron números para realizar cálculos razonables sin usar una calculadora. Sin embargo, los problemas de tipo variación con frecuencia implican cálculos complicados, y la calculadora se convierte en una herramienta muy útil. Use su calculadora para auxiliarse en la resolución de los siguientes problemas.

36. El interés simple ganado por cierta cantidad de dinero varía conjuntamente con la tasa de interés y el tiempo (en años) que se invierte el dinero.

(a) Si cierto dinero que se invierte a 11% durante 2 años gana $385, ¿cuánto ganaría la misma cantidad a 12% durante un año?

(b) Si cierto dinero que se invierte a 12% durante 3 años gana $819, ¿cuánto ganaría la misma cantidad a 14% durante 2 años?

(c) Si cierto dinero que se invierte a 14% durante 4 años gana $1960, ¿cuánto ganaría la misma cantidad a 15% durante 2 años?

37. El periodo (el tiempo requerido para una oscilación completa) de un péndulo simple varía directamente con la raíz cuadrada de su longitud. Si un péndulo de 9 pulgadas de largo tiene un periodo de 2.4 segundos, encuentre el periodo de un péndulo de 12 pulgadas de largo. Exprese la respuesta a la décima de segundo más cercana.

38. El volumen de un cilindro varía conjuntamente con su altura y el cuadrado del radio de su base. Si el volumen de un cilindro es de 549.5 metros cúbicos cuando el radio de la base es de 5 metros y su altura es de 7 metros, encuentre el volumen de un cilindro que tiene una base de 9 metros de radio y una altura de 14 metros.

39. Si y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z, y si $y = 0.336$ cuando $x = 6$ y $z = 5$, encuentre la constante de variación.

40. Si y es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de x, y $y = 0.08$ cuando $x = 225$, encuentre y cuando $x = 625$.

Capítulo 8 Resumen

(8.1) Una **función** f es una correspondencia entre dos conjuntos X y Y que asigna a cada elemento x del conjunto X uno y sólo un elemento y del conjunto Y. Al elemento y se le llama imagen de x. Al conjunto X se le llama **dominio** de la función y al conjunto de todas las imágenes se le llama **rango** de la función.

Una función también se puede considerar como un conjunto de pares ordenados, ningún par de los cuales tiene el mismo primer elemento.

Prueba de recta vertical Si cada recta vertical interseca una gráfica en no más de un punto, entonces la gráfica representa una función.

Las letras como f, g y h se usan comúnmente como símbolos para nombrar funciones. El símbolo $f(x)$ representa el elemento en el rango asociado con x desde el dominio. Por ende, si $f(x) = 3x + 7$, entonces $f(1) = 3\,(1) + 7 = 10$.

(8.2) Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son números reales, es una **función lineal**. La gráfica de una función lineal es una línea recta.

La función lineal $f(x) = x$ se llama **función identidad**.

Cualquier función lineal de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a = 0$, se llama **función constante**.

Las funciones lineales proporcionan una conexión natural entre las matemáticas y el mundo real.

(8.3) y **(8.4)** Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$ es una **función cuadrática**. La gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**, que se puede dibujar usando cualquiera de los siguientes métodos.

1. Exprese la función en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y use los valores de a, h y k para determinar la parábola.
2. Exprese la función en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y use el hecho de que el vértice está en

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

y el eje de simetría es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Las funciones cuadráticas producen parábolas que tienen un valor **mínimo** o uno **máximo**. Por tanto, un problema del mundo real con valor mínimo o máximo, que se puede describir mediante una función cuadrática, se puede resolver usando las técnicas de este capítulo.

(8.5) Otra importante habilidad en la graficación es reconocer las ecuaciones de transformación de las curvas básicas. En este capítulo se trabajó con las siguientes transformaciones:

Traslación vertical La gráfica de $y = f(x) + k$ es la gráfica de $y = f(x)$ corrida k unidades hacia arriba si $k > 0$ o corrida $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$.

Traslación horizontal La gráfica de $y = f(x - h)$ es la gráfica de $y = f(x)$ corrida h unidades a la derecha si $h > 0$ o corrida $|h|$ unidades a la izquierda si $h < 0$.

Reflexión con respecto al eje x La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada a través del eje x.

Reflexión con respecto al eje y La gráfica de $y = f(-x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada a través del eje y.

Estiramiento y encogimiento vertical La gráfica de $y = cf(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al multiplicar las coordenadas y de $y = f(x)$ por c. Si $|c| > 1$, se dice que la gráfica se **estira** por un factor de $|c|$, y si $0 < |c| < 1$ se dice que la gráfica se **encoge** por un factor de $|c|$.

Las siguientes sugerencias son útiles para graficar funciones que no son familiares.

1. Determine el dominio de la función.
2. Encuentre las intersecciones con los ejes.
3. Determine qué tipo de simetría muestra la ecuación.

4. Elabore una tabla de valores que satisfacen la ecuación. El tipo de simetría y el dominio afectarán la elección de valores para x en la tabla.

5. Grafique los puntos asociados con los pares ordenados y conéctelos con una curva continua. Luego, si es adecuado, refleje esta parte de la curva de acuerdo con la simetría que muestra la gráfica.

(8.6) Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir de acuerdo con la siguiente definición: si f y g son funciones y x está en el dominio de ambas funciones, entonces

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

Para encontrar el dominio de una suma, diferencia, producto o cociente de dos funciones, puede proceder del modo siguiente:

1. Encuentre el dominio de cada función por separado.
2. Encuentre el conjunto de valores común a cada dominio. Este conjunto de valores es el dominio de la suma, diferencia y producto de las funciones. El dominio del cociente es este conjunto de valores común a ambos dominios, excepto para cualquier valor que pudiera conducir a división entre cero.

La **composición** de las funciones f y g se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

para toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

Recuerde que la composición de funciones *no* es una operación conmutativa.

(8.7) Las relaciones que implican **variaciones directa** e **inversa** se expresan con ecuaciones que determinan funciones. El enunciado "y varía directamente con x" significa

$$y = kx$$

donde k es la **constante de variación**. El enunciado "y varía directamente con la n-ésima potencia de x" ($n > 0$) significa

$$y = kx^n$$

El enunciado "y varía inversamente con x" significa $y = \dfrac{k}{x^n}$.

El enunciado "y varía inversamente con la n-ésima potencia de x" ($n > 0$) significa $y = \dfrac{k}{x}$.

El enunciado "y varía conjuntamente con x y w" significa. $y = kxw$.

Capítulo 8 Conjunto de problemas de repaso

1. Si $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, encuentre $f(2)$, $f(-1)$ y $f(-3)$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
   (a) $f(x) = -5x + 4$ **(b)** $f(x) = 2x^2 - x + 4$
   (c) $f(x) = -3x^2 + 2x - 5$

3. Determine el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2 + 5$.

4. Determine el dominio de la función
   $$f(x) = \frac{2}{2x^2 + 7x - 4}.$$

5. Exprese el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ usando la notación de intervalo.

Para los problemas 6-23 grafique cada función.

6. $f(x) = -2x + 2$
7. $f(x) = 2x^2 - 1$
8. $f(x) = -\sqrt{x-2} + 1$
9. $f(x) = x^2 - 8x + 17$
10. $f(x) = -x^3 + 2$
11. $f(x) = 2|x-1| + 3$
12. $f(x) = -2x^2 - 12x - 19$
13. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 1$
14. $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$
15. $f(x) = 2|x| - x$

16. $f(x) = (x - 2)^2$

17. $f(x) = \sqrt{-x + 4}$

18. $f(x) = -(x + 1)^2 - 3$

19. $f(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

20. $f(x) = -|x| + 4$

21. $f(x) = (x - 2)^3$

22. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para } x < 0 \\ 3x - 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x \leq -3 \\ |x| & \text{para } -3 < x < 3 \\ 2x - 3 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

24. Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 4x - 3$, encuentre $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g.

Para los problemas 25-30, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Especifique también el dominio para cada una.

25. $f(x) = 3x - 9$ y $g(x) = -2x + 7$

26. $f(x) = x^2 - 5$ y $g(x) = 5x - 4$

27. $f(x) = \sqrt{x - 5}$ y $g(x) = x + 2$

28. $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 - x - 6$

29. $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$

30. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ y $g(x) = \frac{1}{x + 2}$

31. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{para } x \geq 0 \\ -3x + 4 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

encuentre $f(5)$, $f(0)$ y $f(-3)$.

32. Si $f(x) = -x^2 - x + 4$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, encuentre $f(g(6))$ y $g(f(-2))$.

33. Si $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - x - 1$, encuentre $(f \circ g)(1)$ y $(g \circ f)(-3)$.

34. Determine la función lineal cuya gráfica es una línea que es paralela a la línea determinada por $g(x) = \frac{2}{3}x + 4$ y contiene el punto $(5, -2)$.

35. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que es perpendicular a la recta determinada por $g(x) = -\frac{1}{2}x - 6$ y contiene el punto $(-6, 3)$.

36. El costo de encender una bombilla de 100 watts está dado por la función $c(h) = 0.006h$, donde h representa el número de horas que la bombilla está encendida. ¿Cuánto cuesta, al centavo más cercano, encender una bombilla de 100 watts durante 4 horas por noche durante un mes de 30 días?

37. "Todos los artículos con 30% de descuento sobre el precio marcado" es un anuncio en una tienda de departamentos local. Forme una función y luego úsela para determinar cuánto tiene que pagar por cada uno de los siguientes artículos marcados: un par de zapatos de $65, un pantalón deportivo de $48, un cinturón de $15.50.

Para los problemas 38-40 encuentre las abscisas al origen y el vértice para cada parábola.

38. $f(x) = 3x^2 + 6x - 24$

39. $f(x) = x^2 - 6x - 5$

40. $f(x) = 2x^2 - 28x + 101$

41. Encuentre dos números cuya suma es 10, tales que la suma del cuadrado de un número más cuatro veces el otro número es un mínimo.

42. Un grupo de estudiantes prepara un vuelo compartido a Europa. El cobro por persona es de $496 si 100 estudiantes van en el vuelo. Si van más de 100 estudiantes, el cargo por estudiante se reduce por una cantidad igual a $4 por el número de estudiantes arriba de 100. ¿Cuántos estudiantes podría llevar la aerolínea con la finalidad de maximizar sus ingresos?

43. Si y varía directamente con x e inversamente con w, y si $y = 27$ cuando $x = 18$ y $w = 6$, encuentre la constante de variación.

44. Si y varía conjuntamente con x y la raíz cuadrada de w, y si $y = 140$ cuando $x = 5$ y $w = 16$, encuentre y cuando $x = 9$ y $w = 49$.

45. El peso de un cuerpo arriba de la superficie de la Tierra varía inversamente con el cuadrado de su distancia desde el centro de la Tierra. Si supone que el radio de la Tierra es de 4000 millas, determine cuánto pesaría un hombre 1000 millas sobre la superficie de la Tierra, si pesa 200 libras en la superficie.

46. El número de horas necesarias para ensamblar algunos muebles varía directamente con el número de piezas de mobiliario e inversamente con el número de personas que laboran. Si a 3 personas les toma 10 horas ensamblar 20 piezas de mobiliario, ¿cuántas horas tardarán 4 personas en ensamblar 40 piezas de mobiliario?

Capítulo 8 Examen

1. Si $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, encuentre $f(-3)$.

2. Si $f(x) = -x^2 - 6x + 3$, encuentre $f(-2)$.

3. Si $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, encuentre $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

4. Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{-3}{2x^2 + 7x - 4}$.

5. Determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$.

6. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x^2 - x - 5$, encuentre $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$.

7. Si $f(x) = -3x + 4$ y $g(x) = 7x + 2$, encuentre $(f \circ g)(x)$.

8. Si $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = 2x^2 - x + 3$, encuentre $(g \circ f)(x)$.

9. Si $f(x) = \frac{3}{x - 2}$ y $g(x) = \frac{2}{x}$, encuentre $(f \circ g)(x)$.

10. Si $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = |x - 3|$, encuentre $f(g(-2))$ y $g(f(1))$.

11. Determine la función lineal cuya gráfica es una recta que tiene una pendiente de $-\frac{5}{6}$ y contiene el punto $(4, -8)$.

12. Si $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = \frac{2}{x - 1}$, determine el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

13. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3$, encuentre $(f + g)(-2)$, $(f - g)(4)$ y $(g - f)(-1)$.

14. Si $f(x) = x^2 + 5x - 6$ y $g(x) = x - 1$, encuentre $(f \cdot g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

15. Encuentre dos números cuya suma es 60 tales que la suma del cuadrado de un número más 12 veces el otro número es un mínimo.

16. Si y varía conjuntamente con x y z, y si $y = 18$ cuando $x = 8$ y $z = 9$, encuentre y cuando $x = 5$ y $z = 12$.

17. Si y varía inversamente con x, y si $y = y = \frac{1}{2}$ cuando $x = -8$, encuentre la constante de variación.

18. El interés simple ganado por cierta cantidad de dinero varía conjuntamente con la tasa de interés y el tiempo (en años) que el dinero se invierte. Si el dinero gana \$140 al invertirse a 7% durante 5 años, ¿cuánto ganará si la misma cantidad se invierte a 8% durante 3 años?

19. Un vendedor tiene algunos artículos que quiere vender con una ganancia de 35% del costo. ¿Qué función lineal puede usar para determinar los precios de venta de los artículos? ¿Qué precio debe cobrar por una corbata que le costó \$13?

20. Encuentre las abscisas al origen y el vértice de la parábola $f(x) = 4x^2 - 16x - 48$

Para los problemas 21-25 grafique cada función.

21. $f(x) = (x - 2)^3 - 3$

22. $f(x) = -2x^2 - 12x - 14$

23. $f(x) = 3|x - 2| - 1$

24. $f(x) = \sqrt{-x + 2}$

25. $f(x) = -x - 1$

9

Funciones polinomiales y racionales

Las gráficas de las funciones polinomiales son curvas continuas que se pueden usar para describir la trayectoria de objetos tales como una montaña rusa.

Antes, en este texto, se resolvieron ecuaciones lineales y cuadráticas, y se graficaron funciones lineales y cuadráticas. En este capítulo se ampliarán los procesos de resolución de ecuaciones y las técnicas de graficación para incluir ecuaciones y funciones polinomiales más generales. Entonces, el conocimiento de las funciones polinomiales le permitirá trabajar con funciones racionales. El concepto de función servirá de nuevo como un hilo unificador a lo largo del capítulo. Para facilitar el estudio en este capítulo, primero se revisará el concepto de la división de polinomios y se introducirán teoremas acerca de la división.

9.1 División sintética

En la sección 4.5 se estudió el proceso de dividir polinomios y el proceso simplificado de la división sintética cuando el divisor es de la forma $x - c$. Puesto que la división de polinomios es central en el estudio de las funciones polinomiales, se revisará el proceso de la división y se enunciarán los algoritmos y teoremas para la división de polinomios.

Anteriormente el proceso de la división de polinomios se estudió mediante el siguiente formato:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + 4 \\
\hline
3x + 1 & 3x^3 - 5x^2 + 10x + 1 \\
 & \underline{3x^3 + x^2} \\
 & -6x^2 + 10x + 1 \\
 & \underline{-6x^2 - 2x} \\
 & 12x + 1 \\
 & \underline{12x + 4} \\
 & -3
\end{array}
$$

También se sugirió escribir el resultado final como

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 10x + 1}{3x + 1} = x^2 - 2x + 4 + \frac{-3}{3x + 1}$$

Multiplicar ambos lados de esta ecuación por $3x + 1$ produce

$$3x^3 - 5x^2 + 10x + 1 = (3x + 1)(x^2 - 2x + 4) + (-3)$$

que es de la forma familiar

$$\text{Dividendo} = (\text{Divisor})(\text{Cociente}) + \text{Residuo}$$

Este resultado comúnmente se llama **algoritmo de división para polinomios** y se puede enunciar en términos generales del modo siguiente:

Algoritmo de división para polinomios

Si $f(x)$ y $d(x)$ son polinomios y $d(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

Dividendo Divisor Cociente Residuo

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $d(x)$.

Si el divisor es de la forma $x - c$, donde c es una constante, entonces el algoritmo típico de la división larga se puede simplificar convenientemente en un proceso llamado **división sintética**. Primero, considere un ejemplo que usa el algoritmo habitual. Luego, en un modo paso a paso, se mencionarán algunos atajos para usar el que conducirá al procedimiento de la división sintética. Considere el problema de la división $(3x^4 + x^3 - 15x^2 + 6x - 8) \div (x - 2)$:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3x^3 & +7x^2 & -x & +4 & \\ \cline{2-6}
x-2) & 3x^4 & +x^3 & -15x^2 & +6x & -8 \\
 & 3x^4 & -6x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 7x^3 & -15x^2 & & \\
 & & 7x^3 & -14x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^2 & +6x & \\
 & & & -x^2 & +2x & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4x & -8 \\
 & & & & 4x & -8 \\ \cline{5-6}
\end{array}$$

Note que, dado que el dividendo $(3x^4 + x^3 - 15x^2 + 6x - 8)$ se escribe en potencias descendentes de x, el cociente $(3x^3 + 7x^2 - x + 4)$ también está en potencias descendentes de x. En otras palabras, los coeficientes numéricos son la clave, así que este problema se reescribe en términos de sus coeficientes.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3 & 7 & -1 & 4 & \\ \cline{2-6}
1-2) & 3 & 1 & -15 & 6 & -8 \\
 & 3 & -6 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 7 & -15 & & \\
 & & 7 & -14 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -1 & 6 & \\
 & & & -1 & 2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 4 & -8 \\
 & & & & 4 & -8 \\ \cline{5-6}
\end{array}$$

Ahora observe que los números en círculos simplemente son repeticiones de los números que están directamente sobre ellos en el formato. Por ende, los números en círculos se podrían omitir y el formato sería el siguiente. (Por el momento no haga caso a las flechas.)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3 & 7 & -1 & 4 & \\ \cline{2-6}
1-2) & 3 & 1 & -15 & 6 & -8 \\
 & & -6 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 7 & & & \\
 & & & -14 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -1 & & \\
 & & & & 2 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 4 & \\
 & & & & & -8 \\ \cline{5-6}
\end{array}$$

A continuación mueva algunos números arriba, como indican las flechas, y omita escribir 1 como el coeficiente de x en el divisor para producir la siguiente forma más compacta:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & 3 & 7 & -1 & 4 & & (1)\\
\cline{2-6}
-2) & 3 & 1 & -15 & 6 & -8 & (2)\\
 & & -6 & -14 & 2 & -8 & (3)\\
\cline{2-6}
 & & 7 & -1 & 4 & & (4)
\end{array}$$

Note que la línea (4) revela todos los coeficientes de la línea cociente (1), excepto para el primer coeficiente, 3. Por tanto, puede omitir la línea (1), comenzar la línea (4) con el primer coeficiente y luego usar la forma siguiente:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
-2) & 3 & 1 & -15 & 6 & -8 & (5)\\
 & & -6 & -14 & 2 & -8 & (6)\\
\cline{2-6}
 & 3 & 7 & -1 & 4 & 0 & (7)
\end{array}$$

La línea (7) contiene los coeficientes del cociente; el 0 indica el residuo. Finalmente, al cambiar la constante en el divisor a 2 (en lugar de -2), lo que cambiará los signos de los números en la línea (6), permite sumar las entradas correspondientes en las líneas (5) y (6) en lugar de restarlas. Por tanto, la forma final de la división sintética para este problema es

$$\begin{array}{rrrrrr}
2) & 3 & 1 & -15 & 6 & -8\\
 & & 6 & 14 & -2 & 8\\
\cline{2-6}
 & 3 & 7 & -1 & 4 & 0
\end{array}$$

Ahora se considerará otro problema y se seguirá paso a paso el procedimiento para establecer y llevar a cabo la división sintética. Suponga que se quiere resolver el siguiente problema de división.

$$x + 4\overline{)2x^3 + 5x^2 - 13x - 2}$$

1. Escriba los coeficientes del dividendo del modo siguiente:

$$\overline{)2 \quad 5 \quad -13 \quad -2}$$

2. En el divisor use -4 en lugar de 4, de modo que más tarde se pueda sumar en lugar de restar.

$$-4\overline{)2 \quad 5 \quad -13 \quad -2}$$

3. Baje el primer coeficiente del dividendo

$$\begin{array}{rrrrr}
-4) & 2 & 5 & -13 & -2\\
 & & & & \\
\cline{2-5}
 & 2 & & &
\end{array}$$

4. Multiplique ese primer coeficiente por el divisor, lo que produce $2(-4) = -8$. Este resultado se suma al segundo coeficiente del dividendo.

$$\begin{array}{rrrrr}
-4) & 2 & 5 & -13 & -2\\
 & & -8 & & \\
\cline{2-3}
 & 2 & -3 & &
\end{array}$$

5. Multiplique (−3)(−4), lo que produce 12; este resultado se suma al tercer coeficiente del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & 5 & -13 & -2 \\ & & -8 & 12 & \\ \hline & 2 & -3 & -1 & \end{array}$$

6. Multiplique (−1)(−4), lo que produce 4; este resultado se suma al último término del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & 5 & -13 & -2 \\ & & -8 & 12 & 4 \\ \hline & 2 & -3 & -1 & 2 \end{array}$$

La última hilera indica un cociente de $2x^2 - 3x - 1$ y un residuo de 2.

Considere tres ejemplos más, en los que sólo se muestra la forma compacta final para la división sintética.

EJEMPLO 1

Encuentre el cociente y el resto para $(2x^3 - 5x^2 + 6x + 4) \div (x - 2)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & 6 & 4 \\ & & 4 & -2 & 8 \\ \hline & 2 & -1 & 4 & 12 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $2x^2 - x + 4$ y el residuo es 12. ■

EJEMPLO 2

Encuentre el cociente y el resto para $(4x^4 - 2x^3 + 6x - 1) \div (x - 1)$

Solución

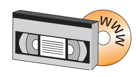
$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 4 & -2 & 0 & 6 & -1 \\ & & 4 & 2 & 2 & 8 \\ \hline & 4 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{array}$$

Note que se insertó un 0 como el coeficiente del término faltante x^2.

Por tanto, el cociente es $4x^3 + 2x^2 + 2x + 8$ y el residuo es 7. ■

EJEMPLO 3

Encuentre el cociente y el residuo para $(x^3 + 8x^2 + 13x - 6) \div (x + 3)$



Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 8 & 13 & -6 \\ & & -3 & -15 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $x^2 + 5x - 2$, y el residuo es 0. ■

En el ejemplo 3, puesto que el residuo es 0, se puede decir que $x + 3$ es un factor de $x^3 + 8x^2 + 13x - 6$. Esta idea se usará un poco más tarde cuando se resuelvan ecuaciones polinomiales.

Conjunto de problemas 9.1

Use la división sintética para determinar el cociente y el residuo para cada problema.

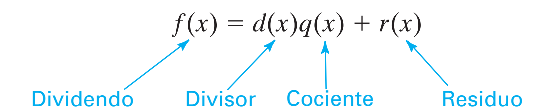
1. $(4x^2 - 5x - 6) \div (x - 2)$
2. $(5x^2 - 9x + 4) \div (x - 1)$
3. $(2x^2 - x - 21) \div (x + 3)$
4. $(3x^2 + 8x + 4) \div (x + 2)$
5. $(3x^2 - 16x + 17) \div (x - 4)$
6. $(6x^2 - 29x - 8) \div (x - 5)$
7. $(4x^2 + 19x - 32) \div (x + 6)$
8. $(7x^2 + 26x - 2) \div (x + 4)$
9. $(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) \div (x - 1)$
10. $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3) \div (x - 3)$
11. $(3x^3 + 8x^2 - 8) \div (x + 2)$
12. $(4x^3 + 17x^2 + 75) \div (x + 5)$
13. $(5x^3 - 9x^2 - 3x - 2) \div (x - 2)$
14. $(x^3 - 6x^2 + 5x + 14) \div (x - 4)$
15. $(x^3 + 6x^2 - 8x + 1) \div (x + 7)$
16. $(2x^3 + 11x^2 - 5x + 1) \div (x + 6)$
17. $(-x^3 + 7x^2 - 14x + 6) \div (x - 3)$
18. $(-2x^3 - 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 1)$
19. $(-3x^3 + x^2 + 2x + 2) \div (x + 1)$
20. $(-x^3 + 4x^2 + 31x + 2) \div (x - 8)$
21. $(3x^3 - 2x - 5) \div (x - 2)$
22. $(2x^3 - x - 4) \div (x + 3)$
23. $(2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 2) \div (x + 1)$
24. $(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 11x - 12) \div (x - 4)$
25. $(x^4 + 4x^3 - 7x - 1) \div (x - 3)$
26. $(3x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x - 1) \div (x + 1)$
27. $(x^4 + 5x^3 - x^2 + 25) \div (x + 5)$
28. $(2x^4 + 3x^2 + 3) \div (x + 2)$
29. $(x^4 - 16) \div (x - 2)$
30. $(x^4 - 16) \div (x + 2)$
31. $(x^5 - 1) \div (x + 1)$
32. $(x^5 - 1) \div (x - 1)$
33. $(x^5 + 1) \div (x + 1)$
34. $(x^5 + 1) \div (x - 1)$
35. $(x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 3x - 4) \div (x + 4)$
36. $(2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 5x - 2) \div (x + 2)$
37. $(4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x + 2) \div (x - 1)$
38. $(3x^5 - 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 9x + 4) \div (x - 2)$
39. $(9x^3 - 6x^2 + 3x - 4) \div \left(x - \frac{1}{3}\right)$
40. $(2x^3 + 3x^2 - 2x + 3) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$
41. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$
42. $(4x^4 - 5x^2 + 1) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. ¿Cómo expondría una descripción general de lo que se logra con la división sintética, a alguien que apenas haya completado un curso de álgebra elemental?
44. ¿Por qué la división sintética se restringe a situaciones-donde el divisor es de la forma $x - c$?

9.2 Teoremas del residuo y el factor

Considere el algoritmo de la división (enunciado en la sección anterior), cuando el dividendo, $f(x)$, se divide entre un polinomio lineal de la forma $x - c$. Entonces el algoritmo de la división



se convierte en

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$$

Puesto que el grado del residuo, $r(x)$, debe ser menor que el grado del divisor, $x - c$, el residuo es una constante. Por tanto, al ser R el residuo, se tiene

$$f(x) = (x - c)q(x) + R$$

Si se encuentra el valor funcional en c se obtiene

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + R \\ &= 0 \cdot q(c) + R \\ &= R \end{aligned}$$

En otras palabras, si un polinomio se divide entre un polinomio lineal de la forma $x - c$, entonces el residuo está dado por el valor del polinomio en c. Este resultado se enuncia de manera más formal como el teorema del residuo.

Propiedad 9.1 Teorema del residuo

Si el polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es igual a $f(c)$.

EJEMPLO 1

Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 1$, encuentre $f(2)$ al usar (a) división sintética y el teorema del residuo, y (b) al evaluar directamente $f(2)$.

Solución

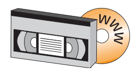
(a)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -1 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array} \leftarrow R = f(2)$$

(b) $f(2) = 2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 1 = 8 + 8 - 10 - 1 = 5$ ■

E J E M P L O 2

Si $f(x) = x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 11x + 5$, encuentre $f(-6)$ al (a) usar la división sintética y el teorema del residuo, y (b) al evaluar directamente $f(-6)$.



Solución

(a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} -6 & 1 & 7 & 8 & 11 & 5 \\ & & -6 & -6 & -12 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -1 & \boxed{11} \end{array} \longleftarrow R = f(-6)$$

(b) $f(-6) = (-6)^4 + 7(-6)^3 + 8(-6)^2 + 11(-6) + 5$
$= 1296 - 1512 + 288 - 66 + 5$
$= 11$ ■

En el ejemplo 2 note que los cálculos realizados al encontrar $f(-6)$ al usar la división sintética y el teorema del residuo son mucho más sencillos que los requeridos para evaluar directamente $f(-6)$. Éste no siempre es el caso, pero usar la división sintética con frecuencia es más sencillo que evaluar $f(c)$ directamente.

E J E M P L O 3

Encuentre el residuo cuando $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ se divide por $x + 1$

Solución

Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$, escriba $x + 1$ como $x - (-1)$ y aplique el teorema del residuo.

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 13(-1) - 15 = 0$$

Por tanto, el residuo es 0. ■

El ejemplo 3 ilustra un aspecto importante del teorema del residuo, la situación en la cual el residuo es *cero*. Por ende, se puede decir que $x + 1$ es un factor de $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.

Teorema del factor

Un teorema del factor general se puede formular al considerar la ecuación

$$f(x) = (x - c)q(x) + R$$

Si $x - c$ es un factor de (x), entonces el residuo R, que también es $f(c)$, debe ser cero. De manera inversa, si $R = f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; en otras palabras, $x - c$ es un factor de $f(x)$. El teorema del factor se puede enunciar del modo siguiente:

Propiedad 9.2 Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

EJEMPLO 4

¿$x - 1$ es un factor de $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$?

Solución

Sea $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ y calcule $f(1)$ para obtener

$$f(1) = 1^3 + 5(1)^2 + 2(1) - 8 = 0$$

Por el teorema del factor, $x - 1$ es un factor de $f(x)$. ■

EJEMPLO 5

¿$x + 3$ es un factor de $2x^3 + 5x^2 - 6x - 7$?

Solución

Use división sintética para obtener lo siguiente:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 5 & -6 & -7 \\ & & -6 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{2} \end{array} \quad \longleftarrow \quad R = f(-3)$$

Puesto que $R \neq 0$, se sabe que $x + 3$ no es un factor del polinomio dado. ■

En los ejemplos 4 y 5, sólo la preocupación era determinar si un polinomio lineal de la forma $x - c$ era un factor de otro polinomio. Para tales problemas es razonable calcular $f(c)$ directamente o por división sintética, lo que importa es la forma que parezca más sencilla para un problema particular. Sin embargo, si se requiere más información, como la factorización completa del polinomio dado, entonces el uso de la división sintética es adecuado, como ilustran los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 6

Demuestre que $x - 1$ es un factor de $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ y encuentre los otros factores lineales del polinomio.

Solución

Use la división sintética para dividir $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

La última línea indica un cociente de $x^2 - x - 12$ y un residuo de 0. El residuo de 0 significa que $x - 1$ es un factor. Más aún, se puede escribir

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x - 1)(x^2 - x - 12)$$

El polinomio cuadrático $x^2 - x - 12$ se puede factorizar como $(x - 4)(x + 3)$ al usar las técnicas de factorización convencionales. Por ende, se obtiene

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x - 1)(x - 4)(x + 3)$$ ■

EJEMPLO 7

Demuestre que $x + 4$ es un factor de $f(x) = x^3 - 5x^2 - 22x + 56$ y complete la factorización de $f(x)$.

Solución

Use división sintética para dividir $x^3 - 5x^2 - 22x + 56$ por $x + 4$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & -5 & -22 & 56 \\ & & -4 & 36 & -56 \\ \hline & 1 & -9 & 14 & 0 \end{array}$$

La última línea indica un cociente de $x^2 - 9x + 14$ y un residuo de 0. El residuo de 0 significa que $x + 4$ es un factor. Más aún, puede escribir

$$x^3 - 5x^2 - 22x + 56 = (x + 4)(x^2 - 9x + 14)$$

y luego complete la factorización para obtener

$$x^3 - 5x^2 - 22x + 56 = (x + 4)(x - 7)(x - 2)$$ ■

El teorema del factor también juega un papel significativo al determinar algunas ideas de factorización generales, como demuestra el último ejemplo de esta sección.

EJEMPLO 8

Verifique que $x + 1$ es un factor de $x^n + 1$ para todos los valores enteros positivos impares de n.

Solución

Sea $f(x) = x^n + 1$ y calcule $f(-1)$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^n + 1 \\ &= -1 + 1 \qquad \text{Cualquier potencia impar de } -1 \text{ es } -1. \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que $f(-1) = 0$ se sabe que $x + 1$ es un factor de $f(x)$. ■

Conjunto de problemas 9.2

Para los problemas 1-10 encuentre $f(c)$ al (a) evaluar directamente $f(c)$ y al (b) usar división sintética y el teorema del residuo.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 6$ y $c = 3$
2. $f(x) = x^2 - 7x + 4$ y $c = 2$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ y $c = -1$
4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7$ y $c = -2$
5. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ y $c = 2$
6. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7x + 6$ y $c = 1$
7. $f(n) = 6n^3 - 35n^2 + 8n - 10$ y $c = 6$
8. $f(n) = 8n^3 - 39n^2 - 7n - 1$ y $c = 5$
9. $f(n) = 2n^5 - 1$ y $c = -2$
10. $f(n) = 3n^4 - 2n^3 + 4n - 1$ y $c = 3$

Para los problemas 11-20 encuentre $f(c)$ usando división sintética y el teorema del residuo *o* al evaluar directamente $f(c)$.

11. $f(x) = 6x^5 - 3x^3 + 2$ y $c = -1$
12. $f(x) = -4x^4 + x^3 - 2x^2 - 5$ y $c = 2$

13. $f(x) = 2x^4 - 15x^3 - 9x^2 - 2x - 3$ y $c = 8$

14. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 15x + 2$ y $c = 7$

15. $f(n) = 4n^7 + 3$ y $c = 3$

16. $f(n) = -3n^6 - 2$ y $c = -3$

17. $f(n) = 3n^5 + 17n^4 - 4n^3 + 10n^2 - 15n + 13$ y $c = -6$

18. $f(n) = -2n^5 - 9n^4 + 7n^3 + 14n^2 + 19n - 38$ y $c = -5$

19. $f(x) = -4x^4 - 6x^2 + 7$ y $c = 4$

20. $f(x) = 3x^5 - 7x^3 - 6$ y $c = 5$

Para los problemas 21-34 utilice el teorema del factor para auxiliarse a responder algunas preguntas acerca de los factores.

21. ¿$x - 2$ es factor de $5x^2 - 17x + 14$?

22. ¿$x + 1$ es factor de $3x^2 - 5x - 8$?

23. ¿$x + 3$ es factor de $6x^2 + 13x - 14$?

24. ¿$x - 5$ es factor de $8x^2 - 47x + 32$?

25. ¿$x - 1$ es factor de $4x^3 - 13x^2 + 21x - 12$?

26. ¿$x - 4$ es factor de $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$?

27. ¿$x + 2$ es factor de $x^3 + 7x^2 + x - 18$?

28. ¿$x + 3$ es factor de $x^3 + x^2 - 14x - 24$?

29. ¿$x - 3$ es factor de $3x^3 - 5x^2 - 17x + 17$?

30. ¿$x + 4$ es factor de $2x^3 + 9x^2 - 5x - 39$?

31. ¿$x + 2$ es factor de $x^3 + 8$?

32. ¿$x - 2$ es factor de $x^3 - 8$?

33. ¿$x - 3$ es factor de $x^4 - 81$?

34. ¿$x + 3$ es factor de $x^4 - 81$?

Para los problemas 35-44 use división sintética para demostrar que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, y complete la factorización de $f(x)$.

35. $g(x) = x - 2, \quad f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$

36. $g(x) = x + 1, \quad f(x) = x^3 + 6x^2 - 31x - 36$

37. $g(x) = x + 2, \quad f(x) = 12x^3 + 29x^2 + 8x - 4$

38. $g(x) = x - 3, \quad f(x) = 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$

39. $g(x) = x + 1, \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

40. $g(x) = x - 5, \quad f(x) = 2x^3 + x^2 - 61x + 30$

41. $g(x) = x - 6, \quad f(x) = x^5 - 6x^4 - 16x + 96$

42. $g(x) = x + 3, \quad f(x) = x^5 + 3x^4 - x - 3$

43. $g(x) = x + 5, \quad f(x) = 9x^3 + 21x^2 - 104x + 80$

44. $g(x) = x + 4, \quad f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 39x + 36$

Para los problemas 45-48 encuentre el valor(es) de k que hacen al segundo polinomio un factor del primero.

45. $k^2x^4 + 3kx^2 - 4; x - 1$

46. $x^3 - kx^2 + 5x + k; x - 2$

47. $kx^3 + 19x^2 + x - 6; x + 3$

48. $x^3 + 4x^2 - 11x + k; x + 2$

49. Argumente que $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 5$ no tiene factor de la forma $x - c$, donde c es un número real.

50. Demuestre que $x + 2$ es un factor de $x^{12} - 4096$.

51. Verifique que $x + 1$ es un factor de $x^n - 1$ para todos los valores enteros positivos pares de n.

52. Verifique que $x - 1$ es un factor de $x^n - 1$ para todos los valores enteros positivos de n.

53. **(a)** Verifique que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los valores enteros positivos de n.

(b) Verifique que $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los valores enteros positivos pares de n.

(c) Verifique que $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$ para todos los valores enteros positivos impares de n.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

54. Enuncie el teorema del residuo con sus propias palabras.

55. Analice algunos de los usos del teorema del factor.

MÁS INVESTIGACIÓN

Los teoremas del residuo y del factor son verdaderos para cualquier valor complejo de c. Por tanto, para los problemas 56-58, encuentre $f(c)$ al (a) usar división sintética y el teorema del residuo, y (b) evaluar directamente $f(c)$.

56. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ y $c = i$

57. $f(x) = x^2 + 4x - 2$ y $c = 1 + i$

58. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$ y $c = 2 - 3i$

59. Demuestre que $x - 2i$ es factor de $f(x) = x^4 + 6x^2 + 8$.

60. Demuestre que $x + 3i$ es factor de $f(x) = x^4 + 14x^2 + 45$.

61. Considere cambiar la forma del polinomio $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ de la manera siguiente:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$
$$= x(x^2 + 4x - 3) + 2$$
$$= x[x(x + 4) - 3] + 2$$

La forma final $f(x) = x[x(x + 4) - 3] + 2$ se llama **forma anidada** del polinomio. Es particularmente adecuada para evaluar a mano o con una calculadora valores funcionales de f. Para cada una de las siguientes, encuentre los valores funcionales indicados usando la forma anidada del polinomio dado.

(a) $f(4)$, $f(-5)$ y $f(7)$ para $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1$

(b) $f(3)$, $f(6)$ y $f(-7)$ para $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

(c) $f(4)$, $f(5)$ y $f(-3)$ para $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 6x - 7$

(d) $f(5)$, $f(6)$ y $f(-3)$ para $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

9.3 Ecuaciones polinomiales

Ha resuelto gran variedad de ecuaciones lineales de la forma $ax + b = 0$ y ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las ecuaciones lineales y cuadráticas son casos especiales de una clase general de ecuaciones conocidas como **ecuaciones polinomiales**. La ecuación

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo, se llama **ecuación polinomial de grado n**. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones polinomiales:

$\sqrt{2}x - 6 = 0$ Grado 1

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 5 = 0$ Grado 2

$4x^3 - 3x^2 - 7x - 9 = 0$ Grado 3

$5x^4 - x + 6 = 0$ Grado 4

Observaciones: La ecuación polinomial más general permitiría números complejos como polinomios. Sin embargo, para propósitos de este texto, los coeficientes

se restringirán a números reales. Con frecuencia a tales ecuaciones se les conoce como **ecuaciones polinomiales sobre los reales**.

En general, resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 puede ser muy difícil y con frecuencia requiere matemáticas más allá del ámbito de este texto. Sin embargo, existen algunas propiedades generales que pertenecen a la resolución de ecuaciones polinomiales con las que debe estar familiarizado; más aún, existen ciertos tipos de ecuaciones polinomiales que puede resolver mediante las técnicas disponibles en este momento. También puede usar un método gráfico para aproximar las soluciones lo que, en algunos casos, es más corto que usar un método algebraico.

Comience por elaborar una lista de algunas ecuaciones polinomiales y los conjuntos solución correspondientes que ya se encontraron en este texto.

Ecuación	Conjunto solución
$3x + 4 = 7$	$\{1\}$
$x^2 + x - 6 = 0$	$\{-3, 2\}$
$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$	$\left\{-1, 1, \frac{3}{2}\right\}$
$x^4 - 16 = 0$	$\{-2, 2, -2i, 2i\}$

Advierta que, en cada uno de estos ejemplos, el número de soluciones corresponde al grado de la ecuación. La ecuación de primer grado tiene una solución, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, la ecuación de tercer grado tiene tres soluciones, y la ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones. Ahora considere la ecuación

$$(x - 4)^2(x + 5)^3 = 0$$

Se puede escribir como

$$(x - 4)(x - 4)(x + 5)(x + 5)(x + 5) = 0$$

lo que implica que

$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0 \quad \text{o}$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$

Por tanto

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 4 \quad \text{o} \quad x = -5 \quad \text{o}$$

$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = -5$$

Se afirma que el conjunto solución de la ecuación original es $\{-5, 4\}$, pero también se dice que la ecuación tiene una solución de 4 con una **multiplicidad de dos** y una solución de -5 con una **multiplicidad de tres**. Más aún, note que la suma de las

multiplicidades es 5, lo que concuerda con el grado de la ecuación. La siguiente propiedad general se puede enunciar:

Propiedad 9.3

Una ecuación polinomial de grado n tiene n soluciones, donde cualquier solución de multiplicidad p se cuenta p veces.

Cómo encontrar soluciones racionales

Aunque resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 puede, en general, ser muy difícil, es posible encontrar **soluciones racionales de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros** usando las técnicas presentadas en este capítulo. La siguiente propiedad restringe las soluciones racionales potenciales de dichas ecuaciones:

Propiedad 9.4 Teorema de raíz racional

Considere la ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son *enteros*. Si el número racional $\frac{c}{d}$, reducido a términos más bajos, es una solución de la ecuación, entonces c es un factor del término constante a_0 y d es un factor del coeficiente principal a_n.

El "porqué" detrás del teorema de raíz racional se basa en algunas ideas simples de factorización, como se indica mediante el siguiente bosquejo de una prueba para el teorema.

Bosquejo de prueba Si $\frac{c}{d}$ es una solución, entonces

$$a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{c}{d}\right) + a_0 = 0$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por d^n y sume $-a_0 d^n$ a ambos lados para producir

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} = -a_0 d^n$$

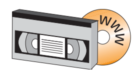
Puesto que c es un factor del lado izquierdo de esta ecuación, c también debe ser un factor de $-a_0 d^n$. Más aún, puesto que $\frac{c}{d}$ es una forma reducida, c y d no tienen factores comunes distintos a -1 y 1. Por tanto, c es un factor de a_0. En la misma forma, a partir de la ecuación

$$a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = -a_n c^n$$

se puede concluir que d es un factor del lado izquierdo y, por tanto, d también es un factor de a_n.

El teorema de raíz racional, una gráfica, la división sintética, el teorema del factor y cierto conocimiento previo sobre la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas forman un buen cimiento para encontrar soluciones racionales. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Encuentre todas las soluciones racionales de $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$



Solución

Si $\frac{c}{d}$ es una solución racional, entonces c debe ser un factor de 4 y d debe ser un factor de 3. Por tanto, los posibles valores para c y d son los siguientes:

Para c: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
Para d: $\pm 1, \pm 3$

Por tanto, los posibles valores para $\frac{c}{d}$ son

$$\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}$$

Ahora use una gráfica de $y = 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4$ para acortar la lista de posibles soluciones racionales (vea la figura 9.1).

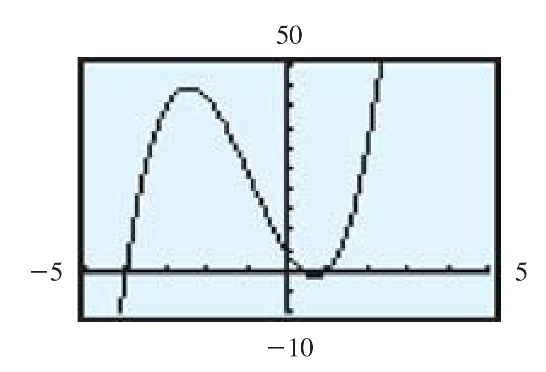


Figura 9.1

Las abscisas al origen aparecen en −4, en 1 y entre 0 y 1. Al usar división sintética,

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 8 & -15 & 4 \\ & & 3 & 11 & -4 \\ \hline & 3 & 11 & -4 & 0 \end{array}$$

puede demostrar que $x - 1$ es un factor del polinomio dado y, por tanto, 1 es una solución racional de la ecuación. Más aún, el resultado de la división sintética también indica que se puede factorizar el polinomio dado del modo siguiente:

$$3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(3x^2 + 11x - 4) = 0$$

El factor cuadrático se puede factorizar aún más usando las técnicas previas; proceda del modo siguiente:

$$(x - 1)(3x^2 + 11x - 4) = 0$$

$$(x - 1)(3x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = -4$$

Por tanto, todo el conjunto solución consiste de números racionales, que se listan como $\left\{-4, \frac{1}{3}, 1\right\}$. ■

Observaciones: Las gráficas usadas en esta sección se realizan con una herramienta de graficación. En la siguiente sección se analizarán algunas situaciones especiales para las cuales se obtienen fácilmente bosquejos hechos a mano de las gráficas.

En el ejemplo 1 se usó una gráfica para ayudar a recortar la lista de posibles soluciones racionales determinadas por el teorema de raíz racional. Sin usar una gráfica, es necesario realizar una búsqueda organizada de la lista de posibles soluciones racionales, como demuestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Encuentre las soluciones racionales de $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$

Solución

Si $\frac{c}{d}$ es una solución racional, entonces c debe ser un factor de -8 y d debe ser un factor de 3. Por tanto, los posibles valores de c y d son los siguientes:

Para c: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Para d: $\pm 1, \pm 3$

En consecuencia, los posibles valores para $\frac{c}{d}$ son

$$\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}, \pm 8, \pm\frac{8}{3}$$

Comience la búsqueda para soluciones racionales; primero se intentarán los enteros.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 7 & -22 & -8 \\ & & 3 & 10 & -12 \\ \hline & 3 & 10 & -12 & \boxed{-20} \end{array}$$

Este residuo indica que $x - 1$ no es un factor y, por tanto, 1 no es una solución.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 7 & -22 & -8 \\ & & -3 & -4 & 26 \\ \hline & 3 & 4 & -26 & \boxed{18} \end{array}$$

Este residuo indica que -1 no es una solución.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & 7 & -22 & -8 \\ & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & 0 \end{array}$$

Ahora sabe que $x - 2$ es un factor; puede proceder del modo siguiente:

$$3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(3x^2 + 13x + 4) = 0$$
$$(x - 2)(3x + 1)(x + 4) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad 3x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0$$
$$x = 2 \quad \text{o} \quad 3x = -1 \quad \text{o} \quad x = -4$$
$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = -4$$

El conjunto solución es $\left\{-4, -\frac{1}{3}, 2\right\}$. ■

En los ejemplos 1 y 2 se resolvieron ecuaciones de tercer grado. Por tanto, después de encontrar un factor lineal mediante división sintética, puede factorizar el factor cuadrático restante en la forma acostumbrada. Sin embargo, si la ecuación dada es de grado 4 o más, tal vez necesite encontrar más de un factor lineal mediante división sintética, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Resuelva $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 = 0$

Solución

Los posibles valores para $\frac{c}{d}$ son los siguientes:

Para $\frac{c}{d}$: $\pm 1, \pm 13$

Mediante división sintética se encuentra que

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -6 & 22 & -30 & 13 \\ & & 1 & -5 & 17 & -13 \\ \hline & 1 & -5 & 17 & -13 & 0 \end{array}$$

lo cual indica que $x - 1$ es un factor del polinomio dado. La línea del fondo de la división sintética indica que el polinomio dado puede factorizarse del modo siguiente:

$$x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 = 0$$
$$(x - 1)(x^3 - 5x^2 + 17x - 13) = 0$$

Por tanto

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$$

Ahora puede usar el mismo método para buscar soluciones racionales de la expresión $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$. Los posibles valores para $\frac{c}{d}$ son los siguientes:

Para $\frac{c}{d}$: $\pm 1, \pm 13$

Mediante división sintética, se encuentra que

$$\begin{array}{r|rrrr} 1) & 1 & -5 & 17 & -13 \\ & & 1 & -4 & 13 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

lo cual indica que $x - 1$ es un factor de $x^3 - 5x^2 + 17x - 13$, y que el otro factor es $x^2 - 4x + 13$.

Ahora puede resolver la ecuación original del modo siguiente:

$$x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 = 0$$
$$(x - 1)(x^3 - 5x^2 + 17x - 13) = 0$$
$$(x - 1)(x - 1)(x^2 - 4x + 13) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 4x + 13 = 0$$
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x^2 - 4x + 13 = 0$$

Use la fórmula cuadrática sobre $x^2 - 4x + 13 = 0$.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Por tanto, la ecuación original tiene una solución racional de 1 con una multiplicidad de dos y dos soluciones complejas, $2 + 3i$ y $2 - 3i$. El conjunto solución se menciona como $\{1, 2 \pm 3i\}$. ■

Grafique la ecuación $y = x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13$ para dar respaldo visual a su trabajo en el ejemplo 3. La gráfica en la figura 9.2 indica solamente una abscisa al origen en 1. Esto es consistente con el conjunto solución de $\{1, 2 \pm 3i\}$.

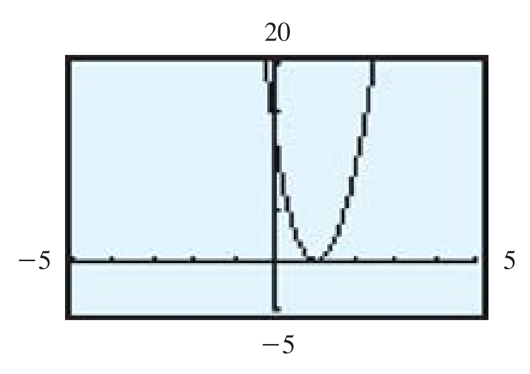


Figura 9.2

El ejemplo 3 ilustra dos propiedades generales. Primero, note que el coeficiente de x^4 es 1 y, por tanto, las posibles soluciones racionales deben ser enteras. En general, las posibles soluciones racionales de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ son los factores enteros de a_0. Segundo, observe que las soluciones complejas del ejemplo 3 son conjugadas mutuas. Se puede enunciar la siguiente propiedad general:

Propiedad 9.5

Las soluciones complejas no reales de las ecuaciones polinomiales con coeficientes reales, si existen, deben ocurrir en pares conjugados.

Cada una de las propiedades 9.3, 9.4 y 9.5 producen cierta información acerca de las soluciones de una ecuación polinomial. Antes de enunciar la propiedad final de esta sección, que le dará información adicional, es necesario considerar dos ideas.

Primero, en un polinomio ordenado en potencias descendentes de x, si dos términos sucesivos difieren en signo, entonces se dice que existe una **variación en signo**. (No se consideran los términos con coeficientes cero cuando se cuentan variaciones de signo.) Por ejemplo, el polinomio

$$3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$$

tiene *dos* variaciones de signo, mientras que el polinomio

$$x^5 - 4x^3 + x - 5$$

tiene *tres* variaciones.

Segundo, las soluciones de

$$a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \cdots + a_1(-x) + a_0 = 0$$

son las opuestas de las soluciones de

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

En otras palabras, si una nueva ecuación se forma al sustituir x con $-x$ en una ecuación dada, entonces las soluciones de la ecuación recién formada son las opuestas de las soluciones de la ecuación dada. Por ejemplo, el conjunto solución de $x^2 + 7x + 12 = 0$ es $\{-4, -3\}$, y el conjunto solución de $(-x)^2 + 7(-x) + 12 = 0$, que se simplifica a $x^2 - 7x + 12 = 0$, es $\{3, 4\}$.

Ahora es posible enunciar una propiedad que puede ayudarlo a determinar la naturaleza de las soluciones de una ecuación polinomial sin realmente resolver la ecuación.

Propiedad 9.6 Regla de signos de Descartes

Sea $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ una ecuación polinomial con coeficientes reales.

1. El número de *soluciones reales positivas* de la ecuación dada es igual al número de variaciones en signo del polinomio o es menor que el número de variaciones por un entero par positivo.
2. El número de *soluciones reales negativas* de la ecuación dada es igual al número de variaciones en signo del polinomio $a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \cdots + a_1(-x) + a_0$o es menor que el número de variaciones por un entero par positivo.

Junto con las propiedades 9.3 y 9.5, la propiedad 9.6 le permite obtener información acerca de las soluciones de una ecuación polinomial sin realmente resolver la ecuación. Considere algunas ecuaciones y vea cuánto sabe acerca de sus soluciones sin resolverlas.

1. $x^3 + 3x^2 + 5x + 4 = 0$

(a) La no variación de signo en $x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ significa que *no hay soluciones positivas*.

(b) Sustituir x con $-x$ en el polinomio dado produce $(-x)^3 + 3(-x)^2 + 5(-x) + 4$, que se simplifica a $-x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ y contiene tres variaciones de signo; por ende, existen *tres o una soluciones negativas*.

Conclusión La ecuación dada tiene tres soluciones reales negativas o una solución real negativa y dos soluciones complejas no reales.

2. $2x^4 + 3x^2 - x - 1 = 0$

(a) Hay una variación de signo; por tanto, la ecuación tiene *una solución positiva*.

(b) Sustituir x con $-x$ produce $2(-x)^4 + 3(-x)^2 - (-x) - 1$, que se simplifica a $2x^4 + 3x^2 + x - 1$ y contiene una variación de signo. Por tanto, la ecuación tiene *una solución negativa*.

Conclusión La ecuación dada tiene una solución positiva, una negativa y dos soluciones complejas no reales.

3. $3x^4 + 2x^2 + 5 = 0$

(a) No tener variaciones de signo en el polinomio dado significa que *no hay soluciones positivas*.

(b) Sustituir x con $-x$ produce $3(-x)^4 + 2(-x)^2 + 5$, que se simplifica a $3x^4 + 2x^2 + 5$ y no contiene variaciones de signo. Por tanto, *no hay soluciones negativas*.

Conclusión La ecuación dada contiene cuatro soluciones complejas no reales. Estas soluciones aparecerán en pares conjugados.

4. $2x^5 - 4x^3 + 2x - 5 = 0$

(a) El hecho de que existan tres variaciones de signo en el polinomio dado implica que hay *tres o una soluciones positivas*.

(b) Sustituir x con $-x$ produce $2(-x)^5 - 4(-x)^3 + 2(-x) - 5$, que se simplifica a $-2x^5 + 4x^3 - 2x - 5$ y contiene dos variaciones de signo. Por ende, existen *dos o cero soluciones negativas*.

Conclusión La ecuación dada tiene tres soluciones positivas y dos negativas; tres positivas y dos soluciones complejas no reales; una positiva, dos negativas y dos soluciones complejas no reales; o una positiva y cuatro soluciones complejas no reales.

Debe ser evidente a partir de la discusión previa que en ocasiones realmente se puede puntualizar la naturaleza de las soluciones de una ecuación polinomial. Sin embargo, para algunas ecuaciones (como la del último ejemplo), lo mejor que se puede hacer con las propiedades analizadas en esta sección es restringir las posibilidades para la naturaleza de las soluciones. Puede ser útil revisar los ejemplos 1, 2 y 3 de esta sección y mostrar que los conjuntos solución sí satisfacen las propiedades 9.3, 9.5 y 9.6.

Por último, considere una situación para la cual la calculadora graficadora se convierte en una herramienta muy útil.

EJEMPLO 4

Encuentre las soluciones de números reales de la ecuación $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$

Solución

Primero use una calculadora graficadora para obtener una gráfica de $y = x^4 - 2x^3 - 5$, como se muestra en la figura 9.3. Obvio, existen dos abscisas al origen, una entre -2 y -1 y otra entre 2 y 3. A partir del teorema de raíz racional se sabe que las únicas raíces racionales posibles de la ecuación dada son ± 1 y ± 5. Por tanto, estas abscisas al origen deben ser números irracionales. Puede usar las características ZOOM y TRACE de la calculadora graficadora para aproximar estos valores a -1.2 y 2.4, a la décima más cercana. Por tanto, las soluciones de números reales de $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$ son aproximadamente -1.2 y 2.4. Las otras dos soluciones deben ser números complejos conjugados.

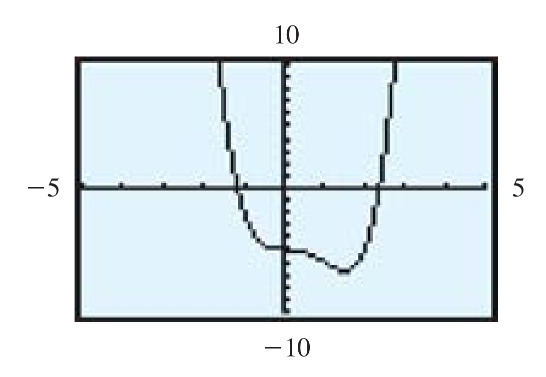


Figura 9.3 ■

Conjunto de problemas 9.3

Para los problemas 1-20 use el teorema de raíz racional y el teorema del factor para resolver cada ecuación. Asegúrese de que el número de soluciones para cada ecuación concuerde con la propiedad 9.3 y tome en cuenta la multiplicidad de las soluciones.

1. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
2. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$
3. $15x^3 + 14x^2 - 3x - 2 = 0$
4. $3x^3 + 13x^2 - 52x + 28 = 0$
5. $8x^3 - 2x^2 - 41x - 10 = 0$
6. $6x^3 + x^2 - 10x + 3 = 0$
7. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$
8. $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$
9. $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$
10. $x^3 - 10x - 12 = 0$

11. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$

12. $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$

13. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 17x - 30 = 0$

14. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$

15. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

16. $6x^4 - 13x^3 - 19x^2 + 12x = 0$

17. $2x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 9x + 15 = 0$

18. $3x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 4 = 0$

19. $4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$

20. $2x^5 - 5x^4 + x^3 + x^2 - x + 6 = 0$

Para los problemas 21-26 verifique que las ecuaciones no tienen alguna solución en número racional.

21. $x^4 + 3x - 2 = 0$

22. $x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0$

23. $3x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 3x - 4 = 0$

24. $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

25. $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 3 = 0$

26. $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 7x - 1 = 0$

Para los problemas 27-30 resuelva cada ecuación al aplicar primero la propiedad multiplicativa de la igualdad para producir una ecuación equivalente con coeficientes enteros.

27. $\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{5} = 0$

28. $\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0$

29. $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{5}{2} = 0$

30. $x^3 + \frac{9}{2}x^2 - x - 12 = 0$

Para los problemas 31-40 use la regla de signos de Descartes (propiedad 9.6) para hacer un listado de las posibilidades para la naturaleza de las soluciones para cada ecuación. *No* resuelva las ecuaciones.

31. $6x^2 + 7x - 20 = 0$

32. $8x^2 - 14x + 3 = 0$

33. $2x^3 + x - 3 = 0$

34. $4x^3 + 3x + 7 = 0$

35. $3x^3 - 2x^2 + 6x + 5 = 0$

36. $4x^3 + 5x^2 - 6x - 2 = 0$

37. $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

38. $2x^5 + 3x^3 - x + 1 = 0$

39. $x^5 + 32 = 0$

40. $2x^6 + 3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

41. Explique qué significa decir que la ecuación $(x + 3)^2 = 0$ tiene una solución de -3 con una multiplicidad de dos.

42. Describa cómo usar el teorema de raíz racional para demostrar que la ecuación $x^2 - 3 = 0$ no tiene soluciones racionales.

MÁS INVESTIGACIÓN

43. Use el teorema de raíz racional para argumentar que $\sqrt{2}$ no es un número racional. [*Sugerencia:* Las soluciones de $x^2 - 2 = 0$ son $\pm\sqrt{2}$.]

44. Use el teorema de raíz racional para argumentar que $\sqrt{12}$ no es un número racional.

45. Defienda este enunciado: “toda ecuación polinomial de grado impar con coeficiente reales tiene al menos una solución en número real”.

46. La siguiente división sintética muestra que 2 es una solución de $x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 10 = 0$

2)	1	1	1	−9	−10
		2	6	14	10
	1	3	7	5	0

Note que la nueva hilera cociente (indicada mediante la flecha) consiste por completo de números no negativos. Esto indica que buscar soluciones mayores que 2 sería una pérdida de tiempo porque divisores más grandes continuarían aumentando cada uno de los números (excepto el de la extrema izquierda) en la nueva hilera cociente. (¡Intente 3 como divisor!) Por tanto, se dice que 2 es una *cota superior* para las soluciones de números reales de la ecuación dada.

Ahora considere la siguiente división sintética, que muestra que −1 también es una solución de $x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 10 = 0$:

−1)	1	1	1	−9	−10
		−1	0	−1	10
	1	0	1	−10	0

La nueva hilera cociente (indicada mediante la flecha) muestra que no hay necesidad de buscar soluciones menores que −1 porque cualquier divisor menor que −1 aumentaría el valor absoluto de cada número (excepto el de la extrema izquierda) en la nueva hilera cociente. (¡Intente −2 como divisor!) Por tanto, se dice que −1 es una *cota inferior* para las soluciones en números reales de la ecuación dada.

Se puede enunciar la siguiente propiedad general:

Si $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es una ecuación polinomial con coeficientes reales, donde $a_n > 0$ y si el polinomio se divide sintéticamente entre $x - c$, entonces

1. Si $c > 0$ y todos los números en la nueva hilera cociente de la división sintética son no negativos, entonces c es una cota superior de las soluciones de la ecuación dada.
2. Si $c < 0$ y los números en la nueva hilera cociente alternan en signo (con 0 considerado como positivo o negativo, según se precise), entonces c es una cota inferior de las soluciones de la ecuación dada.

Encuentre el menor entero positivo y el mayor entero negativo que sean las cotas superior e inferior, respectivamente, para las soluciones en números reales de cada una de las siguientes ecuaciones. Tenga en mente que los enteros que sirven como cotas no necesariamente tienen que ser soluciones de la ecuación.

(a) $x^3 - 3x^2 + 25x - 75 = 0$

(b) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

(c) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$

(d) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$

(e) $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

47. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones, use una calculadora graficadora siempre que parezca ser útil. Exprese todas las soluciones irracionales en la forma radical más baja.

(a) $x^3 + 2x^2 - 14x - 40 = 0$

(b) $x^3 + x^2 - 7x + 65 = 0$

(c) $x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 32x + 24 = 0$

(d) $x^4 + 3x^3 - 39x^2 + 11x + 24 = 0$

(e) $x^3 - 14x^2 + 26x - 24 = 0$

(f) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

48. Encuentre aproximaciones, a la centésima más cercana, de las soluciones en números reales de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(b) $3x^3 - 2x^2 + 12x - 8 = 0$

(c) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 13 = 0$

(d) $x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 22x + 161 = 0$

(e) $7x^5 - 5x^4 + 35x^3 - 25x^2 + 28x - 20 = 0$

9.4 Graficación de funciones polinomiales

Los términos con los que se clasifican las funciones son análogos a los que describen las ecuaciones lineales, las cuadráticas y las polinomiales. En el capítulo 8 una función lineal se definió en términos de la ecuación

$$f(x) = ax + b$$

y una función cuadrática en términos de la ecuación

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ambas son casos especiales de una clase general de funciones llamada funciones polinomiales. Cualquier función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se llama **función polinomial de grado *n***, donde a_n es un número real distinto de cero, $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. Los siguientes son ejemplos de funciones polinomiales:

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 4 \qquad \text{Grado 3}$$

$$f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 1 \qquad \text{Grado 4}$$

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 3 \qquad \text{Grado 5}$$

Observaciones: El trabajo previo con ecuaciones polinomiales en ocasiones se presentó como "encontrar las raíces de las funciones polinomiales". Las **soluciones**, o **raíces**, de una ecuación polinomial también se llaman los **ceros** de la función polinomial. Por ejemplo, -2 y 2 son soluciones de $x^2 - 4 = 0$ y son ceros de $f(x) = x^2 - 4$. Esto es, $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$.

Para un análisis completo de la graficación de funciones polinomiales, necesitaría algunas herramientas de cálculo. Sin embargo, las técnicas de graficación que se analicen en este texto le permitirán graficar ciertos tipos de funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones polinomiales de la forma

$$f(x) = ax^n$$

se grafican con facilidad. A partir del trabajo previo se sabe que, si $n = 1$, entonces funciones como $f(x) = 2x$, $f(x) = -3x$ y $f(x) = \frac{1}{2}x$ son rectas a través del origen que tienen pendientes de $2, -3$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Más aún, si $n = 2$, se sabe que las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^2$ son parábolas que son simétricas con respecto al eje y y tienen sus vértices en el origen.

Anteriormente también se graficó el caso especial de $f(x) = ax^n$, donde $a = 1$ y $n = 3$; a saber, la función $f(x) = x^3$. Esta gráfica se muestra en la figura 9.4.

Las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^3$, donde $a \neq 1$, son ligeras variaciones de $f(x) = x^3$ y se pueden determinar fácilmente al graficar algunos puntos. Las gráficas de $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ y $f(x) = -x^3$ aparecen en la figura 9.5.

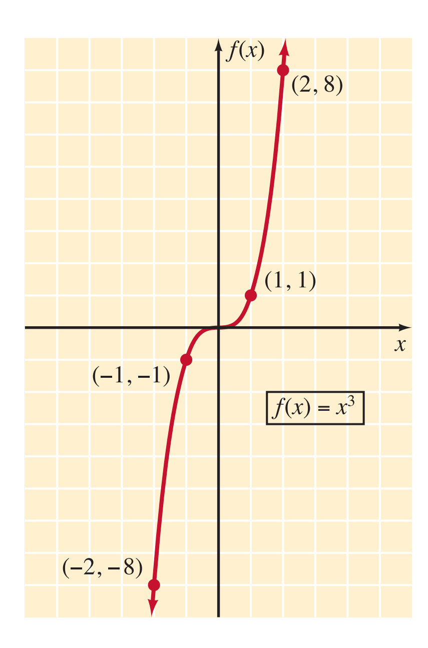
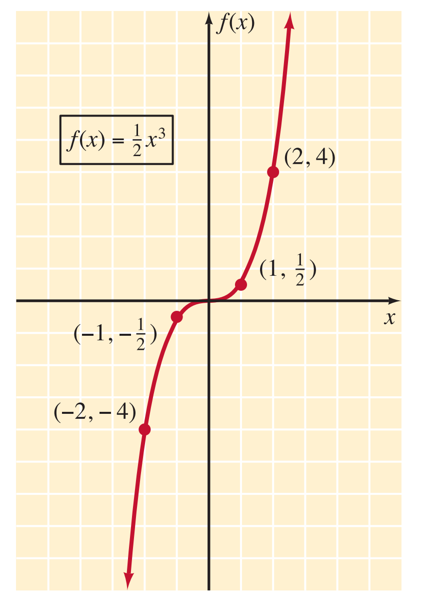


Figura 9.4

Dos patrones generales surgen del estudio de las funciones de la forma $f(x) = x^n$. Si n es impar y mayor que 3, las gráficas recuerdan mucho a la figura 9.4. La gráfica de $f(x) = x^5$ se muestra en la figura 9.6. Note que la curva se "aplana" un poco más en torno al origen que la gráfica de $f(x) = x^3$, que aumenta y disminuye más rápidamente debido al exponente más grande. Si n es par y mayor que 2, las gráficas de $f(x) = x^n$ no son parábolas. Recuerdan la parábola básica, pero son más planas en el fondo y más inclinadas en los lados. La figura 9.7 muestra la gráfica de $f(x) = x^4$.



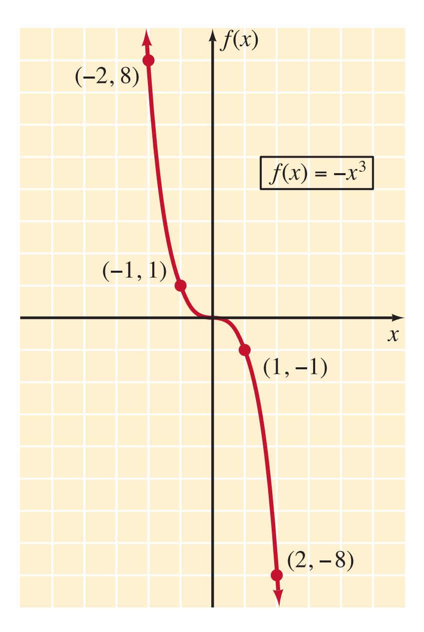


Figura 9.5

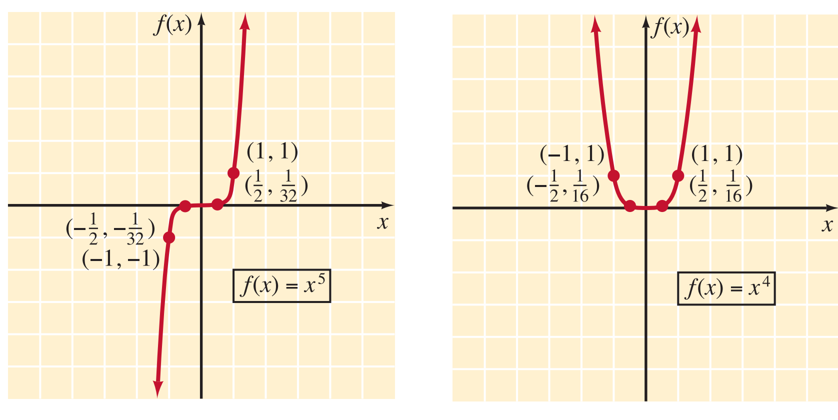


Figura 9.6 **Figura 9.7**

Las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^n$, donde n es un entero mayor que 2 y $a \neq 1$, son variaciones de las que se muestran en las figuras 9.4 y 9.7. Si n es impar, la curva es simétrica en torno al origen. Si n es impar, la gráfica es simétrica en torno al eje y.

Recuerde de su trabajo en el capítulo 8 que las transformaciones de las curvas básicas son fáciles de bosquejar. Por ejemplo, en la figura 9.8, la gráfica de $f(x) = x^3$ se trasladó hacia arriba dos unidades para producir la gráfica de $f(x) = x^3 + 2$. La figura 9.9 muestra la gráfica de $f(x) = (x - 1)^5$, que se obtuvo al trasladar la gráfica de $f(x) = x^5$ una unidad a la derecha. En la figura 9.10 se bosquejó la gráfica de $f(x) = -x^4$ como el reflejo en x de $f(x) = x^4$.

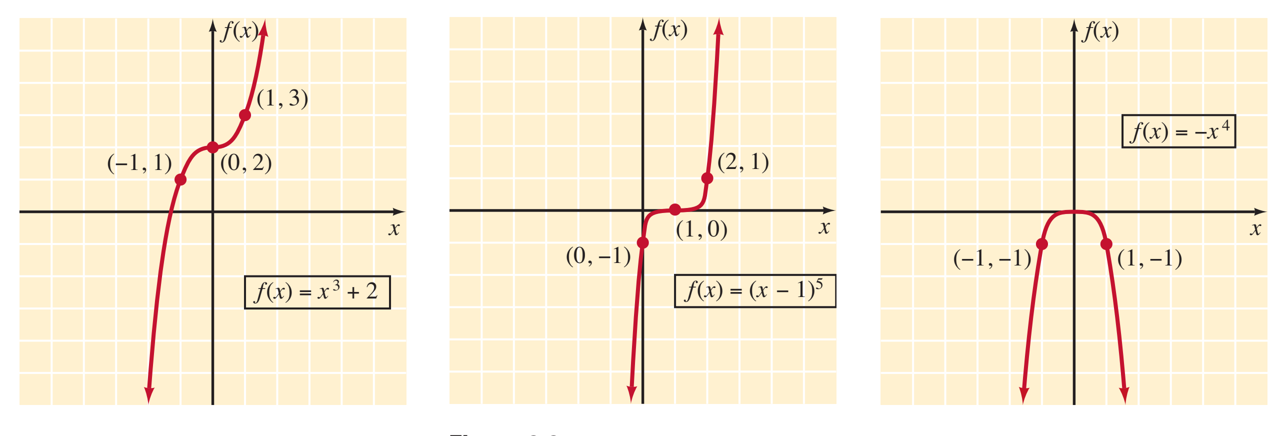
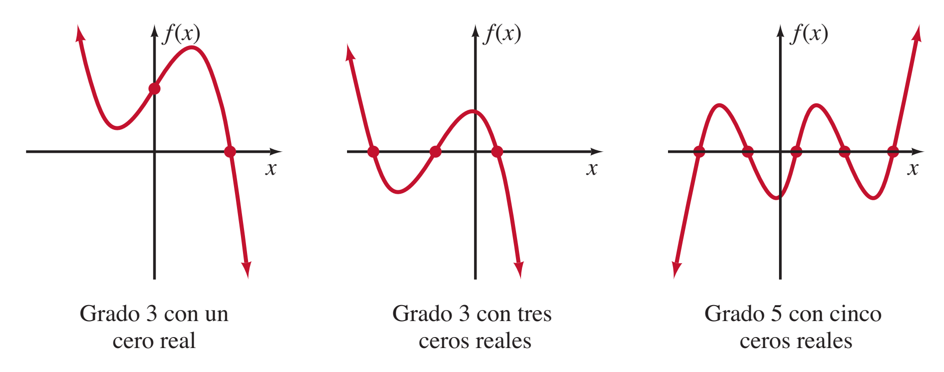


Figura 9.8 **Figura 9.9** **Figura 9.10**

Graficación de funciones polinomiales en forma factorizada

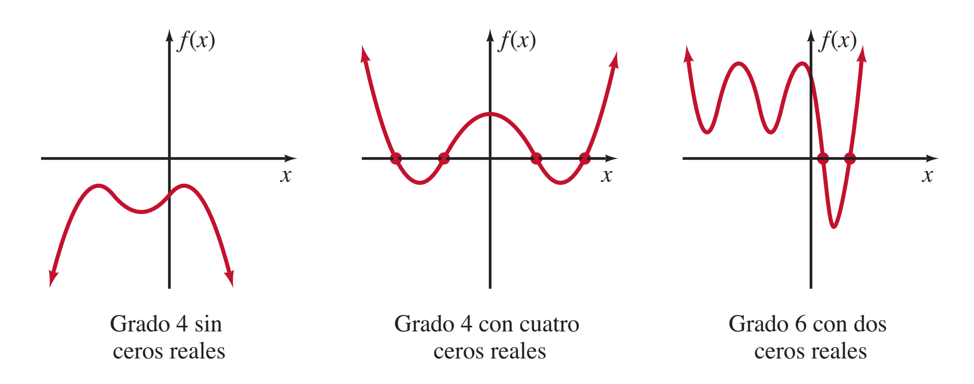
Conforme aumenta el grado del polinomio, las gráficas con frecuencia se vuelven más complicadas. Sin embargo, se sabe que las funciones polinomiales producen curvas continuas con algunos puntos de retorno, como se ilustra en las figuras 9.11 y 9.12. En la figura 9.11 se muestran algunas gráficas típicas de funciones polinomiales de grado impar. Como sugieren las gráficas, toda función polinomial de



Grado 3 con un cero real | Grado 3 con tres ceros reales | Grado 5 con cinco ceros reales

Figura 9.11

grado impar tiene al menos un *cero real*; esto es: al menos un número real c tal que $f(c) = 0$. Geométricamente, los ceros de la función son las abscisas al origen de la gráfica. La figura 9.12 ilustra algunas posibles gráficas de las funciones polinomiales de grado par.



Grado 4 sin ceros reales | Grado 4 con cuatro ceros reales | Grado 6 con dos ceros reales

Figura 9.11

Los **puntos de retorno** son los lugares donde la función cambia, de aumentar a disminuir o de disminuir a aumentar. Mediante el cálculo se verifica que una función polinomial de grado n tiene cuanto mucho $n - 1$ puntos de retorno. Ahora se ilustra la forma de usar esta información, junto con algunas otras técnicas, para graficar funciones polinomiales que se expresan en forma factorizada.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

Solución

Primero encuentre las abscisas al origen (ceros de la función) al igualar a cero cada factor y resolver para x:

$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -2 \qquad\qquad x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Por tanto, los puntos (−2, 0), (1, 0) y (3, 0) están sobre la gráfica. Segundo, los puntos asociados con las abscisas al origen dividen el eje x en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 9.13.

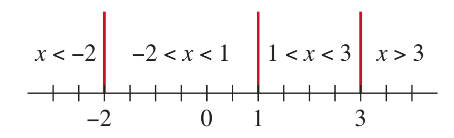


Figura 9.13

En cada uno de estos intervalos, $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. Es decir, la gráfica está arriba o abajo del eje x. Seleccionar un valor de prueba para x en cada uno de los intervalos determinará si x es positiva o negativa. Cualesquiera puntos adicionales que se obtengan con facilidad mejoran la exactitud de la gráfica. La tabla resume estos resultados.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < -2$	$f(-3) = -24$	Negativo	Bajo el eje x
$-2 < x < 1$	$f(0) = 6$	Positivo	Sobre el eje x
$1 < x < 3$	$f(2) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$x > 3$	$f(4) = 18$	Positivo	Sobre el eje x
Valores adicionales:	$f(-1) = 8$		

Al usar las abscisas al origen y la información en la tabla se bosqueja la gráfica de la figura 9.14. Los puntos (−3, −24) y (4, 18) no se muestran, pero se

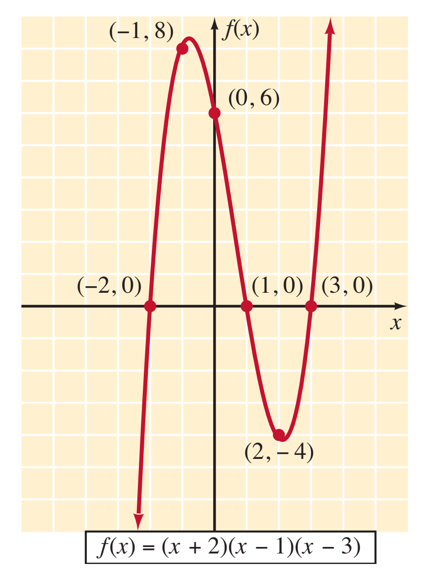


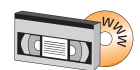
Figura 9.14

usan para indicar una rápida disminución y un aumento de la curva en dichas regiones. ■

Observaciones: En la figura 9.14 los puntos de retorno aproximados de la gráfica se indican en (2, −4) y (−1, 8). Tenga en mente que éstos sólo son aproximaciones enteras. Con las características ZOOM y TRACE de una calculadora graficadora, se encuentra que los puntos (−0.8, 8.2) y (2.1, −4.1) son aproximaciones a la décima más cercana. De nuevo, son necesarias herramientas de cálculo para encontrar los puntos de retorno exactos.

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2$



Solución

El polinomio se factoriza del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^4 + 3x^3 - 2x^2 \\ &= -x^2(x^2 - 3x + 2) \\ &= -x^2(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Ahora puede encontrar las abscisas al origen,

$$-x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Los puntos (0, 0), (1, 0) y (2, 0) están sobre la gráfica y dividen el eje x en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 9.15.

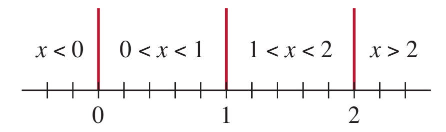


Figura 9.15

En la tabla siguiente se determinan algunos puntos y se resume el comportamiento de los signos de $f(x)$.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < 0$	$f(-1) = -6$	Negativo	Bajo el eje x
$0 < x < 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16}$	Negativo	Bajo el eje x
$1 < x < 2$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{16}$	Positivo	Sobre el eje x
$x > 2$	$f(3) = -18$	Negativo	Bajo el eje x

Al usar la tabla y las abscisas al origen se dibuja la gráfica, como se ilustra en la figura 9.16.

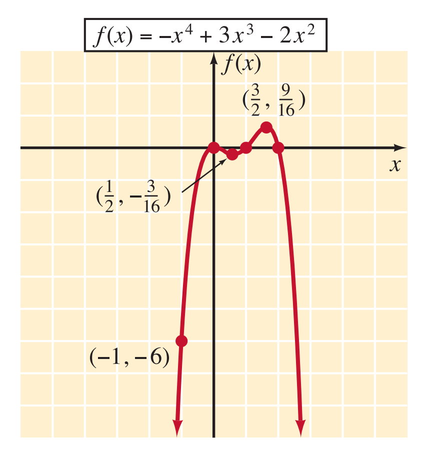


Figura 9.16

EJEMPLO 3

Grafique $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Solución

Use el teorema de raíz racional, la división sintética y el teorema del factor para factorizar el polinomio dado del modo siguiente.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$
$$= (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$
$$= (x - 1)(x + 2)^2$$

Ahora puede encontrar las abscisas al origen.

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad (x + 2)^2 = 0$$
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -2$$

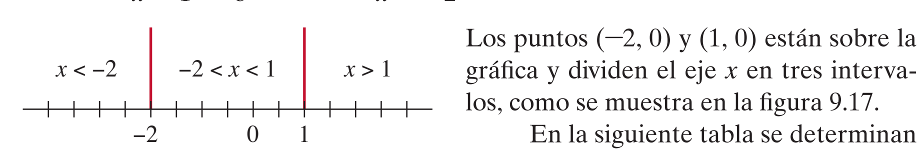


Figura 9.17

Los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 0)$ están sobre la gráfica y dividen el eje x en tres intervalos, como se muestra en la figura 9.17.

En la siguiente tabla se determinan algunos puntos y se resume el comportamiento de los signos de $f(x)$.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < -2$	$f(-3) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$-2 < x < 1$	$f(0) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$x > 1$	$f(2) = 16$	Positivo	Sobre el eje x

Valores adicionales: $f(-1) = -2$
$f(-4) = -20$

Como resultado de la tabla y las abscisas al origen puede bosquejar la gráfica que se muestra en la figura 9.18.

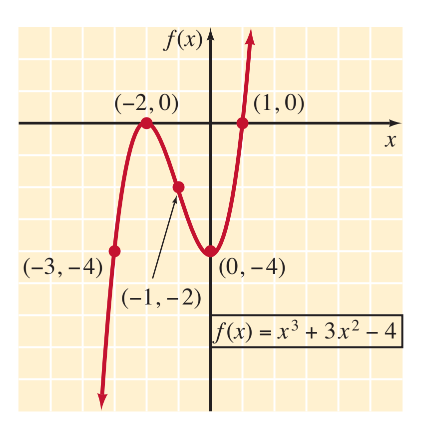


Figura 9.18 ■

Finalmente, use un método gráfico para resolver un problema que implique una función polinomial.

EJEMPLO 4

Suponga que tiene un trozo rectangular de cartón que mide 20 por 14 pulgadas. De cada esquina se corta un trozo cuadrado y luego las cejas se doblan para formar una caja abierta (vea la figura 9.19). Determine la longitud de un lado de las piezas cuadradas a cortar, de modo que el volumen de la caja sea lo más grande posible.

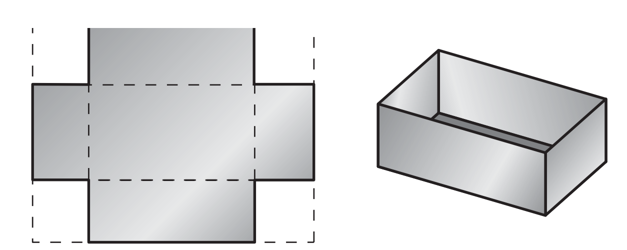
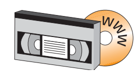


Figura 9.19



Solución

Sea x la longitud de un lado de los cuadrados a cortar de cada esquina. Entonces $20 - 2x$ representa la longitud de la caja abierta, y $14 - 2x$ representa el ancho. El volumen de una caja rectangular está dado por la fórmula $V = lwh$, de modo que el volumen de esta caja se puede representar mediante $V = x(20 - 2x)(14 - 2x)$. Ahora, sea $y = V$, y grafique la función $y = x(20 - 2x)(14 - 2x)$, como se muestra en la figura 9.20. Para este problema, sólo se tiene interés en la parte de la gráfica entre $x = 0$ y $x = 7$, porque la longitud de un lado de los cuadrados tiene que ser menor que 7 pulgadas para que se forme una caja. La figura 9.21 brinda una visión

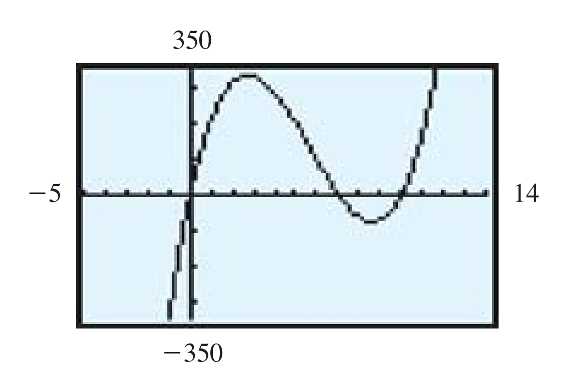


Figura 9.20

de dicha parte de la gráfica. Ahora puede usar las características ZOOM y TRACE para determinar que, cuando x es igual a aproximadamente 2.7, el valor de y es un máximo de aproximadamente 339.0. Por tanto, de cada esquina de la pieza rectangular de cartón se deben cortar trozos cuadrados de aproximadamente 2.7 pulgadas de largo. La caja abierta formada tendrá un volumen de aproximadamente 339.0 pulgadas cúbicas.

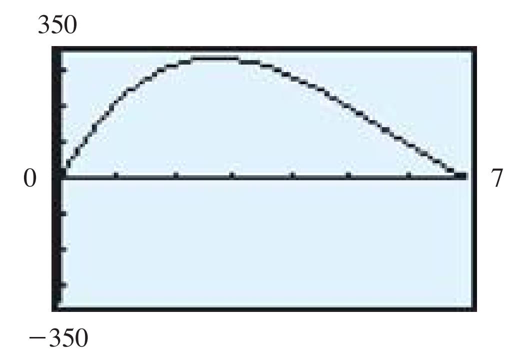


Figura 9.21 ■

Conjunto de problemas 9.4

Para los problemas 1-22 grafique cada una de las funciones polinomiales.

1. $f(x) = -(x - 3)^3$
2. $f(x) = (x - 2)^3 + 1$
3. $f(x) = (x + 1)^3$
4. $f(x) = x^3 - 3$
5. $f(x) = (x + 3)^4$
6. $f(x) = x^4 - 2$
7. $f(x) = -(x - 2)^4$
8. $f(x) = (x - 1)^5 + 2$
9. $f(x) = (x + 1)^4 + 3$
10. $f(x) = -x^5$
11. $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

12. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$

13. $f(x) = x(x + 2)(2 - x)$

14. $f(x) = (x + 4)(x + 1)(1 - x)$

15. $f(x) = -x^2(x - 1)(x + 1)$

16. $f(x) = -x(x + 3)(x - 2)$

17. $f(x) = (2x - 1)(x - 2)(x - 3)$

18. $f(x) = x(x - 2)^2(x - 1)$

19. $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$

20. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

21. $f(x) = x(x - 2)^2(x + 1)$

22. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$

Para los problemas 23-34 grafique cada función polinomial al primer factor del polinomio dado. Tal vez necesite usar algunas técnicas de factorización del capítulo 3, así como el teorema de raíz racional y el teorema del factor.

23. $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$

24. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

25. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

26. $f(x) = -x^4 - 3x^3 - 2x^2$

27. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

28. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

29. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

30. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

32. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

33. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

34. $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

Para los problemas 35-42, (a) encuentre las ordenadas al origen, (b) las abscisas al origen y (c) los intervalos de x donde $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$. *No* bosqueje las gráficas.

35. $f(x) = (x + 3)(x - 6)(8 - x)$

36. $f(x) = (x - 5)(x + 4)(x - 3)$

37. $f(x) = (x + 3)^4(x - 1)^3$

38. $f(x) = (x - 4)^2(x + 3)^3$

39. $f(x) = x(x - 6)^2(x + 4)$

40. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3(x - 2)$

41. $f(x) = x^2(2 - x)(x + 3)$

42. $f(x) = (x + 2)^5(x - 4)^2$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. ¿Cómo defendería el enunciado de que la ecuación $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 5 = 0$ no tiene soluciones positivas? ¿Tiene alguna solución negativa? Defienda su respuesta.

44. ¿Cómo sabe por inspección que la gráfica de $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$ en la figura 9.22 es incorrecta?

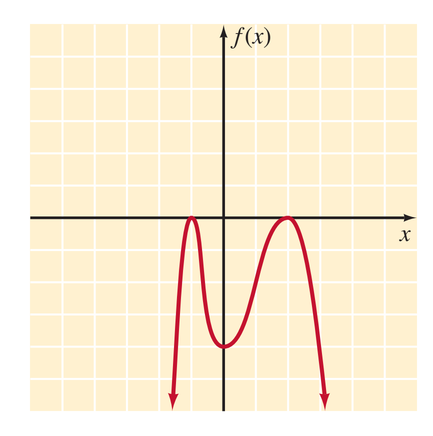


Figura 9.22

MÁS INVESTIGACIÓN

45. Una función polinomial con coeficientes reales es continua en todas partes; esto es: su gráfica no tiene hoyos ni rompimientos. Ésta es la base para la siguiente propiedad: si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces hay al menos un cero real entre a y b. Esta propiedad, junto con el conocimiento de las funciones polinomiales, proporciona la base para ubicar y aproximar soluciones irracionales de una ecuación polinomial.

Considere la ecuación $x^3 + 2x - 4 = 0$. Al aplicar la regla de los signos de Descartes puede determinar que esta ecuación tiene una solución real positiva y dos soluciones complejas no reales. (¡Tal vez quiera confirmar esto!) El teorema de raíz racional indica que las únicas soluciones racionales posibles son 1, 2 y 4. Al usar una forma un poco más compacta para la división sintética, se obtienen los siguientes resultados cuando se ponen a prueba 1 y 2 como posibles soluciones:

	1	0	2	−4
1	1	1	3	−1
2	1	2	6	8

Puesto que $f(1) = -1$ y $f(2) = 8$, debe haber una solución irracional entre 1 y 2. Más aún, −1 está más cerca de 0 que 8, así que la suposición es que la solución está más cerca de 1 que de 2. Comience por observar en 1.0, 1.1, 1.2, etc., hasta colocar la solución entre dos números.

	1	0	2	−4
1.0	1	1	3	−1
1.1	1	1.1	3.21	−0.469
1.2	1	1.2	3.44	0.128

En este momento es muy útil una calculadora.

Puesto que $f(1.1) = -0.469$ y $f(1.2) = 0.128$, la solución irracional debe estar entre 1.1 y 1.2. Más aún, puesto que 0.128 está mas cerca de 0 que −0.469, la suposición es que la solución está más cerca de 1.2 que de 1.1. Comience por observar en 1.15, 1.16, etcétera.

	1	0	2	−4
1.15	1	1.15	3.3225	−0.179
1.16	1	1.16	3.3456	−0.119
1.17	1	1.17	3.3689	−0.058
1.18	1	1.18	3.3924	0.003

Puesto que $f(1.17) = -0.058$ y $f(1.18) = 0.003$, la solución irracional debe estar entre 1.17 y 1.18. Por tanto, puede usar 1.2 como una aproximación racional a la décima más cercana.

Para cada una de las siguientes ecuaciones, (a) verifique que la ecuación tiene exactamente una solución irracional, y (b) encuentre una aproximación, a la décima más cercana, de dicha solución.

(a) $x^3 + x - 6 = 0$
(b) $x^3 - 6x - 6 = 0$
(c) $x^3 - 27x - 60 = 0$
(d) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
(e) $x^3 - 2x - 10 = 0$
(f) $x^3 - 5x^2 - 1 = 0$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

46. Grafique $f(x) = x^3$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = x^3 + 2$, $f(x) = -x^3 + 2$ y $f(x) = -x^3 - 2$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x) = x^3$.

47. Dibuje un bosquejo burdo de las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - x^2$, $f(x) = -x^3 + x^2$ y $f(x) = -x^3 - x^2$. Ahora grafique estas tres funciones para comprobar sus bosquejos.

48. Grafique $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$. ¿Cómo deben ser las gráficas de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ y $f(x) = -x^4 - x^3 - x^2$? Grafíquelas para ver si está en lo correcto.

49. ¿Cómo se comparan las gráficas de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ y $f(x) = x^7$? Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes.

50. ¿Cómo se comparan las gráficas de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, y $f(x) = x^6$? Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes.

51. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre las abscisas al origen y encuentre los intervalos donde $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
(b) $f(x) = x^3 - 8x^2 - x + 8$
(c) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$
(d) $f(x) = x^3 - 19x^2 + 90x - 72$
(e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$
(f) $f(x) = x^4 + 12x^2 - 64$

52. Encuentre las coordenadas de los puntos de retorno de cada una de las siguientes gráficas. Exprese los valores x y y al entero más cercano.
(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$
(b) $f(x) = 2x^3 - 33x^2 + 60x + 1050$
(c) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 24x + 100$
(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$
(e) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 288x - 900$
(f) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

53. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre las abscisas al origen y los puntos de retorno. Exprese sus respuestas a la décima más cercana.
(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
(b) $f(x) = 42x^3 - x^2 - 246x - 35$
(c) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 4$

54. Una pieza rectangular de cartón mide 13 pulgadas de largo y 9 pulgadas de ancho. De cada esquina se corta un trozo cuadrado, y luego las cejas se voltean para formar una caja abierta. Determine la longitud de un lado de las piezas cuadradas, de modo que el volumen de la caja sea lo más grande posible.

55. Una compañía determina que su ganancia semanal por fabricar y vender x unidades de cierto artículo está dada por $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500$. ¿Qué tasa de producción semanal maximizará el rendimiento?

9.5 Graficación de funciones racionales

Esta sección comienza con el uso de una calculadora graficadora para bosquejar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ dos veces usando diferentes fronteras, como se indica en las figuras 9.23 y 9.24. Debe ser evidente de las dos figuras que realmente no se puede decir cómo se ven las gráficas. Esto ocurre frecuentemente al graficar funciones racionales con una calculadora graficadora. Por ende, es necesario hacer un análisis cuidadoso de las funciones racionales, y enfatizar el uso de las gráficas a mano. (Por cierto, si está interesado en ver la gráfica completa de esta función, diríjase al primer ejemplo de la siguiente sección.)

Una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, se llama **función racional**.

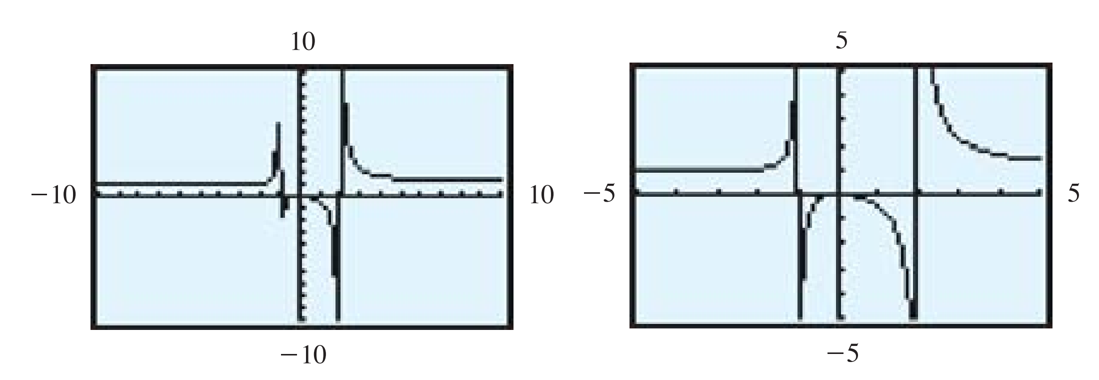


Figura 9.23 **Figura 9.24**

Los siguientes son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{x}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 6} \qquad f(x) = \frac{x^3 - 8}{x + 4}$$

En cada uno de estos ejemplos, el dominio de la función racional es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos que hacen al denominador cero. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \frac{2}{x - 1}$ es el conjunto de todos los números reales, excepto 1. Como verá pronto, estas exclusiones del dominio son importantes números desde un punto de vista de graficación; representan rompimientos en curvas de otro modo continuas.

El escenario para graficar funciones racionales se establecerá al considerar en detalle la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Primero note que, en $x = 0$, la función es indefinida. Segundo, considere una tabla de valores más bien extensa para encontrar alguna tendencia numérica y construir una base para definir el concepto de asíntota.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	
1	1	Estos valores indican que el valor de $f(x)$ es positiva y tiende a cero desde arriba conforme x se vuelve cada vez más grande.
2	0.5	
10	0.1	
100	0.01	
1000	0.001	
0.5	2	Estos valores indican que $f(x)$ es positiva y se hace cada vez más grande conforme x tiende a cero desde la derecha.
0.1	10	
0.01	100	
0.001	1000	
0.0001	10 000	
−0.5	−2	Estos valores indican que $f(x)$ es negativa y se hace más pequeña conforme x tiende a cero desde la izquierda.
−0.1	−10	
−0.01	−100	
−0.001	−1000	
−0.0001	−10 000	
−1	−1	Estos valores indican que $f(x)$ es negativa y tiende a cero desde abajo conforme x se hace más pequeña sin cota.
−2	−0.5	
−10	−0.1	
−100	−0.01	
−1000	−0.001	

La figura 9.25 muestra un bosquejo de $f(x) = \frac{1}{x}$, que se dibuja usando algunos puntos de esta tabla y los patrones analizados. Note que la gráfica se aproxima, mas no toca alguno de los ejes. Se dice que el eje y [o el eje $f(x)$] es una **asíntota vertical** y que el eje x es una **asíntota horizontal**.

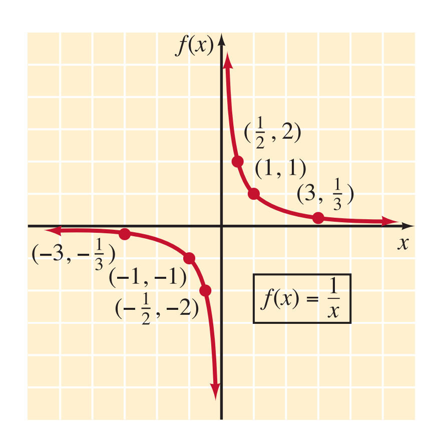


Figura 9.25

Observaciones: Se sabe que la ecuación $f(x) = \frac{1}{x}$ muestra simetría en torno al origen porque $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, la gráfica en la figura 9.25 podría dibujarse tras determinar la parte de la curva en el primer cuadrante y luego reflejar dicha curva a través del origen.

Ahora se definirán los conceptos de asíntotas vertical y horizontal.

Asíntota vertical

Una recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si:

1. $f(x)$ aumenta o disminuye sin cota conforme x tienda a a desde la izquierda, como en la figura 9.26.

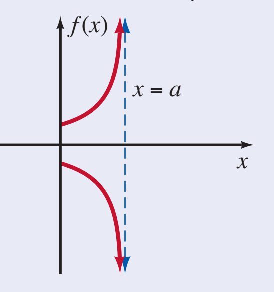


Figura 9.26

o

2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin cota conforme x tienda a a desde la derecha, como en la figura 9.27.

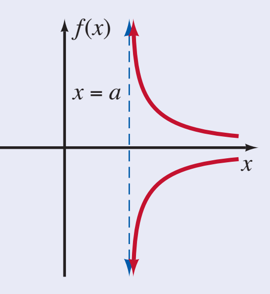


Figura 9.27

Asíntota horizontal

Una recta $y = b$ [o $f(x) = b$] es una asíntota horizontal para la gráfica de una función f si:

1. $f(x)$ tiende a b desde arriba o abajo conforme x se hace infinitamente pequeña, como en la figura 9.28,

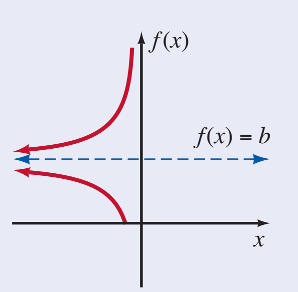


Figura 9.28

o

2. $f(x)$ tiende a b desde arriba o abajo conforme x se hace infinitamente grande, como en la figura 9.29.

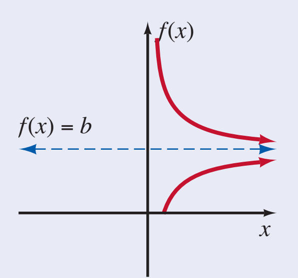


Figura 9.29

A continuación se presentan algunas sugerencias para graficar funciones racionales del tipo que se considera en esta sección.

1. Compruebe para simetría en torno al eje y y el origen.
2. Encuentre alguna asíntota vertical al igualar el denominador a cero y resolver para x.
3. Encuentre alguna asíntota horizontal al estudiar el comportamiento de $f(x)$ conforme x se vuelve infinitamente grande o conforme x se hace infinitamente pequeña.
4. Estudie el comportamiento de la gráfica cuando se acerca a las asíntotas.
5. Grafique tantos puntos como sea necesario para determinar la forma de la gráfica. El número necesario se puede afectar si la gráfica tiene o no algún tipo de simetría.

Tenga en mente estas sugerencias conforme estudia los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = \dfrac{-2}{x-1}$

Solución

Dado que $x = 1$ hace al denominador cero, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. Esto se indicó con una línea rayada en la figura 9.30. Ahora busque una asíntota horizontal al comprobar algunos valores grandes y pequeños de x.

x	$f(x)$
10	$-\frac{2}{9}$
100	$-\frac{2}{99}$
1000	$-\frac{2}{999}$

Esta parte de la tabla muestra que, conforme x se vuelve muy grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde abajo.

x	$f(x)$
−10	$\frac{2}{11}$
−100	$\frac{2}{101}$
−1000	$\frac{2}{1001}$

Esta parte muestra que, conforme x se vuelve muy pequeño, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba.

Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal.

Finalmente, compruebe el comportamiento de la gráfica cerca de la asíntota vertical.

x	$f(x)$
2	−2
1.5	−4
1.1	−20
1.01	−200
1.001	−2000
0	2
0.5	4
0.9	20
0.99	200
0.999	2000

Conforme x tiende a 1 desde la derecha, el valor de $f(x)$ se vuelve cada vez más pequeño.

Conforme x tiende a 1 desde la izquierda, el valor de $f(x)$ se vuelve cada vez más grande.

La gráfica de $(x) = \dfrac{-2}{x-1}$ se muestra en la figura 9.30.

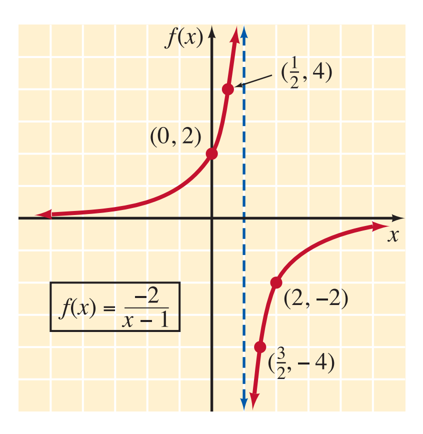


Figura 9.30 ■

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

Solución

Dado que $x = -2$ hace al denominador cero, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Para estudiar el comportamiento de $f(x)$ conforme x se hace muy grande o muy pequeño, cambie la forma de la expresión racional al dividir numerador y denominador entre x:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x+2}{x}} = \frac{1}{\dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{x}}$$

Ahora puede ver que, conforme x se hace cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde abajo; conforme x se hace cada vez más pequeño, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde arriba. (Quizá deba verificar estas afirmaciones al colocar algunos valores de x.) Por tanto, la recta $f(x) = 1$ es una asíntota horizontal. Al dibujar las asíntotas (recta discontinua) y graficar algunos puntos, se completa la gráfica en la figura 9.31.

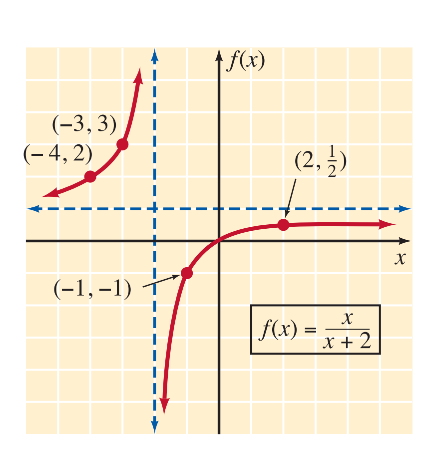


Figura 9.31 ■

En los siguientes dos ejemplos, ponga especial atención al papel de la simetría, así dirigirá sus esfuerzos hacia los cuadrantes I y IV y luego reflejar dichas partes de la curva a través del eje vertical para completar la gráfica.

EJEMPLO 3

Grafique $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$.

Solución

Primero note que $f(-x) = f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al eje vertical. Segundo, el denominador $x^2 + 4$ no puede ser igual a cero para cualquier valor real de x; por tanto, no hay asíntota vertical. Tercero, al dividir tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{2}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{2}{1 + \dfrac{4}{x^2}}$$

Ahora puede ver que, conforme x se hace cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 2 desde abajo. Por tanto, la recta $f(x) = 2$ es una asíntota horizontal. Puede graficar algunos puntos usando valores positivos de x, bosqueje esta parte de la curva y luego refleje a través del eje $f(x)$ para obtener la gráfica completa, como se muestra en la figura 9.32.

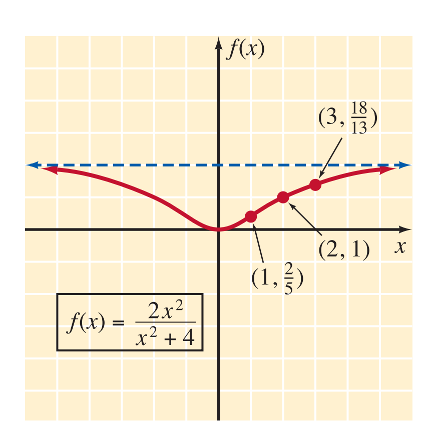
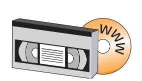


Figura 9.32 ■

EJEMPLO 4



Grafique $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Solución

Primero note que $f(-x) = f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica en torno al eje y. Por tanto, al igualar a cero el denominador y resolver para x, se obtiene

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales. A continuación puede ver que $\dfrac{3}{x^2 - 4}$ tiende a cero desde arriba conforme x se hace más grande. Finalmente, puede graficar algunos puntos usando valores positivos de x (distintos de 2), bosquejar esta parte de la curva y luego reflejarla a través del eje $f(x)$ para obtener la gráfica completa que se muestra en la figura 9.33.

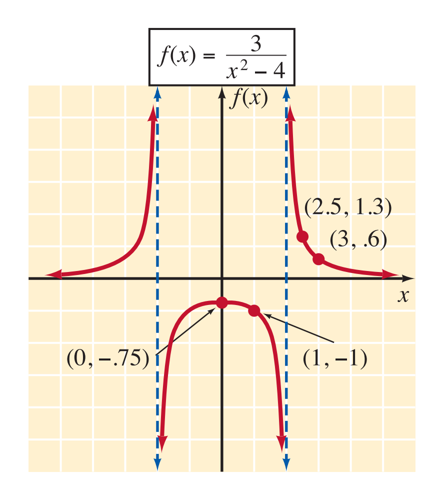


Figura 9.33

Ahora suponga que usará una herramienta de graficación para obtener una gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^4 - 16}$. Antes de ingresar esta función en una herramienta de graficación, analice lo que sabe acerca de la gráfica.

1. Dado que $f(0) = 0$, el origen es un punto sobre la gráfica.

2. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

3. Al igualar a cero el denominador y resolver para x, puede determinar las asíntotas verticales.

$$x^4 - 16 = 0$$
$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$
$$x^2 + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = -4 \qquad\qquad x^2 = 4$$
$$x = \pm 2i \qquad\qquad x = \pm 2$$

Recuerde que trabaja con pares ordenados de números reales. Por tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

4. Divida tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre x^4 para producir

$$\frac{4x^2}{x^4 - 16} = \frac{\dfrac{4x^2}{x^4}}{\dfrac{x^4 - 16}{x^4}} = \frac{\dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{16}{x^4}}$$

A partir de la última expresión se ve que, conforme $|x|$ se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje horizontal es una asíntota horizontal.

Ahora ingrese la función en una calculadora graficadora y establezca las fronteras de modo que muestren el comportamiento de la función cerca de las asíntotas. Note que la gráfica que se muestra en la figura 9.34 es consistente con toda la información que se determinó antes usando la calculadora graficadora. En otras palabras, el conocimiento de las técnicas de graficación mejora el uso de una herramienta de graficación.

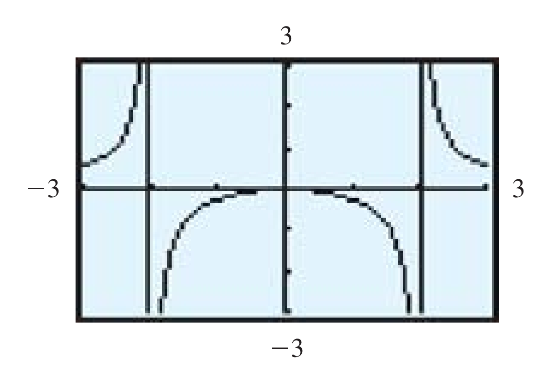


Figura 9.34

En la sección 2.4 se resolvieron problemas del siguiente tipo: ¿cuánto alcohol puro se debe agregar a 6 litros de una solución de alcohol al 40% para elevarla a una solución de alcohol al 60%? La respuesta de 3 litros se puede encontrar al resolver la siguiente ecuación, donde x representa la cantidad de alcohol puro a agregar:

Alcohol puro para comenzar	+	Alcohol puro a agregar	=	Alcohol puro en la solución final
↓		↓		↓
$0.40(6)$	+	x	=	$0.60(6 + x)$

Ahora considere este problema en un escenario más general al escribir una función donde x represente la cantidad de alcohol puro a agregar y y represente la concentración de alcohol puro en la solución final.

$$0.40(6) + x = y(6 + x)$$

$$2.4 + x = y(6 + x)$$

$$\frac{2.4 + x}{6 + x} = y$$

Puede graficar la función racional $y = \dfrac{2.4 + x}{6 + x}$ como se muestra en la figura 9.35. Para este problema particular, x no es negativo, de modo que sólo se tiene interés en la parte de la gráfica que está en el primer cuadrante. Cambie las fronteras del rectángulo de visualización de modo que $0 \leq x \leq 15$ y $0 \leq y \leq 2$, para obtener la figura 9.36. Ahora está listo para responder preguntas acerca de esta situación.

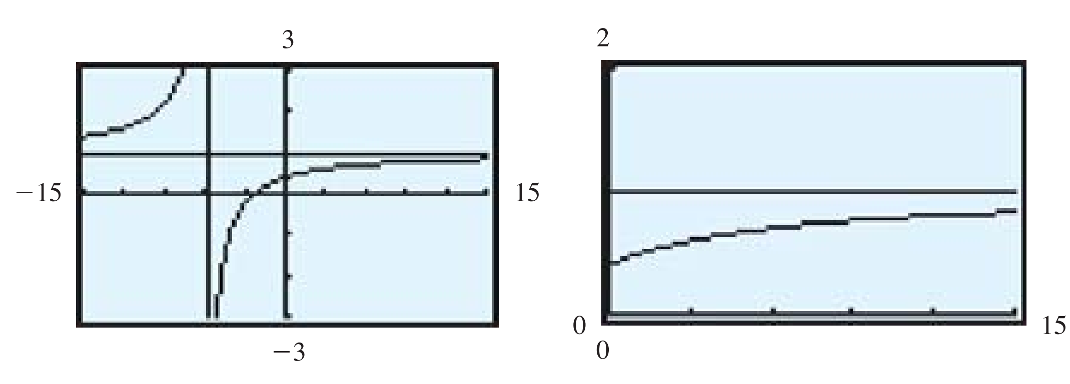


Figura 9.35

Figura 9.36

1. ¿Cuánto alcohol puro necesita agregar para elevar la solución al 40% a una solución al 60%? [*Sugerencia:* Se busca el valor de x cuando y es 0.60. (*Respuesta:* Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $y = 0.60$, $x = 3$. Por tanto, necesita agregar 3 litros de alcohol puro).]

2. ¿Cuánto alcohol puro necesita agregar para elevar la solución al 40% a una solución al 70%? (*Respuesta:* Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $y = 0.70$, $x = 6$. Por tanto, necesita agregar 6 litros de alcohol puro.)

3. ¿Qué concentración porcentual de alcohol se obtiene si agrega 9 litros de alcohol puro a 6 litros de una solución al 40%? (*Respuesta:* Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $x = 9$, $y = 0.76$. Por tanto, agregar 9 litros de alcohol puro producirá una solución de alcohol al 76%.)

Conjunto de problemas 9.5

Grafique cada una de las siguientes funciones racionales:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 3}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{-3}{(x + 2)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{2}{(x - 1)^2}$

7. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$

9. $f(x) = \dfrac{-x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{-3x}{x + 2}$

11. $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 4}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

13. $f(x) = \dfrac{3}{(x + 2)(x - 4)}$

14. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)(x - 2)}$

15. $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + x - 6}$

16. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 2}$

17. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$

18. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

19. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$

21. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

22. $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^4 + 1}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

23. ¿Cómo explicaría el concepto de asíntota a un estudiante de álgebra elemental?

24. Proporcione una descripción paso a paso de cómo graficaría $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 9}$.

MÁS INVESTIGACIÓN

25. La función racional $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$ tiene un dominio de todos los números reales excepto 2 y se puede simplificar a $f(x) = x + 3$. Por tanto, su gráfica es una línea recta con un hoyo en (2, 5). Grafique cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{(x+4)(x-1)}{x+4}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

(c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

26. Grafique la función $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$. Acaso necesite graficar un número más bien grande de puntos. Además, defienda la afirmación de que $f(x) = x + 2$ es una **asíntota oblicua**.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

27. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para el problema 25. ¿Qué característica de las gráficas no se muestra en la calculadora?

28. Cada una de las siguientes gráficas es una transformación de $f(x) = \frac{1}{x}$. Primero prediga la forma general y la ubicación de la gráfica, y luego compruebe su predicción con una calculadora graficadora.

(a) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

(c) $f(x) = -\frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(e) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

29. Grafique $f(x) = \frac{1}{x^2}$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$, $f(x) = \frac{1 + 3x^2}{x^2}$ y $f(x) = \frac{1}{x^2}$ con la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

30. Grafique $f(x) = \frac{1}{x^3}$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3}$, $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ y $f(x) = \frac{-1}{x^3}$ con la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^3}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^3}$

31. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 19-22.

32. Suponga que x onzas de ácido puro se agregaron a 14 onzas de una solución de ácido al 15%.

(a) Establezca la expresión racional que representa la concentración de ácido puro en la solución final.

(b) Grafique la función racional que muestre la concentración.

(c) ¿Cuántas onzas de ácido puro debe agregar a 14 onzas de una solución al 15% para elevarla a una solución al 40.5%? Verifique su respuesta.

(d) ¿Cuántas onzas de ácido puro debe agregar a 14 onzas de una solución al 15% para elevarla a una solución al 50%? Verifique su respuesta.

(e) ¿Qué concentración de ácido se obtiene si agrega 12 onzas de ácido puro a 14 onzas de una solución al 15%? Verifique su respuesta.

33. Resuelva el siguiente problema tanto algebraica como gráficamente: una solución contiene alcohol al 50%, y otra solución contiene alcohol al 80%. ¿Cuántos litros de cada solución debe mezclar para producir 10.5 litros de una solución de alcohol al 70%? Verifique su respuesta.

34. Grafique cada una de las siguientes funciones. Asegúrese de que obtiene una gráfica completa para cada una. Bosqueje cada gráfica en una hoja de papel y téngalas todas a mano mientras estudia la siguiente sección.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(c) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

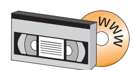
9.6 Más acerca de la graficación de funciones racionales

Las funciones racionales que se estudiaron en la sección anterior "se comportaban más bien de manera adecuada". De hecho, una vez que se establecen las asíntotas vertical y horizontal, el trazo de algunos puntos por lo general determina la gráfica con bastante facilidad. Esto no siempre es el caso con las funciones racionales. En esta sección investigará algunas funciones racionales que se comportan de manera un poco diferente.

Las asíntotas verticales ocurren a valores de x donde el denominador es cero, de modo que ningún punto de una gráfica puede estar sobre una asíntota vertical. Sin embargo, recuerde que las asíntotas horizontales se crean por el comportamiento de $f(x)$ conforme x se vuelve infinitamente grande o infinitamente pequeña. Esto no restringe la posibilidad de que, para algunos valores de x, los puntos de la gráfica esten sobre la asíntota horizontal. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$.



Solución

Primero identifique las asíntotas verticales al igualar a cero el denominador y resolver para x:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Por tanto, las rectas $x = 2$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. A continuación puede dividir tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre x^2.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{\dfrac{x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}$$

Ahora puede ver que, conforme x se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde arriba. Por tanto, la recta $f(x) = 1$ es una asíntota horizontal. Para determinar si algún punto de la gráfica está *sobre* la asíntota horizontal, puede ver si la ecuación

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1$$

tiene alguna solución.

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1$$

$$x^2 = x^2 - x - 2$$

$$0 = -x - 2$$

$$x = -2$$

Por tanto, el punto $(-2, 1)$ está sobre la gráfica. Ahora, al dibujar las asíntotas, al graficar algunos puntos [incluidos $(-2, 1)$] y estudiar el comportamiento de la función cerca de las asíntotas, puede bosquejar la curva que se muestra en la figura 9.37.

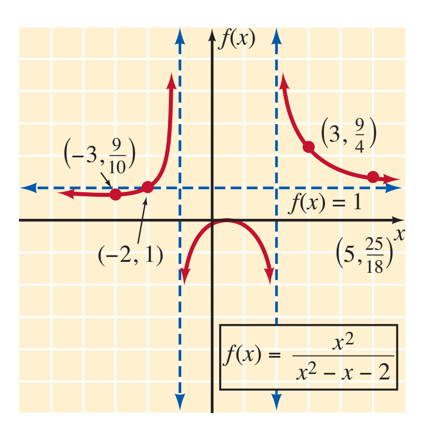


Figura 9.37

EJEMPLO 2

Grafique $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Solución

Primero note que $f(-x) = -f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al origen. Segundo, identifique las asíntotas verticales:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Por tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. A continuación, al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

A partir de esta forma puede ver que, conforme x se vuelve más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal. Puesto que $f(0) = 0$ se sabe que el origen es un punto de la gráfica. Finalmente, al concentrar el punto a graficar en valores positivos de x, puede bosquejar la parte de la curva a la derecha del eje vertical, y luego usar el hecho de que la gráfica es simétrica con respecto al origen para completar la gráfica. La figura 9.38 muestra la gráfica completa.

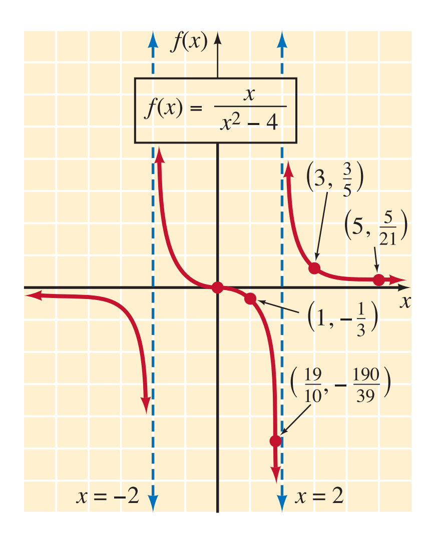


Figura 9.38 ■

EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Solución

Primero observe que $f(-x) = -f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al origen. Segundo, puesto que $x^2 + 1$ es un número positivo para todo valor real de x, no hay asíntotas verticales para esta gráfica. A continuación, al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

A partir de esta forma se ve que, conforme x se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal. Puesto que $f(0) = 0$, el origen es un punto de la gráfica. Finalmente, al concentrarse sobre valores positivos de x, puede bosquejar la parte de la curva a la derecha del eje vertical, y luego usar simetría en el origen para completar la gráfica, como se muestra en la figura 9.39.

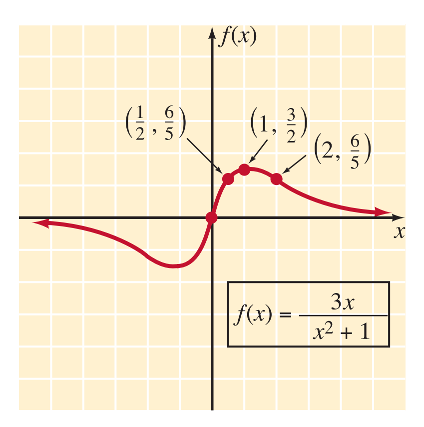


Figura 9.39

Asíntotas oblicuas

Hasta el momento el estudio de las funciones racionales se ha restringido a aquellas en las que el grado del numerador es menor que o igual al grado del denominador. Como ejemplos finales de graficación de funciones racionales, se considerarán funciones en las cuales el grado del numerador es uno mayor que el grado del denominador.

EJEMPLO 4

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

Solución

Primero observe que $x = 2$ es una asíntota vertical. Segundo, dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, puede cambiar la forma de la expresión racional por división. Use división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & -1 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Por tanto, la función original se puede reescribir como

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2} = x + 2 + \frac{3}{x - 2}$$

Ahora, para valores muy grandes de $|x|$, la fracción $\frac{3}{x-2}$ está cerca de cero. Por tanto, según $|x|$ se vuelve cada vez más grande, la gráfica de $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$ se acerca cada vez más a la recta $f(x) = x + 2$. A esta recta se le llama **asíntota oblicua** y se le indica con una recta rayada en la figura 9.40. Finalmente, puesto que se trata de una situación nueva, quizá necesite graficar un gran número de puntos a ambos lados de la asíntota vertical, así que se elabora una extensa tabla de valores. La gráfica de la función se muestra en la figura 9.40.

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$
2.1	34.1
2.5	10.5
3	8
4	7.5
5	8
6	8.75
10	12.375
1.9	−26.1
1.5	−2.5
1	0
0	0.5
−1	0
−3	−1.6
−5	−3.4
−10	−8.25

Estos valores (de 2.1 a 10) indican el comportamiento de $f(x)$ a la derecha de la asíntota vertical $x = 2$.

Estos valores (de 1.9 a −10) indican el comportamiento de $f(x)$ a la izquierda de la asíntota vertical $x = 2$.

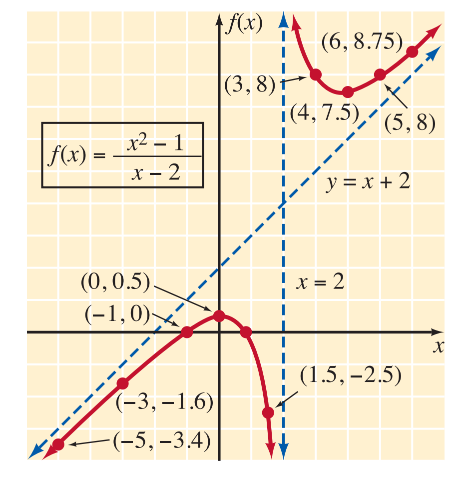


Figura 9.40

■

Si el grado del numerador de una función racional es *exactamente uno más* que el grado de su denominador, entonces la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua. [Si la gráfica es una línea, como es el caso con $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}$, entonces se le considera como su propia asíntota.] Como en el ejemplo 4, se encuentra la ecuación de la asíntota oblicua al cambiar la forma de la función usando división larga. Considere otro ejemplo.

EJEMPLO 5 Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Solución

A partir de la forma dada de la función se ve que $x = 1$ es una asíntota vertical. Entonces, al factorizar el numerador, se puede cambiar la forma a

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$$

que indica la abscisa al origen de 2 y -1. Entonces, mediante división larga, puede cambiar la forma original de la función a

$$f(x) = x - \frac{2}{x-1}$$

lo que indica una asíntota oblicua $f(x) = x$. Finalmente, al graficar algunos puntos adicionales, puede determinar la gráfica como se muestra en la figura 9.41.

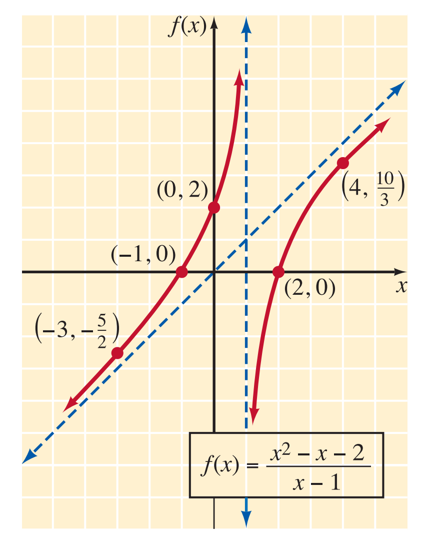
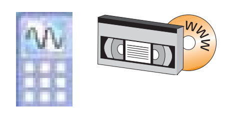


Figura 9.41 ■

Por último, combine el conocimiento de las funciones racionales con el uso de una herramienta de graficación para obtener la gráfica de una función racional bastante compleja.

EJEMPLO 6 Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$



Solución

Antes de ingresar esta función en una herramienta de graficación, analice lo que se sabe acerca de la gráfica.

1. Puesto que $f(0) = \frac{1}{36}$, el punto $\left(0, \frac{1}{36}\right)$ está sobre la gráfica.
2. Puesto que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, no hay simetría con respecto al origen o el eje y.
3. El denominador es cero en $x = \pm 6$. Por tanto, las rectas $x = 6$ y $x = -6$ son asíntotas verticales.
4. Cambie la forma de la expresión racional mediante división.

$$\begin{array}{r l}
 & x - 2 \\
x^2 - 36 \,\big)\!\!\!\! & \overline{x^3 - 2x^2 - x - 1} \\
 & \underline{x^3 \qquad\quad - 36x} \\
 & -2x^2 + 35x - 1 \\
 & \underline{-2x^2 \qquad\quad + 72} \\
 & 35x - 73
\end{array}$$

Por tanto, la función original se puede reescribir como

$$f(x) = x - 2 + \frac{35x - 73}{x^2 - 36}$$

En consecuencia, la recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua. Ahora sea $Y_1 = x - 2$ y $Y_2 = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$ y use un rectángulo de visualización donde $-15 \leq x \leq 15$ y $-30 \leq y \leq 30$. Se obtiene la figura 9.42.

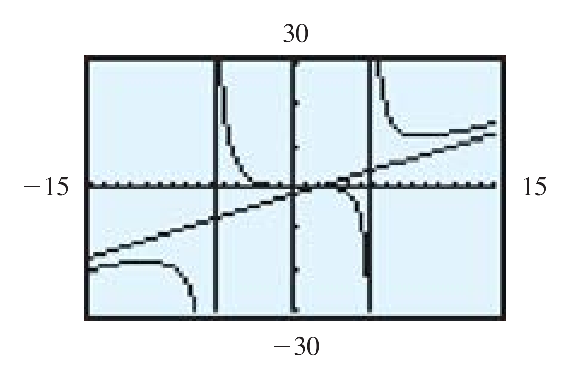


Figura 9.42 ■

Note que la gráfica en la figura 9.42 es consistente con la información que se tenía antes de usar la calculadora graficadora. Tenga en mente que la recta oblicua y las dos rectas verticales son asíntotas y no parte de la gráfica. Más aún, la gráfica puede parecer simétrica en torno al origen, pero recuerde que la prueba para simetría en torno al origen fracasó. Por ejemplo, el punto $\left(0, \frac{1}{36}\right)$ está en la gráfica pero el punto $\left(0, -\frac{1}{36}\right)$ no está en la gráfica. Advierta también que la curva sí interseca la asíntota oblicua. Puede usar las características ZOOM y TRACE de la calculadora graficadora para aproximar este punto de intersección, o puede usar un enfoque algebraico del modo siguiente. Puesto que $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$ y $y = x - 2$, puede igualar las dos expresiones para y y resolver la ecuación resultante para x.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36} = x - 2$$

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = (x - 2)(x^2 - 36)$$

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = x^3 - 2x^2 - 36x + 72$$

$$35x = 73$$

$$x = \frac{73}{35}$$

Si $x = \frac{73}{35}$, entonces $y = x - 2 = \frac{73}{35} - 2 = \frac{3}{35}$. El punto de intersección de la curva y la asíntota oblicua es $\left(\frac{73}{35}, \frac{3}{35}\right)$.

Conjunto de problemas 9.6

Para los problemas 1-20 grafique cada función racional. Verifique primero la simetría e identifique las asíntotas.

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 3}$

3. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 8}$

4. $f(x) = \frac{-x^2}{x^2 + 3x - 4}$

5. $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$

6. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 9}$

7. $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 6}$

8. $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 2x - 8}$

9. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

10. $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 - 6x}$

11. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

12. $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$

13. $f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}$

14. $f(x) = \frac{-5x}{x^2 + 2}$

15. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

16. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

17. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$

18. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$

19. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$

20. $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

21. Explique el concepto de asíntota oblicua.

22. Explique por qué es posible que las curvas intersequen las asíntotas horizontal y oblicua, más no las asíntotas verticales.

23. Brinde una descripción paso a paso de cómo graficaría

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 2}.$$

24. Su amigo tiene dificultad para encontrar el punto de intersección de una curva y la asíntota oblicua. ¿Cómo le ayudaría?

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

25. Primero verifique la simetría e identifique las asíntotas para las gráficas de las siguientes funciones racionales. Luego use su herramienta de graficación para bosquejar cada función.

(a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + x - 2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 - 5x - 6}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **(f)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

26. Para cada una de las siguientes funciones racionales, primero determine y grafique cualquier asíntota oblicua. Luego, sobre el mismo conjunto de ejes, grafique la función.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 3}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 2}$

(f) $f(x) = \dfrac{4x^2 + x + 1}{x + 1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 3}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$

Capítulo 9 Resumen

(9.1) Si el divisor es de la forma $x - c$, donde c es una constante, entonces el formato típico de división larga para dividir polinomios se puede simplificar a un proceso llamado **división sintética**. Revise este proceso al estudiar los ejemplos en esta sección.

El algoritmo de la división para polinomios afirma que, si $f(x)$ y $d(x)$ son polinomios y $d(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $d(x)$.

(9.2) El teorema del resto afirma que, si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es igual a $f(c)$. Por ende, un polinomio se puede evaluar para un número dado o mediante sustitución directa o mediante la división sintética.

El teorema del factor afirma que un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

(9.3) Los siguientes conceptos y propiedades proporcionan una base para resolver ecuaciones polinomiales.

1. División sintética.
2. El teorema del factor.
3. Propiedad 9.3: Una ecuación polinomial de grado n tiene n soluciones, donde cualquier solución de multiplicidad p se cuenta p veces.
4. El teorema de raíz racional: Considere la ecuación polinomial

   $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

   donde los coeficientes son *enteros*. Si el número racional $\frac{c}{d}$, reducido a términos más bajos, es una solución de la ecuación, entonces c es un factor del término constante a_0 y d es un factor del coeficiente principal a_n.
5. Propiedad 9.5: Las soluciones complejas no reales de las ecuaciones polinomiales con coeficientes reales, si existen, deben ocurrir en pares conjugados.
6. Regla de signos de Descartes: Sea $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ una ecuación polinomial con coeficientes reales.

(a) El número de *soluciones reales positivas* es igual al número de variaciones de signo o es menor que el número de variaciones de signo por un entero par positivo.

(b) El número de *soluciones reales negativas* es igual al número de variaciones de signo en

$$a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \cdots + a_1(-x) + a_0$$

o es menor que el número de variaciones de signo por un entero par positivo.

(9.4) Los siguientes pasos se pueden usar para graficar una función polinomial que se exprese en forma factorizada:

1. Encontrar las abscisas al origen, que también se llaman **ceros** de la función polinomial.
2. Use un valor de prueba en cada uno de los intervalos determinados por las abscisas al origen para encontrar si la función es positiva o negativa sobre dicho intervalo.
3. Grafique cualquier punto adicional que se necesite para determinar la gráfica.

(9.5) y **(9.6)** Para graficar una función racional son útiles los siguientes pasos:

1. Verifique la simetría con respecto al eje vertical y con respecto al origen.
2. Encuentre cualquier asíntota vertical al igualar a cero el denominador y resolverlo para x.
3. Encuentre cualquier asíntota horizontal al estudiar el comportamiento de $f(x)$ conforme x se hace o muy grande o muy pequeña. Esto puede requerir cambiar la forma de la expresión racional original.
4. Si el grado del numerador es uno mayor que el grado del denominador, determine la ecuación de la asíntota oblicua.
5. Estudie el comportamiento de la gráfica cuando está cerca de las rectas asintóticas.
6. Grafique tantos puntos como sea necesario para determinar la gráfica. Esto se puede afectar si la gráfica tiene alguna simetría.

Capítulo 9 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-4 use división sintética para determinar el cociente y el residuo.

1. $(3x^3 - 4x^2 + 6x - 2) \div (x - 1)$

2. $(5x^3 + 7x^2 - 9x + 10) \div (x + 2)$

3. $(-2x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1) \div (x + 4)$

4. $(-3x^4 - 5x^2 + 9) \div (x - 3)$

Para los problemas 5-8 encuentre $f(c)$ con el uso de división sintética y el teorema del residuo, o al evaluar directamente $f(c)$.

5. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ y $c = 1$

6. $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 6x - 8$ y $c = -3$

7. $f(x) = -x^4 + 9x^2 - x - 2$ y $c = -2$

8. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 10x + 16$ y $c = 8$

Para los problemas 9-12 use el teorema del factor para responder algunas preguntas acerca de factores.

9. ¿$x + 2$ es factor de $2x^3 + x^2 - 7x - 2$?

10. ¿$x - 3$ es factor de $x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x + 3$?

11. ¿$x - 4$ es factor de $x^5 - 1024$?

12. ¿$x + 1$ es factor de $x^5 + 1$?

Para los problemas 13-16 use el teorema de raíz racional y el teorema del factor para auxiliarse a resolver cada una de las ecuaciones.

13. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

14. $8x^3 + 26x^2 - 17x - 35 = 0$

15. $x^4 - 5x^3 + 34x^2 - 82x + 52 = 0$

16. $x^3 - 4x^2 - 10x + 4 = 0$

Para los problemas 17 y 18, use la regla de los signos de Descartes (propiedad 9.6) para auxiliarse a elaborar una lista de las posibilidades para la naturaleza de las soluciones. *No resuelva las ecuaciones.*

17. $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 4 = 0$

18. $x^5 + 3x^3 + x + 7 = 0$

Para los problemas 19-22 grafique cada una de las funciones polinomiales.

19. $f(x) = -(x - 2)^3 + 3$

20. $f(x) = (x + 3)(x - 1)(3 - x)$

21. $f(x) = x^4 - 4x^2$

22. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Para los problemas 23-26 grafique cada una de las funciones racionales. Asegúrese de identificar las asíntotas.

23. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$

24. $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 - x - 6}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

Capítulo 9 Examen

1. Encuentre el cociente y el residuo cuando $3x^3 + 5x^2 - 14x - 6$ se divide entre $x + 3$.

2. Encuentre el cociente y el resto cuando $4x^4 - 7x^2 - x + 4$ se divide entre $x - 2$.

3. Si $f(x) = x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 13x^2 - 9x - 10$, encuentre $f(7)$.

4. Si $f(x) = 3x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 9x + 19$, encuentre $f(-7)$.

5. Si $f(x) = x^5 - 35x^3 - 32x + 15$, encuentre $f(6)$.

6. ¿$x - 5$ es factor de $3x^3 - 11x^2 - 22x - 20$?

7. ¿$x + 2$ es factor de $5x^3 + 9x^2 - 9x - 17$?

8. ¿$x + 3$ es factor de $x^4 - 16x^2 - 17x + 12$?

9. ¿$x - 6$ es factor de $x^4 - 2x^2 + 3x - 12$?

Para los problemas 10-14, resuelva cada ecuación.

10. $x^3 - 13x + 12 = 0$

11. $2x^3 + 5x^2 - 13x - 4 = 0$

12. $x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 38x - 30 = 0$

13. $2x^3 + 3x^2 - 17x + 12 = 0$

14. $3x^3 - 7x^2 - 8x + 20 = 0$

15. Use la regla de los signos de Descartes para determinar la naturaleza de las raíces de $5x^4 + 3x^3 - x^2 - 9 = 0$.

16. Encuentre las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 + 19x^2 - 14x$.

17. Encuentre la ecuación de la asíntota vertical para la gráfica de la función $f(x) = \frac{5x}{x + 3}$.

18. Encuentre la ecuación de la asíntota horizontal para la gráfica de la función $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 4}$.

19. ¿Qué tipo de simetría muestra la gráfica de la ecuación $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$?

20. ¿Qué tipo de simetría muestra la gráfica de la ecuación $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 1}$?

Para los problemas 21-25 grafique cada una de las funciones.

21. $f(x) = (2 - x)(x - 1)(x + 1)$

22. $f(x) = -x(x - 3)(x + 2)$

23. $f(x) = \frac{-x}{x - 3}$

24. $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 4}$

25. $f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x + 1}$

10

Funciones exponencial y logarítmica

Puesto que los números de Richter para medir la intensidad de un terremoto se calculan a partir de logaritmos, se les refiere con una escala logarítmica. Las escalas logarítmicas se usan comúnmente en ciencia y matemáticas para transformar números muy grandes a una escala más pequeña.

¿Si invierte \$100 a 8% de interés compuesto continuo, cuánto tarda en triplicarlos? Puede usar la fórmula $A = Pe^{rt}$ para generar la ecuación $300 = 100e^{0.08t}$, que se resuelve para t usando logaritmos. Tardará aproximadamente 13.7 años para triplicar el dinero.

En este capítulo (1) ampliará su comprensión de los exponentes, (2) trabajará con algunas funciones exponenciales, (3) considerará el concepto de logaritmo, (4) trabajará con algunas funciones logarítmicas y (5) usará los conceptos de exponentes y logaritmos para aumentar sus habilidades en la resolución de problemas. Su calculadora será una valiosa herramienta a lo largo de este capítulo.

10.1 Exponentes y funciones exponenciales

En el capítulo 1 se definió la expresión b^n para representar n factores de b, donde n es cualquier entero positivo y b es cualquier número real. Por ejemplo,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

$$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16 \qquad -(0.5)^3 = -[(0.5)(0.5)(0.5)] = -0.125$$

Luego, en el capítulo 5, al definir $b^0 = 1$ y $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, donde n es cualquier entero positivo y b es cualquier número real distinto de cero, se amplió el concepto de exponente para abarcar a todos los enteros. Los ejemplos incluyen

$$(0.76)^0 = 1 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} \qquad (0.4)^{-1} = \frac{1}{(0.4)^1} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

En el capítulo 5 también se proporcionó el uso de todos los números racionales como exponentes al definir

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$$

donde n es un entero positivo mayor que 1, y b es un número real tal que existe $\sqrt[n]{b}$. Algunos ejemplos son

$$27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9 \qquad 16^{1/4} = \sqrt[4]{16^1} = 2$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \qquad 32^{-1/5} = \frac{1}{32^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$$

La ampliación formal del concepto de exponente, para incluir el uso de números irracionales, requiere algunas ideas de cálculo y, por tanto, está más allá del ámbito de este texto. Sin embargo, se da un breve vistazo para tener una idea general. Considere el número $2^{\sqrt{3}}$. Al usar la representación decimal interminable y no repetitiva 1.73205, . . . para $\sqrt{3}$, puede formar la secuencia de números $2^1, 2^{1.7}, 2^{1.73}, 2^{1.732}, 2^{1.7320}, 2^{1.73205}, \ldots$ parece razonable que cada potencia sucesiva se acerque más a $2^{\sqrt{3}}$. Esto es precisamente lo que ocurre si b^n, donde n es irracional, se define de manera adecuada usando el concepto de límite. Más aún, esto garantizará que una expresión como 2^x producirá exactamente un valor para cada valor de x.

A partir de ahora, entonces, puede usar cualquier número real como exponente, y así ampliar las propiedades básicas enunciadas en el capítulo 5 para incluir todos los números reales como exponentes. A continuación se replantearán dichas propiedades con la restricción de que las bases a y b deben ser números

positivos, con el fin de evitar expresiones como $(-4)^{1/2}$, que no representan números reales.

Propiedad 10.1

Si a y b son números reales positivos y m y n son cualesquiera números reales, entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ — Producto de dos potencias
2. $(b^n)^m = b^{mn}$ — Potencia de una potencia
3. $(ab)^n = a^n b^n$ — Potencia de un producto
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — Potencia de un cociente
5. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ — Cociente de dos potencias

Otra propiedad a usar para resolver ciertos tipos de ecuaciones con exponentes se enuncia del modo siguiente:

Propiedad 10.2

Si $b > 0$, $b \neq 1$, y m y n son números reales, entonces $b^n = b^m$ si y sólo si $n = m$.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la propiedad 10.2. Para usar la propiedad para resolver ecuaciones, ambos lados de la ecuación deberán tener el mismo número base.

EJEMPLO 1 Resuelva $2^x = 32$

Solución

$2^x = 32$

$2^x = 2^5$ — $32 = 2^5$

$x = 5$ — Propiedad 10.2

El conjunto solución es $\{5\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $3^{2x} = \frac{1}{9}$

Solución

$$3^{2x} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$
$$3^{2x} = 3^{-2}$$
$$2x = -2 \qquad \text{Propiedad 10.2}$$
$$x = -1$$

El conjunto solución es $\{-1\}$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \frac{1}{125}$

Solución

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \frac{1}{125}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$
$$x - 4 = 3 \qquad \text{Propiedad 10.2}$$
$$x = 7$$

El conjunto solución es $\{7\}$. ■

EJEMPLO 4

Resuelva $8^x = 32$

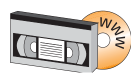
Solución

$$8^x = 32$$
$$(2^3)^x = 2^5 \qquad 8 = 2^3$$
$$2^{3x} = 2^5$$
$$3x = 5 \qquad \text{Propiedad 10.2}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{5}{3}\right\}$. ■

EJEMPLO 5

Resuelva $(3^{x+1})(9^{x-2}) = 27$



Solución

$$(3^{x+1})(9^{x-2}) = 27$$
$$(3^{x+1})(3^2)^{x-2} = 3^3$$
$$(3^{x+1})(3^{2x-4}) = 3^3$$

$$3^{3x-3} = 3^3$$

$$3x - 3 = 3 \qquad \text{Propiedad 10.2}$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

El conjunto solución es {2}. ■

Funciones exponenciales

Si b es cualquier número positivo, entonces la expresión b^x designa exactamente un número real para todo valor real de x. Por tanto, la ecuación $f(x) = b^x$ define una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Más aún, si se incluye la restricción adicional $b \neq 1$, entonces cualquier ecuación de la forma $f(x) = b^x$ describe lo que se más tarde se llamará una función uno a uno y se conoce como una **función exponencial**. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 10.1

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función f definida por

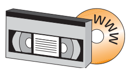
$$f(x) = b^x$$

donde x es cualquier número real, se llama **función exponencial con base *b***.

Ahora considere la graficación de algunas funciones exponenciales.

EJEMPLO 6

Grafique la función $f(x) = 2^x$



Solución

Elabore una tabla de valores; tenga en mente que el dominio es el conjunto de los números reales y que la ecuación $f(x) = 2^x$ no muestra simetría. Grafique estos puntos y conéctelos con una curva continua para producir la figura 10.1.

x	2^x
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

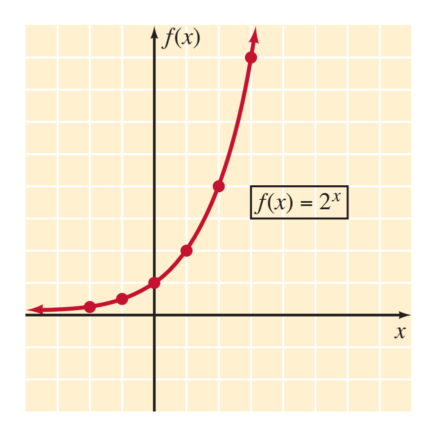


Figura 10.1 ■

En la tabla para el ejemplo 6 se eligen valores enteros de x para mantener el cálculo simple. Sin embargo, con el uso de una calculadora, fácilmente podría adquirir valores funcionales al usar exponentes no enteros. Considere los siguientes valores adicionales para $f(x) = 2^x$.

$$f(0.5) \approx 1.41 \qquad f(1.7) \approx 3.25$$

$$f(-0.5) \approx 0.71 \quad f(-2.6) \approx 0.16$$

Use su calculadora para comprobar estos resultados. Note también que los puntos generados por estos valores sí encajan en la gráfica de la figura 10.1.

EJEMPLO 7

Grafique $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución

De nuevo elabore una tabla de valores, grafique los puntos y conéctelos con una curva continua. La gráfica se muestra en la figura 10.2.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

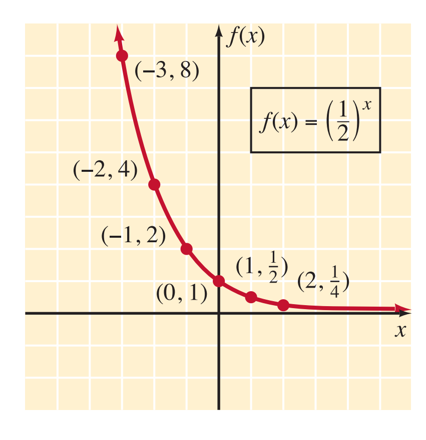


Figura 10.2 ■

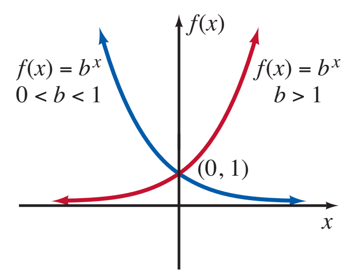


Figura 10.3

Observaciones: Dado que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ son reflexiones mutuas a través del eje y. Por tanto, la figura 10.2 podría dibujarse al reflejar la figura 10.1 a través del eje y.

Las gráficas de las figuras 10.1 y 10.2 ilustran un patrón de comportamiento de las funciones exponenciales. Es decir: si $b > 1$, entonces la gráfica de $f(x) = b^x$ *sube a la derecha* y la función se llama **función creciente**. Si $0 < b < 1$, entonces la gráfica de $f(x) = b^x$ *baja a la derecha*, y la función se llama **función decreciente**. Estos hechos se ilustran en la figura 10.3. Note que $b^0 = 1$ para cualquier $b > 0$; por tanto, todas las gráficas de $f(x) = b^x$ contienen el punto (0, 1).

Conforme grafique funciones exponenciales, no olvide sus experiencias de graficación previas.

1. La gráfica de $f(x) = 2^x - 4$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *movida hacia abajo cuatro unidades.*

2. La gráfica de $f(x) = 2^{x+3}$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *movida tres unidades a la izquierda*.

3. La gráfica de $f(x) = -2^x$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *reflejada a través del eje x*.

Se utilizó una calculadora graficadora para dibujar estas cuatro funciones sobre el mismo conjunto de ejes, como se muestra en la figura 10.4.

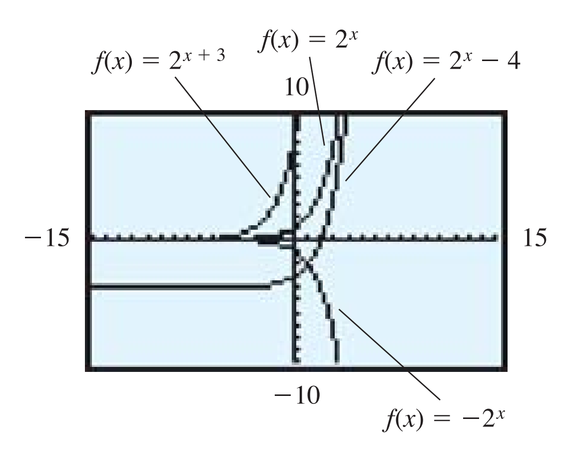


Figura 10.4

Si se enfrenta con una función exponencial que no es de la forma básica $f(x) = b^x$ o una variación de ella, no olvide las sugerencias de graficación que se ofrecen en capítulos anteriores. Considere uno de tales ejemplos.

EJEMPLO 8

Grafique $f(x) = 2^{-x^2}$

Solución

Puesto que $f(-x) = 2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2} = f(x)$, se sabe que esta curva es simétrica con respecto al eje y. Por tanto, elabore una tabla de valores usando valores no negativos para x. Grafique estos puntos, conéctelos con una curva continua y refleje esta parte de la curva a través del eje y para producir la gráfica en la figura 10.5.

x	2^{x^2}
0	1
$\frac{1}{2}$	0.84
1	0.5
$\frac{3}{2}$	0.21
2	0.06

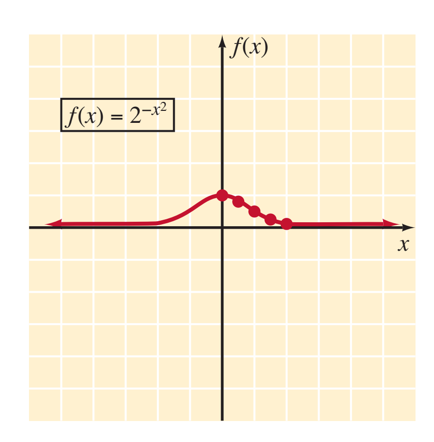


Figura 10.5 ■

Finalmente, considere un problema en el que una herramienta de graficación ofrece una solución aproximada.

EJEMPLO 9

Use una herramienta de graficación para obtener una gráfica de $f(x) = 50(2^x)$ y encuentre un valor aproximado para x cuando $f(x) = 15\,000$.

Solución

Primero debe encontrar un rectángulo de visualización apropiado. Puesto que $50(2^{10}) = 51\,200$, establezca las fronteras de modo que $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 50\,000$ con una escala de 10 000 sobre el eje y. (Cierto, podría usar otras fronteras, pero éstas darán una gráfica que funciona para este problema.) La gráfica de $f(x) = 50(2^x)$ se muestra en la figura 10.6. Ahora puede usar las características TRACE y ZOOM de la herramienta de graficación para encontrar que $x \approx 8.2$ en $y = 15\,000$.

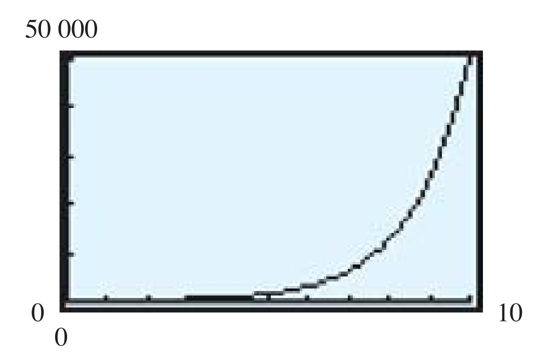


Figura 10.6 ■

Observaciones: En el ejemplo 9 se usó un abordaje gráfico para resolver la ecuación $50(2^x) = 15\,000$. En la sección 10.6 se usará un enfoque algebraico para resolver este tipo de ecuación.

Conjunto de problemas 10.1

Para los problemas 1-26 resuelva cada una de las ecuaciones.

1. $2^x = 64$

2. $3^x = 81$

3. $3^{2x} = 27$

4. $2^{2x} = 16$

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$

6. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256}$

7. $3^{-x} = \frac{1}{243}$

8. $3^{x+1} = 9$

9. $6^{3x-1} = 36$

10. $2^{2x+3} = 32$

11. $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{64}{27}$

12. $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{9}{4}$

13. $16^x = 64$

14. $4^x = 8$

15. $27^{4x} = 9^{x+1}$

16. $32^x = 16^{1-x}$

17. $9^{4x-2} = \frac{1}{81}$

18. $8^{3x+2} = \frac{1}{16}$

19. $10^x = 0.1$

20. $10^x = 0.0001$

21. $(2^{x+1})(2^x) = 64$

22. $(2^{2x-1})(2^{x+2}) = 32$

23. $(27)(3^x) = 9^x$

24. $(3^x)(3^{5x}) = 81$

25. $(4^x)(16^{3x-1}) = 8$

26. $(8^{2x})(4^{2x-1}) = 16$

Para los problemas 27-46 grafique cada una de las funciones exponenciales.

27. $f(x) = 3^x$

28. $f(x) = 4^x$

29. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

30. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

31. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

32. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

33. $f(x) = 2^x - 3$

34. $f(x) = 2^x + 1$

35. $f(x) = 2^{x+2}$

36. $f(x) = 2^{x-1}$

37. $f(x) = -2^x$

38. $f(x) = -3^x$

39. $f(x) = 2^{-x-2}$

40. $f(x) = 2^{-x+1}$

41. $f(x) = 2^{x^2}$

42. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

43. $f(x) = 2^{|x|}$

44. $f(x) = 3^{1-x^2}$

45. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

46. $f(x) = 2^{-|x|}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

47. Explique cómo resolvería la ecuación. $(2^{x+1})(8^{2x-3}) = 64$.

48. ¿Por qué la base de una función exponencial se restringe a números positivos, sin incluir al 1?

49. Explique cómo graficaría la función $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

50. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 27-46.

51. Grafique $f(x) = 2^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de $f(x) = 2^{x-5}$, $f(x) = 2^{x-7}$ y $f(x) = 2^{x+5}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = 2^x$.

52. Grafique $f(x) = 3^x$. ¿Dónde deben ubicarse las gráficas de $f(x) = 3^x + 2$, $f(x) = 3^x - 3$ y $f(x) = 3^x - 7$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = 3^x$.

53. Grafique $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ y $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

54. Grafique $f(x) = (1.5)^x$, $f(x) = (5.5)^x$, $f(x) = (0.3)^x$ y $f(x) = (0.7)^x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Estas gráficas son consistentes con la figura 10.3?

55. ¿Cuál es la solución para $3^x = 5$? ¿Está de acuerdo en que está entre 1 y 2, porque $3^1 = 3$ y $3^2 = 9$? Ahora grafique $f(x) = 3^x - 5$ y use las características ZOOM y TRACE de su calculadora graficadora para encontrar una aproximación, a la centésima más cercana, para la abscisa al origen. Debe obtener una respuesta de 1.46. ¿Ésta es una aproximación para la solución de $3^x = 5$? Intente elevar 3 a la potencia 1.46.

Encuentre una solución aproximada, a la centésima más cercana, para cada una de las siguientes ecuaciones al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

(a) $2^x = 19$ **(b)** $3^x = 50$ **(c)** $4^x = 47$
(d) $5^x = 120$ **(e)** $2^x = 1500$ **(f)** $3^{x-1} = 34$

10.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales

Puede representar muchas situaciones del mundo real que muestren crecimiento o decaimiento con ecuaciones que describan funciones exponenciales. Por ejemplo, suponga que un economista predice una tasa de inflación anual de 5% anual durante los próximos 10 años. Esto significa que un artículo, con un precio actual de \$8, costará 8(105%) = 8(1.05) = \$8.40 dentro de un año. El mismo artículo costará [8(105%)](105%) = $8(1.05)^2$ = \$8.82 en 2 años. En general, con la ecuación

$$P = P_0(1.05)^t$$

se obtiene el precio predicho P de un artículo en t años, si el costo actual es P_0 y la tasa de inflación anual es de 5%. Con esta ecuación es posible buscar algún precio futuro con base en la predicción de una tasa de inflación de 5%.

Un frasco de mostaza de \$0.79 costará $\$0.79(1.05)^3 = \$0.91$ en tres años.
Una bolsa de papas fritas de \$2.69 costará $\$2.69(1.05)^5 = \$3.43$ en 5 años.
Una lata de café de \$6.69 costará $\$6.69(1.05)^7 = \$9.41$ en 7 años.

Interés compuesto

El interés compuesto proporciona otro ejemplo del crecimiento exponencial. Suponga que \$500, llamado el **principal**, se invierten a una tasa de interés de 8% compuesto anual. El interés ganado el primer año es \$500(0.08) = \$40, y esta cantidad se suma a los \$500 originales para formar un nuevo principal de \$540 para el segundo año. El interés ganado durante el segundo año es \$540(0.08) = \$43.20, y esta cantidad se suma a \$540 para formar un nuevo principal de \$583.20 para el tercer año. Cada año se forma un nuevo principal al reinvertir el interés ganado durante dicho año.

En general, suponga que una suma de dinero P (el principal) se invierte a una tasa de interés compuesto anual de r por ciento. El interés ganado el primer año es Pr, y el nuevo principal para el segundo año es $P + Pr$, o $P(1 + r)$. Note que el nuevo principal para el segundo año se puede encontrar al multiplicar el princi-

pal original P por $(1 + r)$. En forma parecida, el nuevo principal para el tercer año se puede encontrar al multiplicar el principal anterior $P(1 + r)$ por $1 + r$ y, por ende, se obtiene $P(1 + r)^2$. Si continúa este proceso, después de t años la cantidad de dinero total acumulada, (A), está dada por

$$A = P(1 + r)^t$$

Considere los siguientes ejemplos de inversiones realizados a cierta tasa de interés compuesto anual:

1. \$750 invertidos durante 5 años a 9% de interés compuesto anual produce

$A = \$750(1.09)^5 = \$1153.97$

2. \$1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto anual produce

$A = \$1000(1.07)^{10} = \$1967.15$

3. \$5000 invertidos durante 20 años a 6% de interés compuesto anual produce

$A = \$5000(1.06)^{20} = \$16\,035.68$

Puede usar la fórmula de interés compuesto para determinar qué tasa de interés se necesita para acumular cierta cantidad de dinero con base en una inversión inicial dada. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

EJEMPLO 1

¿Qué tasa de interés se necesita para que una inversión de \$1000 produzca \$4000 en 10 años, si el interés se compone anualmente?

Solución

Sustituya P por \$1000, A por \$4000 y t por 10 años en la fórmula de interés compuesto y resuelva para r.

$$A = P(1 + r)^t$$
$$4000 = 1000(1 + r)^{10}$$
$$4 = (1 + r)^{10}$$
$$4^{0.1} = [(1 + r)^{10}]^{0.1} \quad \text{Eleve ambos lados a la potencia 0.1.}$$
$$1.148698355 \approx 1 + r$$
$$0.148698355 \approx r$$
$$r = 14.9\% \quad \text{a la décima porcentual más cercana}$$

En consecuencia, se necesita una tasa de interés de aproximadamente 14.9%. (Quizá deba verificar esta respuesta.) ■

Si el dinero que se invierte a cierta tasa de interés se compone más de una vez al año, entonces la fórmula básica $A = P(1 + r)^t$ se puede ajustar de acuerdo con el número de periodos compuestos en un año. Por ejemplo, para *compuesto*

semestral, la fórmula se convierte en $A = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$; para *compuesto trimestral*, la fórmula se convierte en $A = P\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$. En general, si n representa el número de periodos compuestos en un año, la fórmula se convierte en

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la fórmula:

1. $750 invertidos durante 5 años a 9% de interés compuesto semestral produce

$$A = \$750\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{2(5)} = \$750(1.045)^{10} = \$1164.73$$

2. $1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto semestral produce

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{4(10)} = \$1000(1.0175)^{40} = \$2001.60$$

3. $5000 invertidos durante 20 años a 6% de interés compuesto mensual produce

$$A = \$5000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(20)} = \$5000(1.005)^{240} = \$16\,551.02$$

Puede encontrar interesante comparar estos resultados con los obtenidos anteriormente para un compuesto anual.

Decaimiento exponencial

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% por año durante los primeros 5 años. Por tanto, un automóvil que cuesta $9500 valdrá $9500(100% − 15%) = $9500(85%) = $9500(0.85) = $8075 en 1 año. En 2 años el valor del automóvil se habrá depreciado $\$9500(0.85)^2 = \$6864$ (al dólar más cercano). La ecuación

$$V = V_0(0.85)^t$$

produce el valor V de un automóvil en t años, si el costo inicial es V_0, y el valor se deprecia 15% por año. Por tanto, puede estimar algunos valores automóvil al dólar más cercano del modo siguiente:

Un automóvil de $13 000 valdrá $\$13\,000(0.85)^3 = \$7984$ en 3 años.
Un automóvil de $17 000 valdrá $\$17\,000(0.85)^5 = \$7543$ en 5 años.
Un automóvil de $25 000 valdrá $\$25\,000(0.85)^4 = \$13\,050$ en 4 años.

Otro ejemplo de decaimiento exponencial se asocia con las sustancias radiactivas. La tasa de decaimiento se describe exponencialmente y se basa en la vida media de una sustancia. La **vida media** de una sustancia radiactiva es la cantidad de tiempo que tarda en desaparecer la mitad de una cantidad inicial de la sustancia

como resultado del decaimiento. Por ejemplo, suponga que se tienen 200 gramos de cierta sustancia que tiene una vida media de 5 días. Después de 5 días, permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right) = 100$ gramos. Después de 10 días permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50$ gramos. Después de 15 días permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 25$ gramos. En general, después de t días, permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$ gramos.

El análisis anterior conduce a la siguiente fórmula de vida media. Suponga que hay una cantidad inicial (Q_0) de una sustancia radiactiva con una vida media de h. La cantidad de sustancia restante (Q) después de un periodo t está dada por la fórmula

$$Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

Las unidades de medida para t y h deben ser las mismas.

EJEMPLO 2

El bario 140 tiene una vida media de 13 días. Si inicialmente hay 500 miligramos de bario, ¿cuántos miligramos permanecen después de 26 días? ¿Después de 100 días?

Solución

Cuando se usa $Q_0 = 500$ y $h = 13$, la fórmula de vida media se convierte en

$$Q = 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}$$

Si $t = 26$, entonces

$$\begin{aligned} Q &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{26}{13}} \\ &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 500\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 125 \end{aligned}$$

Por tanto, después de 26 días permanecen 125 miligramos. Si $t = 100$, entonces

$$\begin{aligned} Q &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{13}} \\ &= 500(0.5)^{\frac{100}{13}} \\ &= 2.4 \quad \text{a la décima de miligramo más cercana} \end{aligned}$$

Después de 100 días permanecen aproximadamente 2.4 miligramos. ■

Observaciones: El ejemplo 2 ilustra claramente que una calculadora es útil en ocasiones, pero no es necesaria siempre. La primera parte del problema se resolvió muy fácilmente sin calculadora, pero en realidad fue útil para la segunda parte del problema.

Número *e*

Una interesante situación ocurre si considera la fórmula de interés compuesto para $P = \$1$, $r = 100\%$ y $t = 1$ año. La fórmula se convierte en $A = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La siguiente tabla muestra algunos valores, redondeados a ocho lugares decimales, de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para diferentes valores de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1 000	2.71692393
10 000	2.71814593
100 000	2.71826824
1 000 000	2.71828047
10 000 000	2.71828169
100 000 000	2.71828181
1 000 000 000	2.71828183

La tabla sugiere que, conforme n aumenta, el valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se acerca cada vez más a cierto número fijo. Esto ocurre y el número fijo se llama e. A cinco lugares decimales, $e = 2.71828$.

La función definida por la ecuación $f(x) = e^x$ es la **función exponencial natural**. Tiene muchas aplicaciones en el mundo real, algunas de las cuales se apreciarán en un momento. Sin embargo, primero obtenga una imagen de la función exponencial natural. Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $f(x) = e^x$ debe caer entre las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$. Para ser más específicos use la calculadora para determinar una tabla de valores. Use la tecla $\boxed{e^x}$ y redondee los resultados a la décima más cercana para obtener la tabla siguiente. Grafique los puntos determinados por esta tabla, y conéctelos con una curva continua para producir la figura 10.7.

x	$f(x) = e^x$
0	1.0
1	2.7
2	7.4
−1	0.4
−2	0.1

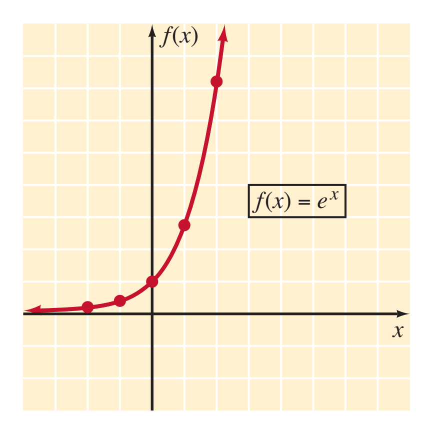


Figura 10.7

De vuelta al interés compuesto

Regrese al concepto de interés compuesto. Si el número de periodos compuestos en un año aumenta de manera indefinida, se llega al concepto de **compuesto continuo**. En matemáticas esto se logra al aplicar el concepto límite a la expresión $P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. No se mostrarán los detalles aquí, pero se obtiene el siguiente resultado.

La fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

produce el valor acumulado (A) de una suma de dinero (P) que se invirtió durante t años a una tasa de r por ciento de interés compuesto continuo. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la fórmula.

1. \$750 invertidos durante 5 años a 9% de interés compuesto continuo produce

$$A = \$750e^{(0.09)(5)} = 750e^{0.45} = \$1176.23$$

2. \$1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto continuo produce

$$A = \$1000e^{(0.07)(10)} = 1000e^{0.7} = \$2013.75$$

3. \$5000 invertidos durante 20 años a 6% de interés compuesto continuo produce

$$A = \$5000e^{(0.06)(20)} = 5000e^{1.2} = \$16\,600.58$$

De nuevo, es interesante comparar estos resultados con los obtenidos antes, cuando usaba un número diferente de periodos compuestos.

¿Es mejor invertir a 6% de interés compuesto trimestral o a 5.75% de interés compuesto continuo? Para responder esta pregunta, puede usar el concepto de **producción efectiva** (en ocasiones llamada tasa de interés anual efectiva). La producción efectiva de una inversión es la tasa de interés simple que produciría la misma cantidad en un año.

Por tanto, para la inversión a 6% de interés compuesto trimestral, puede calcular la producción efectiva del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
P(1 + r) &= P\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 \\
1 + r &= \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 && \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{P}. \\
1 + r &= (1.015)^4 \\
r &= (1.015)^4 - 1 \\
r &\approx 0.0613635506 \\
r &= 6.14\% && \text{a la centésima porcentual más cercana}
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, para la inversión a 5.75% de interés compuesto continuo, se calcula la producción efectiva del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
P(1 + r) &= Pe^{0.0575} \\
1 + r &= e^{0.0575} \\
r &= e^{0.0575} - 1 \\
r &\approx 0.0591852707 \\
r &= 5.92\% && \text{a la centésima porcentual más cercana}
\end{aligned}
$$

Por tanto, al comparar las dos producciones efectivas, se ve que es mejor invertir a 6% de interés compuesto trimestral que invertir a 5.75% de interés compuesto continuo.

Ley de crecimiento exponencial

Las ideas detrás de "compuesto continuo" se trasladan a otras situaciones de crecimiento. La ley de crecimiento exponencial,

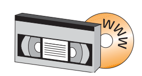
$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

se usa como modelo matemático para numerosas aplicaciones de crecimiento y decaimiento. En esta ecuación $Q(t)$ representa la cantidad de una sustancia dada en algún tiempo t, Q_0 es la cantidad inicial de la sustancia (cuando $t = 0$) y k es una constante que depende de la aplicación particular. Si $k < 0$, entonces $Q(t)$ disminuye conforme t aumenta, y al modelo se le conoce como **ley de decaimiento**.

Considere algunas aplicaciones de crecimiento y decaimiento.

EJEMPLO 3

Suponga que, en cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = 15\,000e^{0.3t}$ expresa el número de bacterias presentes como función del tiempo t, donde t se expresa en horas. Encuentre (a) el número inicial de bacterias y (b) el número de bacterias después de 3 horas.



Solución

(a) El número inicial de bacterias se produce cuando $t = 0$.

$$Q(0) = 15\,000e^{0.3(0)}$$
$$= 15\,000e^{0}$$
$$= 15\,000 \qquad e^0 = 1$$

(b) $Q(3) = 15\,000e^{0.3(3)}$

$$= 15\,000e^{0.9}$$
$$= 36\,894 \quad \text{al entero positivo más cercano}$$

Por tanto, después de 3 horas, debe haber aproximadamente 36 894 bacterias. ■

EJEMPLO 4

Suponga que el número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos está dado por la ecuación $Q(t) = Q_0e^{0.05t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. Si después de 20 minutos hay 5000 bacterias, ¿cuántas bacterias había al inicio?

Solución

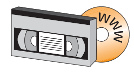
Si 5000 bacterias están presentes después de 20 minutos, entonces $Q(20) = 5000$.

$$5000 = Q_0e^{0.05(20)}$$
$$5000 = Q_0e^{1}$$
$$\frac{5000}{e} = Q_0$$
$$1839 = Q_0 \quad \text{tal entero positivo más cercano}$$

Por tanto, al inicio había aproximadamente 1839 bacterias. ■

EJEMPLO 5

El número de gramos de cierta sustancia radiactiva presente después de t segundos está dado por la ecuación $Q(t) = 200e^{-0.3t}$. ¿Cuántos gramos permanecen después de 7 segundos?



Solución

Use $Q(t) = 200e^{-0.3t}$ para obtener

$$Q(7) = 200e^{(-0.3)(7)}$$
$$= 200e^{-2.1}$$
$$= 24.5 \quad \text{a la décima más cercana}$$

Por tanto, después de 7 segundos permanecen aproximadamente 24.5 gramos. ■

Finalmente, considere dos ejemplos en los que se usa una herramienta de graficación para producir la gráfica.

EJEMPLO 6

Suponga que \$1000 se invierten a 6.5% de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Solución

Sustituya P por \$1000 y 0.065 por r en la fórmula $A = Pe^{rt}$ para producir $A = 1000e^{0.065t}$. Si se hace $y = A$ y $x = t$, puede graficar la ecuación $y = 1000e^{0.065x}$. Al hacer $x = 20$ se obtiene $y = 1000e^{0.065(20)} = 1000e^{1.3} \approx 3670$. Por tanto, establezca las fronteras del rectángulo de visualización de modo que $0 \leq x \leq 20$ y $0 \leq y \leq 3700$ con una escala y de 1000. Entonces se obtiene la gráfica de la figura 10.8. Ahora se quiere encontrar el valor de x de manera que $y = 2000$. (El dinero se duplica.) Al usar las características ZOOM y TRACE de la herramienta de graficación, determina que un valor x de aproximadamente 10.7 producirá un valor y de 2000. Por tanto, tomará aproximadamente 10.7 años duplicar la inversión de \$1000.

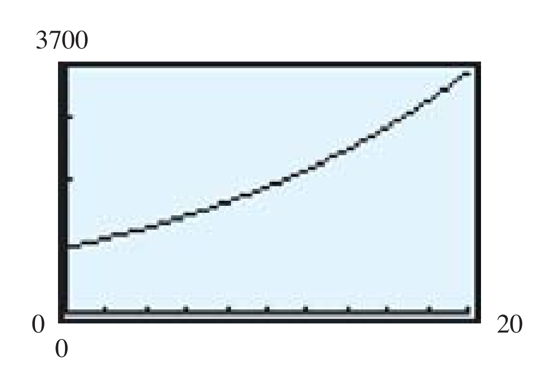
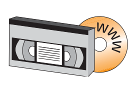


Figura 10.8 ■

EJEMPLO 7

Grafique la función $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ y encuentre su valor máximo.



Solución

Si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$, de modo que las fronteras del rectángulo de visualización se establecen en $-5 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 1$, con una escala y de 0.1; la gráfica de la función se muestra en la figura 10.9. A partir de la gráfica, se ve que el valor máximo de la función ocurre en $x = 0$, que ya se determinó en aproximadamente 0.4.

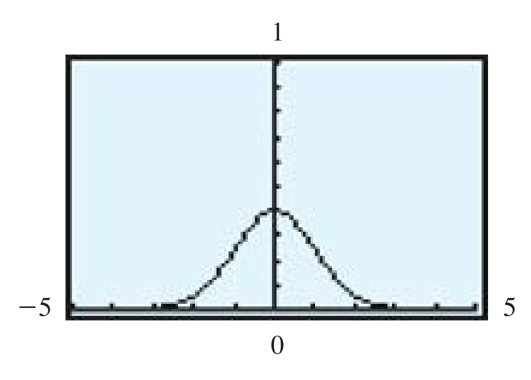


Figura 10.9 ■

Observaciones: La curva en la figura 10.9 se llama **curva de distribución normal**. Tal vez quiera que su instructor le explique lo que significa asignar calificaciones sobre la base de la curva de distribución normal.

Conjunto de problemas 10.2

1. Si supone que la tasa de inflación es de 4% anual, la ecuación $P = P_0(1.04)^t$ produce el precio predicho (P) de un artículo en t años que en la actualidad cuesta P_0. Encuentre el precio predicho de cada uno de los siguientes artículos para los años indicados:

(a) lata de sopa de $0.77 en 3 años
(b) contenedor de mezcla de cocoa de $3.43 en 5 años
(c) frasco de crema para café de $1.99 en 4 años
(d) lata de frijoles y tocino de $1.05 en 10 años
(e) automóvil de $18 000 en 5 años (dólar más cercano)
(f) casa de $120 000 en 8 años (dólar más cercano)
(g) televisor de $500 en 7 años (dólar más cercano)

2. Suponga que se estima que el valor de un automóvil se deprecia 30% por año durante los primeros 5 años. La ecuación $A = P_0(0.7)^t$ produce el valor (A) de un automóvil después de t años si el precio original es P_0. Encuentre el valor (al dólar más cercano) de cada uno de los siguientes automóviles después del tiempo indicado:

(a) automóvil de $16 500 después de 4 años
(b) automóvil de $22 000 después de 2 años
(c) automóvil de $27 000 después de 5 años
(d) automóvil de $40 000 después de 3 años

Para los problemas 3-14, use la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para encontrar la cantidad total de dinero acumulado al final del periodo indicado para cada una de las siguientes inversiones:

3. $200 durantes 6 años a 6% de interés compuesto anual

4. $250 durante 5 años a 7% de interés compuesto anual

5. $500 durante 7 años a 8% de interés compuesto semestral

6. $750 durante 8 años a 8% de interés compuesto semestral

7. $800 durante 9 años a 9% de interés compuesto trimestral

8. $1200 durante 10 años a 10% de interés compuesto trimestral

9. $1500 durante 5 años a 12% de interés compuesto mensual

10. $2000 durante 10 años a 9% de interés compuesto mensual

11. $5000 durante 15 años a 8.5% de interés compuesto anual

12. $7500 durante 20 años a 9.5% de interés compuesto semestral

13. $8000 durante 10 años a 10.5% de interés compuesto trimestral

14. $10 000 durante 25 años a 9.25% de interés compuesto mensual

Para los problemas 15-23 use la fórmula $A = Pe^{rt}$ para encontrar la cantidad total de dinero acumulado al final del periodo indicado al interés compuesto continuo.

15. $400 durante 5 años a 7%

16. $500 durante 7 años a 6%

17. $750 durante 8 años a 8%

18. $1000 durante 10 años a 9%

19. $2000 durante 15 años a 10%

20. $5000 durante 20 años a 11%

21. $7500 durante 10 años a 8.5%

22. $10 000 durante 25 años a 9.25%

23. $15 000 durante 10 años a 7.75%

24. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, a la décima porcentual más cercana, se necesita para que una inversión de $200 crezca a $350 en 5 años?

25. ¿Qué tasa de interés compuesto trimestral, a la décima porcentual más cercana, se necesita para que una inversión de $1500 crezca a $ 2700 en 10 años?

26. Encuentre la producción efectiva, a la décima porcentual más cercana, de una inversión a 7.5% de interés compuesto mensual.

27. Encuentre la producción efectiva, a la centésima porcentual más cercana, de una inversión a 7.75% de interés compuesto continuo.

28. ¿Qué inversión produce el mayor rendimiento: 7% de interés compuesto mensual u 6.85% de interés compuesto continuo?

29. ¿Qué inversión produce el mayor rendimiento: 8.25% de interés compuesto trimestral u 8.3% de interés compuesto semestral?

30. Suponga que cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 20 años. Si en la actualidad hay 2500 miligramos de la sustancia, ¿cuánto, al miligramo más cercano, permanece después de 40 años? ¿Después de 50 años?

31. El estroncio-90 tiene una vida media de 29 años. Si se tienen 400 gramos de estroncio 90, ¿cuánto, al gramo más cercano, permanecerá después de 87 años? ¿Después de 100 años?

32. La vida media del radio es aproximadamente de 1600 años. Si la cantidad actual de radio en cierta ubicación es de 500 gramos, ¿cuánto permanecerá después de 800 años? Exprese su respuesta al gramo más cercano.

33. Suponga, que en cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = 1000e^{0.4t}$ expresa el número de bacterias presentes como función del tiempo t, donde t se expresa en horas. ¿Cuántas bacterias hay al final de 2 horas?, ¿3 horas?, ¿5 horas?

34. El número de bacterias presentes en cierto momento bajo ciertas condiciones está dado por la ecuación $Q = 5000e^{0.05t}$, donde t se expresa en minutos. ¿Cuántas bacterias hay al final de 10 minutos?, ¿30 minutos?, ¿una hora?

35. El número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t horas está dado por la ecuación $Q = Q_0e^{0.3t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. Si después de 4 horas hay 6640 bacterias, ¿cuántas bacterias había al inicio?

36. El número de gramos Q de cierta sustancia radiactiva presente después de t segundos está dado por la ecuación $Q = 1500e^{-0.4t}$. ¿Cuántos gramos permanecen después de 5 segundos?, ¿de 10 segundos?, ¿de 20 segundos?

37. La presión atmosférica, medida en libras por pulgada cuadrada (psi) es una función de la altitud sobre el nivel del mar. La ecuación $P(a) = 14.7e^{-0.21a}$, en la cual a es la altitud medida en millas, se puede usar para aproximar la presión atmosférica. Encuentre la presión atmosférica en cada una de las siguientes ubicaciones:

(a) Monte McKinley en Alaska: altitud de 3.85 millas
(b) Denver, Colorado: la ciudad de una "milla de alto"
(c) Asheville, Carolina del Norte: altitud de 1985 pies
(d) Phoenix, Arizona: altitud de 1090 pies

38. Suponga que la población actual de una ciudad es de 75 000. Con la ecuación $P(t) = 75\,000e^{0.01t}$ para calcular el crecimiento futuro, estime la población (a) dentro de 10 años, (b) dentro de 15 años y (c) dentro de 25 años.

Para los problemas 39-44 grafique cada una de las funciones exponenciales.

39. $f(x) = e^x + 1$

40. $f(x) = e^x - 2$

41. $f(x) = 2e^x$

42. $f(x) = -e^x$

43. $f(x) = e^{2x}$

44. $f(x) = e^{-x}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

45. Explique la diferencia entre interés simple e interés compuesto.

46. ¿Sería mejor invertir $5000 a 6.25% de interés compuesto anual durante 5 años, o invertir $5000 a 6.25% de interés compuesto continuo durante 5 años? Explique su respuesta.

47. ¿Cómo explicaría el concepto de producción efectiva a alguien que faltó a clase cuando se estudió?

48. ¿Cómo explicaría la fórmula de vida media a alguien que faltó a clase cuando se estudió?

MÁS INVESTIGACIÓN

49. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 invertidos a varias tasas de interés durante diferentes periodos, pero siempre a interés compuesto continuo. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

$1000 de interés compuesto continuo

	8%	10%	12%	14%
5 años				
10 años				
15 años				
20 años				
25 años				

50. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 invertidos a 12% durante diferentes intervalos y distintos periodos compuestos. Redondee todas sus respuestas al dólar más cercano.

$1000 a 12%

	1 año	5 años	10 años	20 años
Compuesto anual				
Compuesto semestral				
Compuesto trimestral				
Compuesto mensual				
Compuesto continuo				

51. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 en 10 años, con base en diferentes tasas de interés y diferentes periodos compuestos. Redondee todas sus respuestas al dólar más cercano.

$1000 durante 10 años

	8%	10%	12%	14%
Compuesto anual				
Compuesto semestral				
Compuesto trimestral				
Compuesto mensual				
Compuesto continuo				

Para los problemas 52-56 grafique cada una de las funciones.

52. $f(x) = x(2^x)$

53. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

54. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

55. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

56. $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

57. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 52-56.

58. Grafique $f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = 3^x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Estas gráficas son consistentes con el análisis previo a la figura 10.7?

59. Grafique $f(x) = e^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de $f(x) = e^{x-4}$, $f(x) = e^{x-6}$ y $f(x) = e^{x+5}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = e^x$.

60. Grafique $f(x) = e^x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = -e^x$, $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = -e^{-x}$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes, con $f(x) = e^x$.

61. ¿Cómo cree que se compararán las gráficas de $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{2x}$ y $f(x) = 2e^x$? Grafíquelas sobre el mismo conjunto de ejes para ver si estuvo en lo correcto.

62. Encuentre una solución aproximada, a la centésima más cercana, para cada una de las siguientes ecuaciones, al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

(a) $e^x = 7$ **(b)** $e^x = 21$ **(c)** $e^x = 53$
(d) $2e^x = 60$ **(e)** $e^{x+1} = 150$ **(f)** $e^{x-2} = 300$

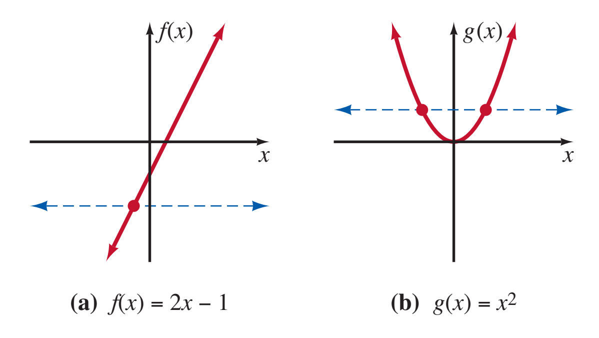
63. Use un enfoque de graficación para argumentar que es mejor invertir dinero a 6% de interés compuesto trimestral, que a 5.75% de interés compuesto continuo.

64. ¿Cuánto tardarán \$500 en valer \$1500, si se invierten a 7.5% de interés compuesto semestral?

65. ¿Cuánto tardarán \$5000 en triplicarse, si se invierten a 6.75% de interés compuesto trimestral?

10.3 Funciones inversas

Recuerde la prueba de recta vertical: si cada recta vertical interseca una gráfica en no más de un punto, entonces la gráfica representa una función. También existe una distinción útil entre dos tipos básicos de funciones. Considere las gráficas de las dos funciones en la figura 10.10: $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2$. En la figura 10.10(a), cualquier *recta horizontal* intersecará la gráfica en no más de un punto. Por tanto, cada valor de $f(x)$ tiene sólo un valor de x. Cualquier función que tenga esta propiedad de tener exactamente un valor de x asociado con cada valor de $f(x)$ se llama **función uno a uno**. Por tanto, $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno, porque la recta horizontal en la figura 10.10(b) interseca la parábola en dos puntos.



(a) $f(x) = 2x - 1$ **(b)** $g(x) = x^2$

Figura 10.10

La afirmación de que, para que una función f sea una función uno a uno, cada valor de $f(x)$ tiene sólo un valor x asociado, se puede enunciar de manera equivalente: si $f(x_1) = f(x_2)$ para x_1 y x_2 en el dominio de f, entonces $x_1 = x_2$. Use este último enunciado si-entonces para verificar que $f(x) = 2x - 1$ es una función uno a uno. Comience con la suposición de que $f(x_1) = f(x_2)$:

$$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$$
$$2x_1 = 2x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Por tanto, $f(x) = 2x - 1$ es una función uno a uno.

Para demostrar que $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno, simplemente necesita encontrar dos números reales distintos en el dominio de f que produzcan el mismo valor funcional. Por ejemplo, $g(-2) = (-2)^2 = 4$ y $g(2) = 2^2 = 4$. Por tanto, $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno.

Ahora considere una función uno a uno f que asigne a cada x en su dominio D el valor $f(x)$ en su rango R (figura 10.11(a)). Es posible definir una nueva función f que vaya de R a D; ella asigna $f(x)$ en R de vuelta a x en D, como se indica en la figura 10.11(b). Las funciones f y g se llaman **funciones inversas** una de otra. La siguiente definición enuncia con precisión este concepto.

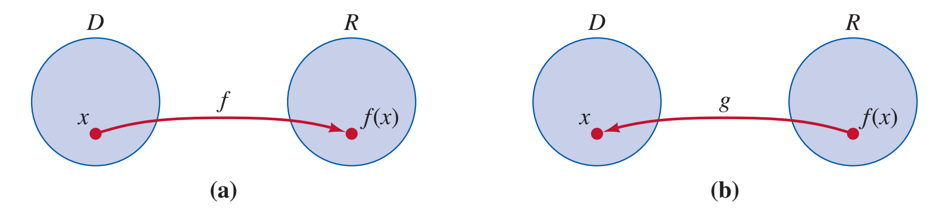


Figura 10.11

Definición 10.2

Sea f una función uno a uno con un dominio de X y un rango de Y. Una función g con dominio de Y y un rango de X se llama **función inversa** de f si

$$(f \circ g)(x) = x \text{ para toda } x \text{ en } Y$$

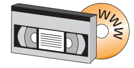
y

$$(g \circ f)(x) = x \text{ para toda } x \text{ en } X$$

En la definición 10.2 observe que, para que f y g sean inversas mutuas, el dominio de f debe ser igual al rango de g, y el rango de f debe ser igual al dominio de g. Más aún, g debe invertir las correspondencias dadas por f, y f debe invertir las correspondencias dadas por g. En otras palabras, las funciones inversas se *deshacen* mutuamente. Use la definición 10.2 para verificar que dos funciones específicas son inversas una de la otra.

EJEMPLO 1

Verifique que $f(x) = 4x - 5$ y $g(x) = \dfrac{x+5}{4}$ son funciones inversas.



Solución

Puesto que el conjunto de números reales es el dominio y el rango de ambas funciones, se sabe que el dominio de f es igual al rango de g y que el rango de f es igual al dominio de g. Más aún,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{x+5}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{x+5}{4}\right) - 5 = x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(4x - 5) \\ &= \frac{4x - 5 + 5}{4} = x\end{aligned}$$

Por tanto, f y g son inversas una de otra. ■

EJEMPLO 2

Verifique que $f(x) = x^2 + 1$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$ para $x \geq 1$ son funciones inversas.

Solución

Primero note que el dominio de f es igual al rango de g, a saber, el conjunto de los números reales no negativos. Además, el rango de f es igual al dominio de g, a saber, el conjunto de los números reales mayores que o iguales a 1. Más aún,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x - 1}) \\ &= (\sqrt{x - 1})^2 + 1 \\ &= x - 1 + 1 = x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 1) \\ &= \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{x^2} = x \text{ porque } x \geq 1\end{aligned}$$

En consecuencia, f y g son inversas una de la otra. ■

El inverso de una función f comúnmente se denota mediante f^{-1} (léase "f inversa" o "el inverso de f"). No confunda el −1 en f^{-1} con un exponente negativo. El símbolo f^{-1} *no* significa $1/f^1$, sino más bien se refiere a la función inversa de la función f.

Recuerde que una función también se puede considerar como un conjunto de pares ordenados sin que dos de ellos tengan el mismo primer elemento. En comparación, una función uno a uno requiere que dos de los pares ordenados tengan el mismo segundo elemento. Entonces, si se intercambian los componentes de cada par ordenado de una función uno a uno dada, la función resultante y la función dada son inversos mutuos. Por ende, si

$$f = \{(1, 4), (2, 7), (5, 9)\}$$

entonces

$$f^{-1} = \{(4, 1), (7, 2), (9, 5)\}$$

Gráficamente, dos funciones que son inversas mutuas son **imágenes especulares con referencia a la recta $y = x$**. Esto se debe a que los pares ordenados (a, b) y (b, a) son reflexiones uno de otro con respecto a la recta $y = x$, como se ilustra en la figura 10.12. (Usted verificará esto en el siguiente conjunto de ejercicios.) Por tanto, si se conoce la gráfica de una función f, como en la figura 10.13(a), entonces la gráfica de f^{-1} se puede determinar al reflejar f a través de la recta $y = x$, como en la figura 10.13(b).

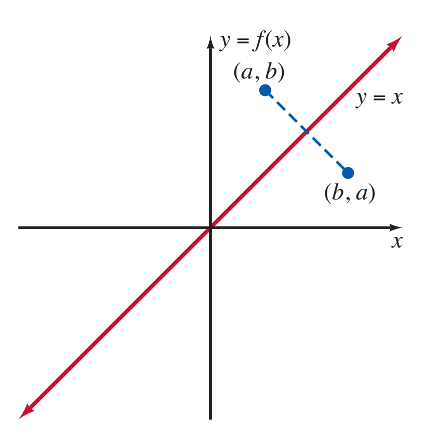


Figura 10.12

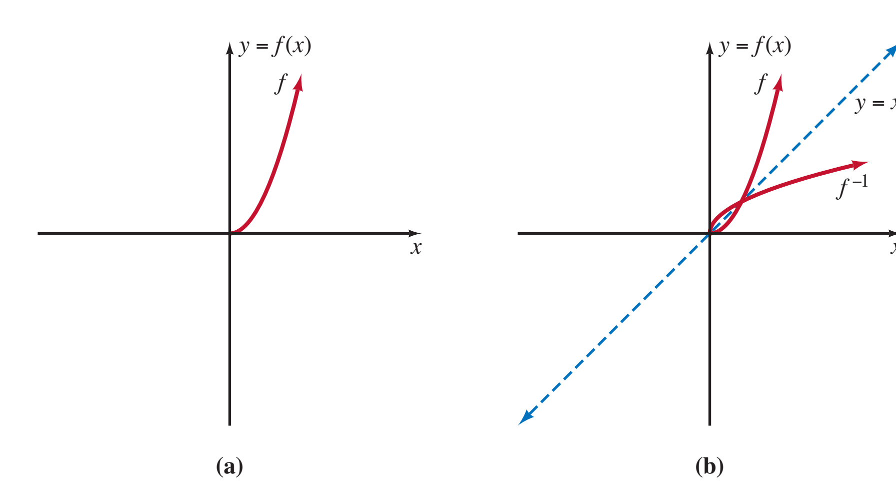


Figura 10.13

Cómo encontrar funciones inversas

La idea de las funciones inversas *que se deshacen mutuamente* proporciona la base para un método informal para encontrar el inverso de una función. Considere la función

$$f(x) = 2x + 1$$

Esta función asigna a cada x el doble de x más 1. Para deshacer esta función, reste 1 y divida entre 2. En consecuencia, la inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

Ahora verifique que f y f^{-1} de hecho son inversas una de otra:

$$\begin{aligned}(f\circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\ &= f\left(\frac{x-1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x-1}{2}\right)+1 \\ &= x-1+1 = x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(2x+1) \\ &= \frac{2x+1-1}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x\end{aligned}$$

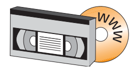
Por tanto, la inversa de $f(x) = 2x + 1$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

Este método informal puede no funcionar muy bien con funciones más complejas, pero sí enfatiza cómo se relacionan mutuamente las funciones inversas. Una técnica más formal y sistemática para encontrar la inversa de una función se describe del modo siguiente:

1. Sustituya el símbolo $f(x)$ con y.
2. Intercambie x y y.
3. Resuelva la ecuación para y en términos de x.
4. Sustituya y con el símbolo $f^{-1}(x)$.

Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica.

EJEMPLO 3 Encuentre la inversa de $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{5}$



Solución

Cuando sustituye $f(x)$ con y, la ecuación se convierte en $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{5}$. Al intercambiar x y y se produce $x = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{3}{5}$. Ahora, al resolver para y se obtiene

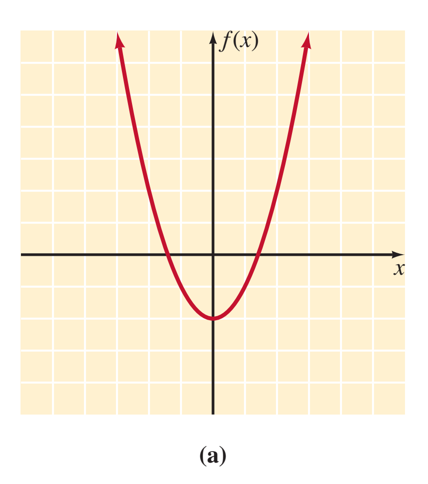
$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}y + \frac{3}{5} \\ 15(x) &= 15\left(\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}\right) \\ 15x &= 10y + 9 \\ 15x - 9 &= 10y \\ \frac{15x-9}{10} &= y \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir y con $f^{-1}(x)$ puede expresar la función inversa como

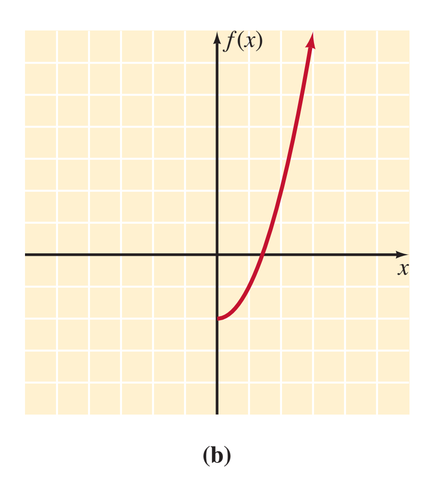
$$f^{-1}(x) = \frac{15x-9}{10}$$

El dominio de f es igual al rango de f^{-1} (ambos son el conjunto de los números reales) y el rango de f es igual al dominio de f^{-1} (ambos son el conjunto de los números reales). Más aún, podría demostrar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Esto se le deja como ejercicio. ■

¿La función $f(x) = x^2 - 2$ tiene una inversa? En ocasiones una gráfica de la función ayuda a responder tal pregunta. En la figura 10.14(a) debe ser evidente que f no es una función uno a uno y por tanto no puede tener una inversa. Sin embargo, también debe ser evidente a partir de la gráfica que, si el dominio de f se restringe a los números reales no negativos, figura 10.14(b), entonces es una función uno a uno y debe tener una función inversa. El siguiente ejemplo ilustra cómo encontrar la función inversa.



(a)



(b)

Figura 10.14

EJEMPLO 4

Encuentre la inversa de $f(x) = x^2 - 2$, donde $x \geq 0$

Solución

Cuando sustituye $f(x)$ con y, la ecuación se convierte en

$$y = x^2 - 2, \qquad x \geq 0$$

Al intercambiar x y y se produce

$$x = y^2 - 2, \qquad y \geq 0$$

Ahora resuelva para y; tenga en mente que y debe ser no negativa.

$$x = y^2 - 2$$

$$x + 2 = y^2$$

$$\sqrt{x + 2} = y, \qquad x \geq -2$$

Finalmente, al sustituir y con $f^{-1}(x)$ puede expresar la función inversa como

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}, \qquad x \geq -2$$

El dominio de f es igual al rango de f^{-1} (ambos son los números reales no negativos), y el rango de f es igual al dominio de f^{-1} (ambos son los números reales mayores que o iguales a -2). También se puede demostrar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. De nuevo, se deja como ejercicio. ■

Funciones crecientes y decrecientes

En la sección 10.1 se usaron funciones exponenciales como ejemplos de funciones crecientes y decrecientes. En realidad, una función puede ser tanto creciente como decreciente sobre ciertos intervalos. Por ejemplo, en la figura 10.15 se dice que la función es *creciente* en los intervalos $(-\infty, x_1]$ y $[x_2, \infty)$, y se dice que f es *decreciente* en el intervalo $[x_1, x_2]$. De manera más específica, las funciones crecientes y decrecientes suelen definirce del modo siguiente:

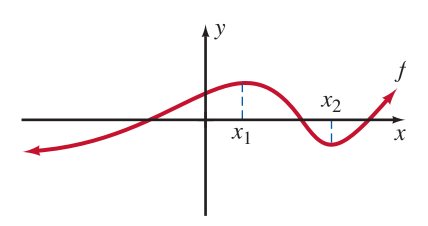


Figura 10.15

Definición 10.3

Sea f una función, con el intervalo I como subconjunto del dominio de f. Sea x_1 y x_2 en I. Entonces:

1. f es *creciente* en I si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

2. f es *decreciente* en I si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

3. f es *constante* en I si $f(x_1) = f(x_2)$, para toda x_1 y x_2.

Aplique la definición 10.3 y verá que la función cuadrática $f(x) = x^2$ que se muestra en la figura 10.16 es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. Del mismo modo, la función lineal $f(x) = 2x$ en la figura 10.17 es creciente a través de

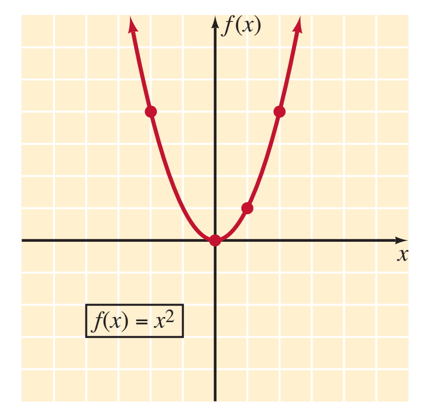


Figura 10.16

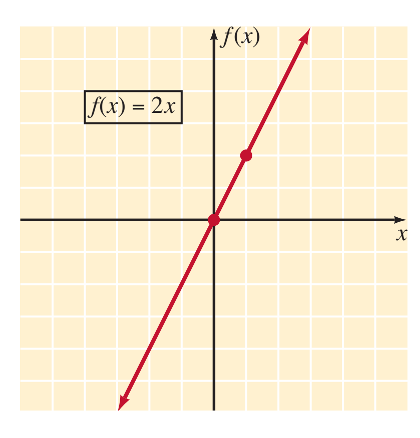


Figura 10.17

su dominio de los números reales, así que se dice que es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. La función $f(x) = -2x$ en la figura 10.18 es decreciente sobre $(-\infty, \infty)$. Para los propósitos de este texto se apoyará en sus conocimientos de las gráficas de las funciones para determinar dónde las funciones son crecientes y decrecientes. En cálculo desarrollará técnicas más formales para determinar dónde las funciones son crecientes y decrecientes.

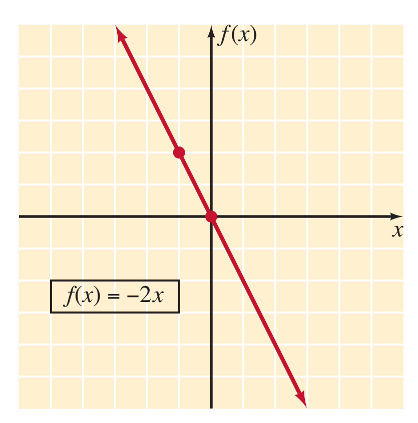


Figura 10.18

Una función que siempre es creciente (o siempre es decreciente) sobre todo su dominio es una función uno a uno y por tanto tiene una función inversa. Más aún, como se ilustra en el ejemplo 4, incluso si una función no es uno a uno sobre todo su dominio, puede serlo sobre algún subconjunto del dominio. Entonces tiene una función inversa sobre este dominio restringido. Conforme las funciones se vuelven más complejas, puede usar una herramienta de graficación para auxiliarse con problemas como los estudiados en esta sección. Por ejemplo, suponga que se quiere conocer si la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 4}$ es una función uno a uno y por tanto tiene una función inversa. Al usar una herramienta de graficación puede obtener rápidamente un bosquejo de la gráfica (figura 10.19). Entonces, si aplica la prueba de la recta horizontal a la gráfica, estará bastante seguro de que la función es uno a uno.

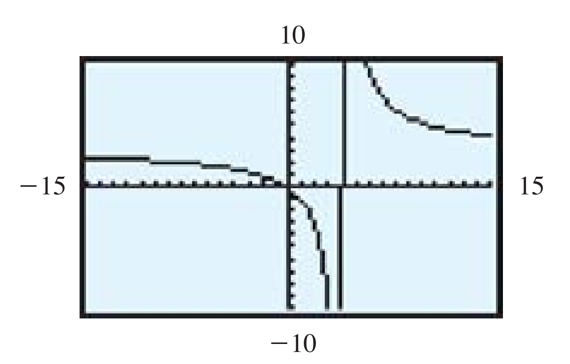


Figura 10.19

Puede usar una herramienta de graficación para determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. Por ejemplo, para determinar tales intervalos para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, use una herramienta de graficación para obtener un bosquejo de la curva (figura 10.20). A partir de esta gráfica se ve que la función es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y es creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

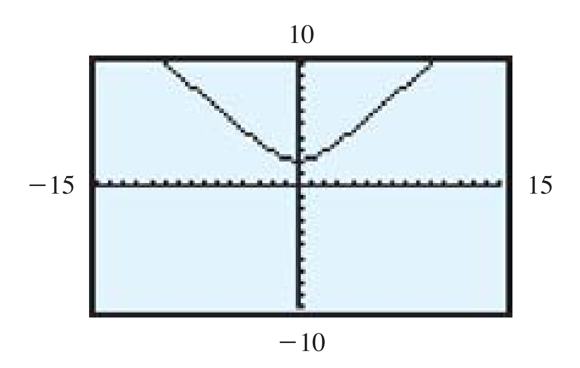


Figura 10.20

Conjunto de problemas 10.3

Para los problemas 1-6 determine si la gráfica representa una función uno a uno.

1.

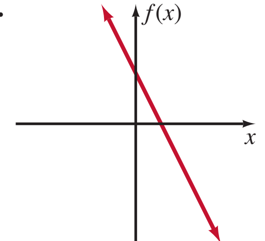


Figura 10.21

2.

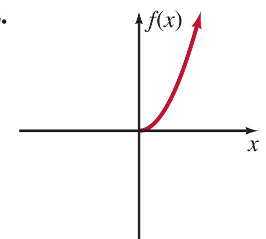


Figura 10.22

3.

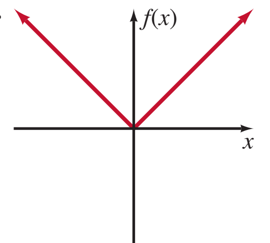


Figura 10.23

4.

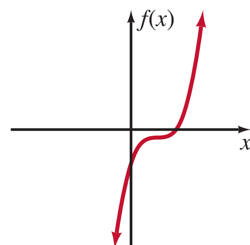


Figura 10.24

5.

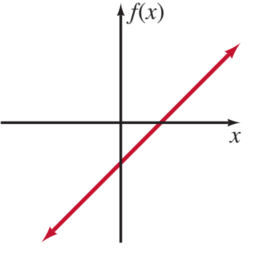


Figura 10.25

6.

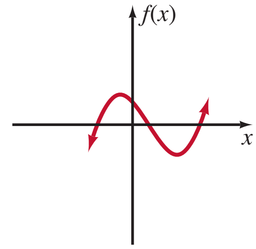
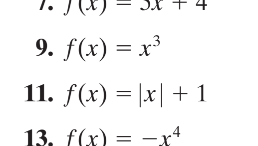


Figura 10.26

Para los problemas 7-14 determine si la función f es uno a uno.



7. $f(x) = 5x + 4$

8. $f(x) = -3x + 4$

9. $f(x) = x^3$

10. $f(x) = x^5 + 1$

11. $f(x) = |x| + 1$

12. $f(x) = -|x| - 2$

13. $f(x) = -x^4$

14. $f(x) = x^4 + 1$

Para los problemas 15-18, (a) mencione el dominio y el rango de la función, (b) forme la función inversa f^{-1} y (c) mencione el dominio y el rango de f^{-1}.

15. $f = \{(1, 5), (2, 9), (5, 21)\}$

16. $f = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$

17. $f = \{(0, 0), (2, 8), (-1, -1), (-2, -8)\}$

18. $f = \{(-1, 1), (-2, 4), (-3, 9), (-4, 16)\}$

Para los problemas 19-26 verifique que las dos funciones dadas son inversas una de la otra.

19. $f(x) = 5x - 9$ y $g(x) = \dfrac{x + 9}{5}$

20. $f(x) = -3x + 4$ y $g(x) = \dfrac{4 - x}{3}$

21. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{6}$ y $g(x) = -2x + \dfrac{5}{3}$

22. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para $x > 1$ y

$g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ para $x > 0$

24. $f(x) = x^2 + 2$ para $x \geq 0$ y

$g(x) = \sqrt{x - 2}$ para $x \geq 2$

25. $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ para $x \geq 2$ y

$g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2}$ para $x \geq 0$

26. $f(x) = x^2 - 4$ para $x \geq 0$ y

$g(x) = \sqrt{x + 4}$ para $x \geq -4$

Para los problemas 27-36 determine si f y g son funciones inversas.

27. $f(x) = 3x$ y $g(x) = -\dfrac{1}{3}x$

28. $f(x) = \dfrac{3}{4}x - 2$ y $g(x) = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$

29. $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

31. $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

32. $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{1}{3}$ y $g(x) = \dfrac{5}{3}x - 3$

33. $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$ y

$g(x) = \sqrt{x + 3}$ para $x \geq -3$

34. $f(x) = |x - 1|$ para $x \geq 1$ y

$g(x) = |x + 1|$ para $x \geq 0$

35. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = x^2 - 1$ para $x \geq 0$

36. $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

Para los problemas 37-50, (a) encuentre f^{-1} y (b) verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

37. $f(x) = x - 4$

38. $f(x) = 2x - 1$

39. $f(x) = -3x - 4$

40. $f(x) = -5x + 6$

41. $f(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{6}$

42. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}$

43. $f(x) = -\dfrac{2}{3}x$

44. $f(x) = \dfrac{4}{3}x$

45. $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$

47. $f(x) = x^2 + 4$ para $x \geq 0$

48. $f(x) = x^2 + 1$ para $x \leq 0$

49. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$

50. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ para $x > -1$

Para los problemas 51-58, (a) encuentre f^{-1} y (b) grafique f y f^{-1} sobre el mismo conjunto de ejes.

51. $f(x) = 3x$

52. $f(x) = -x$

53. $f(x) = 2x + 1$

54. $f(x) = -3x - 3$

55. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ para $x > 1$

56. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 2}$ para $x > 2$

57. $f(x) = x^2 - 4$ para $x \geq 0$

58. $f(x) = \sqrt{x - 3}$ para $x \geq 3$

63. $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$

64. $f(x) = x^2 - 2x + 6$

65. $f(x) = -2x^2 - 16x - 35$

66. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

Para los problemas 59-66 encuentre los intervalos sobre los cuales la función dada es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

59. $f(x) = x^2 + 1$

60. $f(x) = x^3$

61. $f(x) = -3x + 1$

62. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

67. ¿La función $f(x) = 4$ tiene inversa? Explique su respuesta.

68. Explique por qué toda función lineal no constante tiene una inversa.

69. ¿Las funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$ son inversas una de la otra? Explique su respuesta.

70. ¿Qué quiere decir que 2 y −2 son inversos aditivos uno de otro? ¿Qué quiere decir que 2 y $\frac{1}{2}$ son inversos multiplicativos uno de otro? ¿Qué quiere decir que las funciones $f(x) = x - 2$ y $f(x) = x + 2$ son inversas una de otra? ¿Cree que el concepto de "inverso" se usa en forma consistente? Explique su respuesta.

MÁS INVESTIGACIÓN

71. La notación de función y la operación de composición se pueden usar para encontrar inversos del modo siguiente: Para encontrar la inversa de $f(x) = 5x + 3$ se sabe que $f(f^{-1}(x))$ debe producir x. Por tanto

$$f(f^{-1}(x)) = 5[f^{-1}(x)] + 3 = x$$

$$5[f^{-1}(x)] = x - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}$$

Use este enfoque para encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x - 9$
(b) $f(x) = -2x + 6$
(c) $f(x) = -x + 1$
(d) $f(x) = 2x$
(e) $f(x) = -5x$
(f) $f(x) = x^2 + 6$ para $x \geq 0$

72. Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x - 5$, encuentre

(a) $(f \circ g)^{-1}(x)$
(b) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
(c) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

73. Para los problemas 37-44 grafique la función dada, la función inversa que encontró y $f(x) = x$ sobre el mismo conjunto de ejes. En cada caso, la función dada y su inversa deben producir gráficas que sean reflexiones una de otra a través de la recta $f(x) = x$.

74. Hay otra forma en que puede usar la calculadora graficadora para demostrar que dos funciones son inversas mutuas. Suponga que quiere demostrar que $f(x) = x^2 - 2$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$ para $x \geq -2$ son mutuamente inversas. Haga las siguientes asignaciones para la calculadora graficadora.

f: $Y_1 = x^2 - 2$

g: $Y_2 = \sqrt{x+2}$

$f \circ g$: $Y_3 = (Y_2)^2 - 2$

$g \circ f$: $Y_4 = \sqrt{Y_1 + 2}$

Ahora puede proceder del modo siguiente:

1. Grafique $Y_1 = x^2 - 2$ y note que, para $x > 0$, el rango es mayor que o igual a -2.

2. Grafique $Y_2 = \sqrt{x+2}$ y note que, para $x \geq -2$, el rango es mayor que o igual a 0.

Por tanto, el dominio de f es igual al rango de g, y el rango de f es igual al dominio de g.

3. Grafique $y_3 = (y_2)^2 - 2$ para $x \geq -2$, y observe la recta $y = x$ para $x \geq -2$.

4. Grafique $Y_4 = \sqrt{Y_1 + 2}$ para $x \geq 0$, y observe la recta $y = x$ para $x \geq 0$.

Por tanto, $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, y las dos funciones son mutuamente inversas.

Use este método para comprobar sus respuestas a los problemas 45-50.

75. Use la técnica demostrada en el problema 74 para demostrar que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

y

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para } -1 < x < 1$$

son mutuamente inversas.

10.4 Logaritmos

En las secciones 10.1 y 10.2 se estudiaron expresiones exponenciales de la forma b^n, donde b es cualquier número real positivo y n es cualquier número real; se usaron expresiones exponenciales de la forma b^n para definir funciones exponenciales y se usaron funciones exponenciales para ayudar a resolver problemas. En las siguientes tres secciones se seguirá el mismo patrón básico con respecto a un nuevo concepto: logaritmos. Comience con la siguiente definición:

Definición 10.4

Si r es cualquier número real positivo, entonces el único exponente t tal que $b^t = r$ se llama **logaritmo de r con base b** y se denota como $\log_b r$.

De acuerdo con la definición 10.4, el logaritmo de 16 base 2 es el exponente t tal que $2^t = 16$; por tanto, puede escribir $\log_2 16 = 4$. Del mismo modo, puede escribir $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$. En general, puede recordar la definición 10.4 mediante el enunciado

$$\log_b r = t \quad \text{es equivalente a} \quad b^t = r$$

Por tanto, puede cambiar fácilmente de ida y vuelta entre formas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, como ilustran los siguientes ejemplos.

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{es equivalente a} \quad 2^3 = 8$$
$$\log_{10} 100 = 2 \quad \text{es equivalente a} \quad 10^2 = 100$$
$$\log_3 81 = 4 \quad \text{es equivalente a} \quad 3^4 = 81$$
$$\log_{10} 0.001 = -3 \quad \text{es equivalente a} \quad 10^{-3} = 0.001$$
$$\log_m n = p \quad \text{es equivalente a} \quad m^p = n$$

$$2^7 = 128 \quad \text{es equivalente a} \quad \log_2 128 = 7$$
$$5^3 = 125 \quad \text{es equivalente a} \quad \log_5 125 = 3$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \text{es equivalente a} \quad \log_{1/2}\left(\frac{1}{16}\right) = 4$$
$$10^{-2} = 0.01 \quad \text{es equivalente a} \quad \log_{10} 0.01 = -2$$
$$a^b = c \quad \text{es equivalente a} \quad \log_a c = b$$

Algunos logaritmos se pueden determinar al cambiar a forma exponencial y usar las propiedades de los exponentes, como ilustran los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Evalúe $\log_{10} 0.0001$

Solución

Sea $\log_{10} 0.0001 = x$. Entonces, al cambiar a forma exponencial, se tiene $10^x = 0.0001$, que se puede resolver del modo siguiente:

$$10^x = 0.0001$$
$$10^x = 10^{-4} \qquad 0.0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$
$$x = -4$$

Por tanto, se tiene $\log_{10} 0.0001 = -4$. ■

EJEMPLO 2

Evalúe $\log_9\left(\frac{\sqrt[5]{27}}{3}\right)$

Solución

Sea $\log_9\left(\frac{\sqrt[5]{27}}{3}\right) = x$. Entonces, al cambiar a forma exponencial, se tiene $9^x = \frac{\sqrt[5]{27}}{3}$, que se puede resolver del modo siguiente:

$$9^x = \frac{(27)^{1/5}}{3}$$

$$(3^2)^x = \frac{(3^3)^{1/5}}{3}$$

$$3^{2x} = \frac{3^{3/5}}{3}$$

$$3^{2x} = 3^{-2/5}$$

$$2x = -\frac{2}{5}$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Por tanto, se tiene $\log_9\left(\frac{\sqrt[5]{27}}{3}\right) = -\frac{1}{5}$.

Algunas ecuaciones que implican logaritmos también se pueden resolver al cambiar a forma exponencial y usar sus conocimientos de los exponentes.

EJEMPLO 3

Resuelva $\log_8 x = \frac{2}{3}$

Solución

Al cambiar $\log_8 x = \frac{2}{3}$ a forma exponencial se obtiene

$$8^{2/3} = x$$

Por tanto

$$x = (\sqrt[3]{8})^2$$
$$= 2^2$$
$$= 4$$

El conjunto solución es {4}. ■

EJEMPLO 4

Resuelva $\log_b\left(\frac{27}{64}\right) = 3$

Solución

Cambie $\log_b\left(\frac{27}{64}\right) = 3$ a forma exponencial para obtener

$$b^3 = \frac{27}{64}$$

Por tanto,

$$b = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$$
$$= \frac{3}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Propiedades de los logaritmos

Existen algunas propiedades de los logaritmos que son consecuencia directa de la definición 10.2 y de las propiedades de los exponentes. Por ejemplo, la siguiente propiedad se obtiene al escribir las ecuaciones exponenciales $b^1 = b$ y $b^0 = 1$ en forma logarítmica.

Propiedad 10.3

Para $b > 0$ y $b \neq 1$,

$$\log_b b = 1 \qquad \text{y} \qquad \log_b 1 = 0$$

Por tanto, de acuerdo con la propiedad 10.3, puede escribir

$$\log_{10} 10 = 1 \qquad \log_4 4 = 1$$
$$\log_{10} 1 = 0 \qquad \log_5 1 = 0$$

Además, a partir de la definición 10.2, se sabe que $\log_b r$ es el exponente t tal que $b^t = r$. Por tanto, elevar b a la potencia $\log_b r$ debe producir r. Este hecho se enuncia en la propiedad 10.4.

Propiedad 10.4

Para $b > 0$, $b \neq 1$ y $r > 0$,

$$b^{\log_b r} = r$$

Por tanto, de acuerdo con la propiedad 10.4, se puede escribir

$$10^{\log_{10} 72} = 72 \qquad 3^{\log_3 85} = 85 \qquad e^{\log_e 7} = 7$$

Puesto que un logaritmo es, por definición, un exponente, parece razonable predecir que algunas propiedades de los logaritmos corresponden a las propiedades exponenciales básicas. Es una predicción precisa; dichas propiedades sirven como base para el trabajo de cálculo con logaritmos. A continuación se establece la primera de estas propiedades y se muestra cómo puede usar su conocimiento de los exponentes para verificarla.

Propiedad 10.5

Para números positivos b, r y s, donde $b \neq 1$,

$$\log_b rs = \log_b r + \log_b s$$

Para verificar la propiedad 10.5 puede proceder del modo siguiente. Sean $m = \log_b r$ y $n = \log_b s$. Cambie cada una de estas ecuaciones a forma exponencial:

$m = \log_b r$ se convierte en $r = b^m$

$n = \log_b s$ se convierte en $s = b^n$

Por tanto, el producto rs se convierte en

$$rs = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Ahora, al cambiar $rs = b^{m+n}$ de vuelta a forma logarítmica, se obtiene

$$\log_b rs = m + n$$

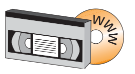
Sustituya m con $\log_b r$ y sustituya n con $\log_b s$ para producir

$$\log_b rs = \log_b r + \log_b s$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de la propiedad 10.5.

EJEMPLO 5

Si $\log_2 5 = 2.3222$ y $\log_2 3 = 1.5850$, evalúe $\log_2 15$



Solución

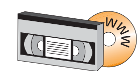
Puesto que $15 = 5 \cdot 3$ puede aplicar la propiedad 10.5 del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\log_2 15 &= \log_2(5 \cdot 3)\\ &= \log_2 5 + \log_2 3\\ &= 2.3222 + 1.5850\\ &= 3.9072\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

Dado que $\log_{10} 178 = 2.2504$ y $\log_{10} 89 = 1.9494$, evalúe $\log_{10} (178 \cdot 89)$.



Solución

$$\begin{aligned}\log_{10}(178 \cdot 89) &= \log_{10} 178 + \log_{10} 89 \\ &= 2.2504 + 1.9494 \\ &= 4.1998\end{aligned}$$

■

Puesto que $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ se esperaría una propiedad correspondiente que pertenezca a los logaritmos. La propiedad 10.6 es dicha propiedad. Puede verificarla con un método similar al utilizado para revisar la propiedad 10.5. Esta verificación se deja como ejercicio en el siguiente conjunto de problemas.

Propiedad 10.6

Para números positivos b, r y s, donde $b \neq 1$,

$$\log_b\left(\frac{r}{s}\right) = \log_b r - \log_b s$$

Puede usar la propiedad 10.6 para cambiar un problema de división en un problema equivalente de sustracción, como ilustran los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 7

Si $\log_5 36 = 2.2265$ y $\log_5 4 = 0.8614$, evalúe $\log_5 9$

Solución

Puesto que $9 = \frac{36}{4}$ puede usar la propiedad 10.6 del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\log_5 9 &= \log_5\left(\frac{36}{4}\right) \\ &= \log_5 36 - \log_5 4 \\ &= 2.2265 - 0.8614 \\ &= 1.3651\end{aligned}$$

EJEMPLO 8

Evalúe $\log_{10}\left(\frac{379}{86}\right)$ =dado que $\log_{10} 379 = 2.5786$ y $\log_{10} 86 = 1.9345$.

Solución

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{379}{86}\right) &= \log_{10} 379 - \log_{10} 86 \\ &= 2.5786 - 1.9345 \\ &= 0.6441\end{aligned}$$

■

Otra propiedad de los exponentes afirma que $(b^n)^m = b^{mn}$. La propiedad correspondiente de los logaritmos se enuncia en la propiedad 10.7. De nuevo, la verificación de esta propiedad se deja como ejercicio en el siguiente conjunto de problemas.

Propiedad 10.7

Si r es un número real positivo, b es un número real positivo distinto a 1 y p es cualquier número real, entonces

$$\log_b r^p = p(\log_b r)$$

En los siguientes dos ejemplos se usará la propiedad 10.7.

EJEMPLO 9

Evalúe $\log_2 22^{1/3}$ dado que $\log_2 22 = 4.4598$

Solución

$$\log_2 22^{1/3} = \frac{1}{3}\log_2 22 \qquad \text{Propiedad 10.7}$$

$$= \frac{1}{3}(4.4598)$$

$$= 1.4866$$

■

EJEMPLO 10

Evalúe $\log_{10}(8540)^{3/5}$ dado que $\log_{10} 8540 = 3.9315$

Solución

$$\log_{10}(8540)^{3/5} = \frac{3}{5}\log_{10} 8540$$

$$= \frac{3}{5}(3.9315)$$

$$= 2.3589$$

■

En conjunto, las propiedades de los logaritmos permiten cambiar las formas de varias expresiones logarítmicas. Por ejemplo, puede escribir una expresión como $\log_b\sqrt{\frac{xy}{z}}$ en términos de sumas y diferencias de cantidades logarítmicas más simples, del modo siguiente:

$$\log_b\sqrt{\frac{xy}{z}} = \log_b\left(\frac{xy}{z}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\log_b\left(\frac{xy}{z}\right) \qquad \text{Propiedad 10.7}$$

$$= \frac{1}{2}(\log_b xy - \log_b z) \qquad \text{Propiedad 10.6}$$

$$= \frac{1}{2}(\log_b x + \log_b y - \log_b z) \qquad \text{Propiedad 10.5}$$

En ocasiones es necesario cambiar de una suma o diferencia indicada de cantidades logarítmicas, a un producto o cociente indicado. Esto es especialmente útil cuando se resuelven ciertos tipos de ecuaciones que involucran logaritmos. Note en los dos ejemplos siguientes, cómo puede usar las propiedades, junto con el proceso de cambiar de forma logarítmica a modo exponencial, para resolver algunas ecuaciones.

EJEMPLO 11 Resuelva $\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$

Solución

$$\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$$

$$\log_{10}[x(x + 9)] = 1 \qquad \text{Propiedad 10.5}$$

$$10^1 = x(x + 9) \qquad \text{Cambio a forma exponencial.}$$

$$10 = x^2 + 9x$$

$$0 = x^2 + 9x - 10$$

$$0 = (x + 10)(x - 1)$$

$$x + 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -10 \quad \text{o} \quad x = 1$$

Los logaritmos se definen sólo para números positivos, de modo que x y $x + 9$ tienen que ser positivos. Por tanto, desea descartar la solución de –10. El conjunto solución es {1}. ■

EJEMPLO 12 Resuelva $\log_5(x + 4) - \log_5 x = 2$

Solución

$$\log_5(x + 4) - \log_5 x = 2$$

$$\log_5\left(\frac{x + 4}{x}\right) = 2 \qquad \text{Propiedad 10.6}$$

$$5^2 = \frac{x + 4}{x} \qquad \text{Cambio a forma exponencial.}$$

$$25 = \frac{x + 4}{x}$$

$$25x = x + 4$$

$$24x = 4$$

$$x = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{6}\right\}$. ■

Puesto que los logaritmos sólo se definen para números positivos debe darse cuenta de que algunas ecuaciones logarítmicas pueden no tener solución alguna. (En estos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.) También es posible que una ecuación logarítmica tenga una solución negativa, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 13

Resuelva $\log_2 3 + \log_2(x + 4) = 3$

Solución

$$\log_2 3 + \log_2(x + 4) = 3$$

$$\log_2 3(x + 4) = 3 \quad \text{Propiedad 10.5}$$

$$3(x + 4) = 2^3 \quad \text{Cambio a forma exponencial.}$$

$$3x + 12 = 8$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

La única restricción es que $x + 4 > 0$ o $x > -4$. Por tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. Quizá deba comprobar esta respuesta. ■

Conjunto de problemas 10.4

Para los problemas 1-10 escriba cada enunciado exponencial en forma logarítmica. Por ejemplo, $2^5 = 32$ se convierte en $\log_2 32 = 5$ en forma logarítmica.

1. $2^7 = 128$ **2.** $3^3 = 27$

3. $5^3 = 125$ **4.** $2^6 = 64$

5. $10^3 = 1000$ **6.** $10^1 = 10$

7. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ **8.** $3^{-4} = \frac{1}{81}$

9. $10^{-1} = 0.1$ **10.** $10^{-2} = 0.01$

Para los problemas 11-20 escriba cada enunciado logarítmico en forma exponencial. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ se convierte en $2^3 = 8$ en forma exponencial.

11. $\log_3 81 = 4$ **12.** $\log_2 256 = 8$

13. $\log_4 64 = 3$ **14.** $\log_5 25 = 2$

15. $\log_{10} 10\,000 = 4$ **16.** $\log_{10} 100\,000 = 5$

17. $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4$ **18.** $\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$

19. $\log_{10} 0.001 = -3$ **20.** $\log_{10} 0.000001 = -6$

Para los problemas 21-40 evalúe cada expresión logarítmica.

21. $\log_2 16$ **22.** $\log_3 9$

23. $\log_3 81$ **24.** $\log_2 512$

25. $\log_6 216$ **26.** $\log_4 256$

27. $\log_7 \sqrt{7}$ **28.** $\log_2 \sqrt[3]{2}$

29. $\log_{10} 1$ **30.** $\log_{10} 10$

31. $\log_{10} 0.1$ **32.** $\log_{10} 0.0001$

33. $10^{\log_{10} 5}$ **34.** $10^{\log_{10} 14}$

35. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

36. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$

37. $\log_5(\log_2 32)$

38. $\log_2(\log_4 16)$

39. $\log_{10}(\log_7 7)$

40. $\log_2(\log_5 5)$

Para los problemas 41-50 resuelva cada ecuación.

41. $\log_7 x = 2$

42. $\log_2 x = 5$

43. $\log_8 x = \frac{4}{3}$

44. $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

45. $\log_9 x = \frac{3}{2}$

46. $\log_8 x = -\frac{2}{3}$

47. $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

48. $\log_9 x = -\frac{5}{2}$

49. $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

50. $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

Para los problemas 51-59, dado que $\log_2 5 = 2.3219$ y $\log_2 7 = 2.8074$, evalúe cada expresión usando las propiedades 10.5-10.7.

51. $\log_2 35$

52. $\log_2\left(\frac{7}{5}\right)$

53. $\log_2 125$

54. $\log_2 49$

55. $\log_2 \sqrt{7}$

56. $\log_2 \sqrt[3]{5}$

57. $\log_2 175$

58. $\log_2 56$

59. $\log_2 80$

Para los problemas 60-68, dado que $\log_8 5 = 0.7740$ y $\log_8 11 = 1.1531$, evalúe cada expresión usando las propiedades 10.5-10.7.

60. $\log_8 55$

61. $\log_8\left(\frac{5}{11}\right)$

62. $\log_8 25$

63. $\log_8 \sqrt{11}$

64. $\log_8 (5)^{2/3}$

65. $\log_8 88$

66. $\log_8 320$

67. $\log_8\left(\frac{25}{11}\right)$

68. $\log_8\left(\frac{121}{25}\right)$

Para los problemas 69-80 exprese cada una de las siguientes expresiones como la suma o diferencia de cantidades logarítmicas más simples. Suponga que todas las variables representan números reales positivos. Por ejemplo,

$$\log_b \frac{x^3}{y^2} = \log_b x^3 - \log_b y^2$$
$$= 3\log_b x - 2\log_b y$$

69. $\log_b xyz$

70. $\log_b 5x$

71. $\log_b\left(\frac{y}{z}\right)$

72. $\log_b\left(\frac{x^2}{y}\right)$

73. $\log_b y^3z^4$

74. $\log_b x^2y^3$

75. $\log_b\left(\frac{x^{1/2}y^{1/3}}{z^4}\right)$

76. $\log_b x^{2/3}y^{3/4}$

77. $\log_b \sqrt[3]{x^2z}$

78. $\log_b \sqrt{xy}$

79. $\log_b\left(x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

80. $\log_b \sqrt{\frac{x}{y}}$

Para los problemas 81-88 exprese cada una de las siguientes expresiones como un solo logaritmo. (Suponga que todas las variables representan números reales positivos.) Por ejemplo,

$$3\log_b x + 5\log_b y = \log_b x^3y^5$$

81. $2\log_b x - 4\log_b y$

82. $\log_b x + \log_b y - \log_b z$

83. $\log_b x - (\log_b y - \log_b z)$

84. $(\log_b x - \log_b y) - \log_b z$

85. $2\log_b x + 4\log_b y - 3\log_b z$

86. $\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y$

87. $\frac{1}{2}\log_b x - \log_b x + 4\log_b y$

88. $2\log_b x + \frac{1}{2}\log_b(x-1) - 4\log_b(2x+5)$

Para los problemas 89-106 resuelva cada ecuación.

89. $\log_3 x + \log_3 4 = 2$

90. $\log_7 5 + \log_7 x = 1$

91. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 21) = 2$

92. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 3) = 1$

93. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

94. $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$

95. $\log_3(x + 3) + \log_3(x + 5) = 1$

96. $\log_2(x + 2) = 1 - \log_2(x + 3)$

97. $\log_2 3 + \log_2(x + 4) = 3$

98. $\log_4 7 + \log_4(x + 3) = 2$

99. $\log_{10}(2x - 1) - \log_{10}(x - 2) = 1$

100. $\log_{10}(9x - 2) = 1 + \log_{10}(x - 4)$

101. $\log_5(3x - 2) = 1 + \log_5(x - 4)$

102. $\log_6 x + \log_6(x + 5) = 2$

103. $\log_2(x - 1) - \log_2(x + 3) = 2$

104. $\log_5 x = \log_5(x + 2) + 1$

105. $\log_8(x + 7) + \log_8 x = 1$

106. $\log_6(x + 1) + \log_6 (x - 4) = 2$

107. Verifique la propiedad 10.6.

108. Verifique la propiedad 10.7.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

109. Explique, sin usar la propiedad 10.4, por qué $4^{\log_4 9}$ es igual a 9.

110. ¿Cómo explicaría el concepto de logaritmo a alguien que acaba de completar un curso de álgebra elemental?

111. En la siguiente sección se demostrará que la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$ es la inversa de la función exponencial $f(x) = 2^x$. A partir de esta información, ¿cómo podría bosquejar una gráfica de $f(x) = \log_2 x$?

10.5 Funciones logarítmicas

Ahora se puede usar el concepto de logaritmo para definir una función logarítmica del modo siguiente:

Definición 10.5

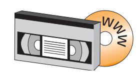
Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función definida por

$$f(x) = \log_b x$$

donde x es cualquier número real positivo, se llama **función logarítmica con base *b***.

Es posible obtener la gráfica de una función logarítmica específica de varias formas. Por ejemplo, la ecuación $y = \log_2 x$ se puede cambiar a la ecuación exponencial $2^y = x$, con lo que se determina una tabla de valores. El siguiente conjunto de ejercicios le pide usar este enfoque para graficar algunas funciones logarítmicas. Elabore una tabla de valores directamente a partir de la ecuación logarítmica y bosqueje la gráfica a partir de la tabla. El ejemplo 1 ilustra este enfoque.

EJEMPLO 1 Grafique $f(x) = \log_2 x$



Solución

Elija algunos valores para x con los que determine fácilmente los correspondientes valores para $\log_2 x$. (Recuerde que los logaritmos se definen solamente para los números reales positivos.)

x	$f(x)$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

$\text{Log}_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

$\text{Log}_2 1 = 0$ porque $2^0 = 1$.

Grafique estos puntos y conéctelos con una curva continua para producir la figura 10.27.

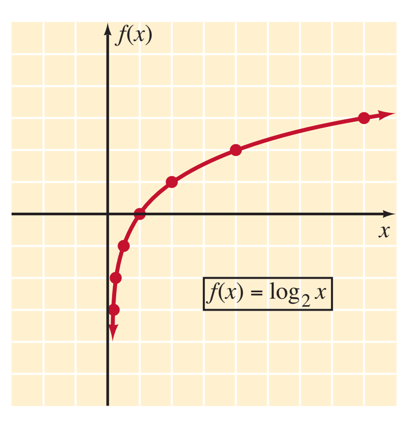


Figura 10.27 ■

Ahora suponga que considera dos funciones f y g tales que:

$f(x) = b^x$ Dominio: todos los números reales
Rango: números reales positivos

$g(x) = \log_b x$ Dominio: números reales positivos
Rango: todos los números reales

Más aún, suponga que considera la composición de f y g y la composición de g y f.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_b x) = b^{\log_b x} = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b^x) = \log_b b^x = x \log_b b = x(1) = x$$

Puesto que el dominio de f es el rango de g, el rango de f es el dominio de g, $f(g(x)) = x$, y $g(f(x)) = x$, las dos funciones f y g son *inversas* una de otra.

Recuerde que la gráfica de una función y la gráfica de su inversa son reflexiones mutuos a través de la recta $y = x$. Por tanto, puede determinar la gráfica de una función logarítmica al reflejar la gráfica de su función exponencial inversa a través de la recta $y = x$. Esta idea se demuestra en la figura 10.28, donde la gráfica de $y = 2^x$ se reflejó a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica de $y = \log_2 x$.

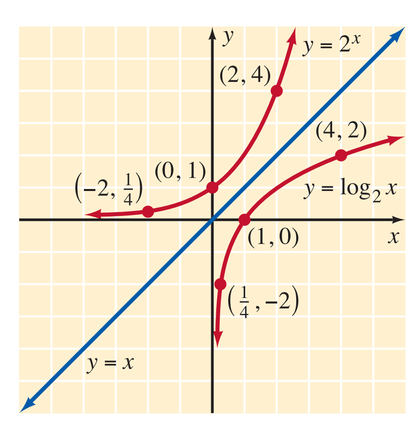


Figura 10.28

Los patrones de comportamiento general de las funciones exponenciales se ilustraron en la figura 10.3. Ahora puede reflejar cada una de estas gráficas a través de la recta $y = x$ y observar los patrones de comportamiento general de las funciones logarítmicas, que se muestran en la figura 10.29.

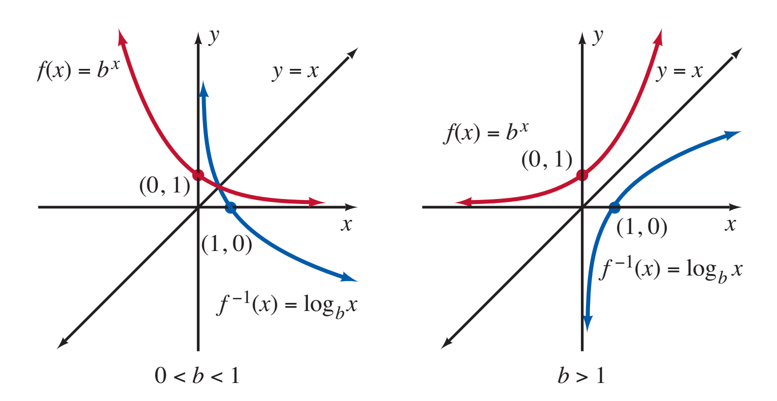


Figura 10.29

Conforme grafique funciones logarítmicas, no olvide las transformaciones de las curvas básicas.

1. La gráfica de $f(x) = 3 + \log_2 x$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ subida tres unidades. (Dado que $\log_2 x + 3$ se confunde con $\log_2(x + 3)$, por lo general se escribe $3 + \log_2 x$.)

2. La gráfica de $f(x) = \log_2(x - 4)$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ movida cuatro unidades a la derecha.

3. La gráfica de $f(x) = -\log_2 x$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ reflejada a través del eje x.

Logaritmos comunes: base 10

Las propiedades de los logaritmos estudiadas en la sección 10.4 son verdaderas para cualquier base válida. Sin embargo, dado que el sistema de numeración indoarábigo que se utiliza es un sistema de base 10, históricamente se han utilizado los logaritmos de base 10 con propósitos de cálculo. Los logaritmos de base 10 se conocen como **logaritmos comunes**.

Originalmente, los logaritmos comunes se desarrollaron para auxiliarse en cálculos numéricos complicados que implican productos, cocientes y potencias de números reales. En la actualidad rara vez se usan para dicho propósito, pues las calculadoras y las computadoras pueden manejar de manera mucho más efectiva los complicados problemas computacionales. Sn embargo, los logaritmos comunes todavía se usan en aplicaciones, así que merecen su atención.

Como sabe, a partir del trabajo anterior, la definición de un logaritmo proporciona la base para evaluar $\log_{10} x$ para valores de x que son potencias enteras de 10. Considere los siguientes ejemplos:

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \text{ya que } 10^3 = 1000$$

$$\log_{10} 100 = 2 \quad \text{ya que } 10^2 = 100$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \text{ya que } 10^1 = 10$$

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \text{ya que } 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 0.1 = -1 \quad \text{ya que } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\log_{10} 0.01 = -2 \quad \text{ya que } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

$$\log_{10} 0.001 = -3 \quad \text{ya que } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

Cuando se trabaja casi exclusivamente con logaritmos base 10, se acostumbra omitir la escritura del numeral 10 para designar la base. Por ende, la expresión $\log_{10} x$ se escribe como $\log x$, y un enunciado como $\log_{10} 1000 = 3$ se convierte en $\log 1000 = 3$. A partir de ahora, en este capítulo se seguirá esta práctica, pero no olvide que se sobreentiende que la base es 10.

$$\log_{10} x = \log x$$

Para encontrar el logaritmo común de un número positivo que no es una potencia entera de 10, puede usar una calculadora equipada de manera adecuada.

Una calculadora que tenga una función de logaritmo común (usualmente se usa una tecla marcada [log]) le proporciona los siguientes resultados redondeados a cuatro lugares decimales:

$\log 1.75 = 0.2430$

$\log 23.8 = 1.3766$ Asegúrese de que puede usar una calculadora y obtener estos resultados.

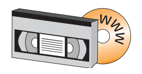
$\log 134 = 2.1271$

$\log 0.192 = -0.7167$

$\log 0.0246 = -1.6091$

Con la finalidad de usar logaritmos para resolver problemas, en ocasiones se requiere determinar un número cuando se conoce el logaritmo del número. Es decir: tal vez necesite determinar x si conoce $\log x$. Considere un ejemplo.

EJEMPLO 2 Encuentre x si $x = 0.2430$



Solución

Si $\log x = 0.2430$, entonces, al cambiar a forma exponencial, se tiene $10^{0.2430} = x$. Use la tecla [10^x] para encontrar x:

$x = 10^{0.2430} \approx 1.749846689$

Por tanto, $x = 1.7498$ redondeado a cinco dígitos significativos. ■

Asegúrese que puede usar su calculadora y obtener los siguientes resultados. Los valores de x se redondearon a cinco dígitos significativos.

Si $\log x = 0.7629$, entonces $x = 10^{0.7629} = 5.7930$
Si $\log x = 1.4825$, entonces $x = 10^{1.4825} = 30.374$
Si $\log x = 4.0214$, entonces $x = 10^{4.0214} = 10\,505$
Si $\log x = -1.5162$, entonces $x = 10^{-1.5162} = 0.030465$
Si $\log x = -3.8921$, entonces $x = 10^{-3.8921} = 0.00012820$

La **función logarítmica común** se define con la ecuación $f(x) = \log x$. Ahora debe ser asunto simple elaborar una tabla de valores y bosquejar la función. Hará esto en el siguiente conjunto de ejercicios. Recuerde que $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$ son mutuamente inversas. En consecuencia, también podría obtener la gráfica de $g(x) = \log x$ mediante reflejo de la curva exponencial $f(x) = 10^x$ a través de la recta $y = x$.

Logaritmos naturales: base *e*

En muchas aplicaciones prácticas de los logaritmos, el número e (recuerde que $e \approx 2.71828$) se usa como base. Los logaritmos con base e se llaman **logaritmos naturales**, y usualmente se usa el símbolo $\ln x$ en lugar de $\log_e x$.

$$\log_e x = \ln x$$

Los logaritmos naturales se pueden encontrar con una calculadora equipada adecuadamente. Una calculadora que tenga una función logaritmo natural (por lo general, una tecla marcada ln x) proporciona los siguientes resultados redondeados a cuatro lugares decimales:

$\ln 3.21 = 1.1663$

$\ln 47.28 = 3.8561$

$\ln 842 = 6.7358$

$\ln 0.21 = -1.5606$

$\ln 0.0046 = -5.3817$

$\ln 10 = 2.3026$

Asegúrese que puede usar su calculadora para obtener estos resultados. Tenga en mente el significado de un enunciado como $\ln 3.21 = 1.1663$. Al cambiar a forma exponencial, se afirma que e elevado a la potencia 1.1663 es aproximadamente 3.21. Al usar una calculadora se obtiene $e^{1.1663} = 3.210093293$.

Resuelva algunos problemas para encontrar x cuando se proporciona $\ln x$. Asegúrese que concuerda con estos resultados.

Si $\ln x = 2.4156$, entonces $x = e^{2.4156} = 11.196$
Si $\ln x = 0.9847$, entonces $x = e^{0.9847} = 2.6770$
Si $\ln x = 4.1482$, entonces $x = e^{4.1482} = 63.320$
Si $\ln x = -1.7654$, entonces $x = e^{-1.7654} = 0.17112$

La **función logarítmica natural** se define con la ecuación $f(x) = \ln x$. Es la inversa de la función exponencial natural $f(x) = e^x$. Por tanto, una forma de graficar $f(x) = \ln x$ es reflejar la gráfica de $f(x) = e^x$ a través de la recta $y = x$. Se le pedirá hacerlo en el siguiente conjunto de problemas.

En la figura 10.30 se usó una herramienta de graficación para bosquejar la gráfica de $f(x) = e^x$. Ahora, sobre la base del trabajo previo con transformaciones, debe establecer los siguientes enunciados:

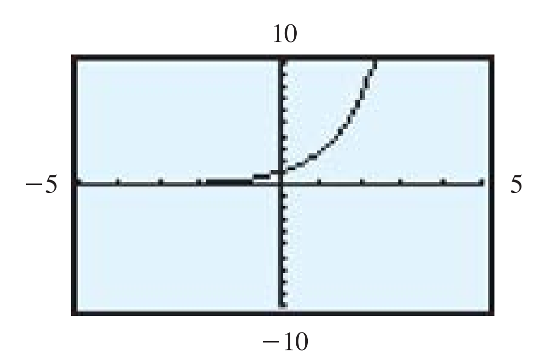


Figura 10.30

1. La gráfica de $f(x) = -e^x$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada a través del eje x.

2. La gráfica de $f(x) = e^{-x}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada a través del eje y.

3. La gráfica de $f(x) = e^x + 4$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ corrida hacia arriba cuatro unidades.
4. La gráfica de $f(x) = e^{x+2}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ corrida dos unidades a la izquierda.

Estos enunciados se verifican en la figura 10.31, que muestran el resultado de graficar estas cuatro funciones sobre el mismo conjunto de ejes, al usar una herramienta de graficación.

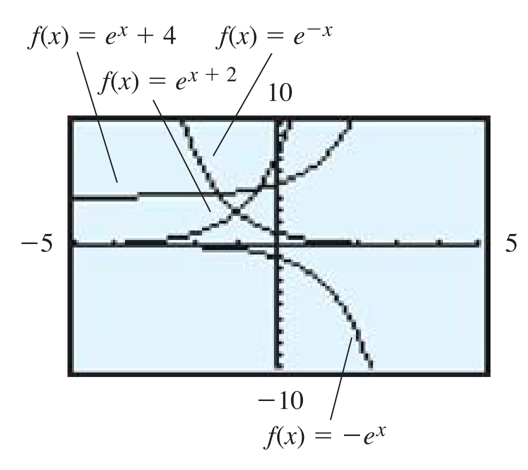


Figura 10.31

Observaciones: Hasta el momento se usó una herramienta de graficación para bosquejar solamente funciones logarítmicas comunes y naturales. En la siguiente sección se verá cómo los logaritmos con bases distintas a 10 o e se relacionan con los logaritmos comunes y naturales. Esto le proporcionará una forma de usar una herramienta de graficación para ilustrar una función logarítmica con cualquier base válida.

Conjunto de problemas 10.5

Para los problemas 1-10 use una calculadora para encontrar cada **logaritmo común**. Exprese las respuestas a cuatro lugares decimales.

1. log 7.24
2. log 2.05
3. log 52.23
4. log 825.8
5. log 3214.1
6. log 14 189
7. log 0.729
8. log 0.04376
9. log 0.00034
10. log 0.000069

Para los problemas 11-20 use su calculadora para encontrar x cuando se proporcione $\log x$. Exprese las respuestas a cinco dígitos significativos.

11. $\log x = 2.6143$
12. $\log x = 1.5263$
13. $\log x = 4.9547$
14. $\log x = 3.9335$
15. $\log x = 1.9006$
16. $\log x = 0.5517$
17. $\log x = -1.3148$
18. $\log x = -0.1452$
19. $\log x = -2.1928$
20. $\log x = -2.6542$

Para los problemas 21-30 use su calculadora para encontrar cada **logaritmo natural**. Exprese las respuestas a cuatro lugares decimales.

21. ln 5
22. ln 18
23. ln 32.6
24. ln 79.5
25. ln 430
26. ln 371.8
27. ln 0.46
28. ln 0.524
29. ln 0.0314
30. ln 0.008142

Para los problemas 31-40 use su calculadora para encontrar x cuando se proporcione $\ln x$. Exprese las respuestas a cinco dígitos significativos.

31. $\ln x = 0.4721$

32. $\ln x = 0.9413$

33. $\ln x = 1.1425$

34. $\ln x = 2.7619$

35. $\ln x = 4.6873$

36. $\ln x = 3.0259$

37. $\ln x = -0.7284$

38. $\ln x = -1.6246$

39. $\ln x = -3.3244$

40. $\ln x = -2.3745$

41. **(a)** Complete la tabla siguiente y luego grafique $f(x) = \log x$. (Exprese los valores para $\log x$ a la décima más cercana.)

x	0.1	0.5	1	2	4	8	10
log x							

(b) Complete la tabla siguiente y exprese los valores para 10^x a la décima más cercana.

x	−1	−0.3	0	0.3	0.6	0.9	1
10^x							

Luego grafique $f(x) = 10^x$ y refléjela a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica para $f(x) = \log x$.

42. **(a)** Complete la tabla siguiente y luego grafique $f(x) = \ln x$. (Exprese los valores para $\ln x$ a la décima más cercana.)

x	0.1	0.5	1	2	4	8	10
ln x							

(b) Complete la tabla siguiente y exprese los valores para e^x a la décima más cercana.

x	−2.3	−0.7	0	0.7	1.4	2.1	2.3
e^x							

Luego grafique $f(x) = e^x$ y refléjela a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica para $f(x) = \ln x$.

43. Grafique $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ al graficar $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$.

44. Grafique $y = \log_2 x$ al graficar $2^y = x$.

45. Grafique $f(x) = \log_3 x$ al reflejar la gráfica de $g(x) = 3^x$ a través de la recta $y = x$.

46. Grafique $f(x) = \log_4 x$ al reflejar la gráfica de $g(x) = 4^x$ a través de la recta $y = x$.

Para los problemas 47-53 grafique cada una de las funciones. Recuerde que la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ se proporciona en la figura 10.27.

47. $f(x) = 3 + \log_2 x$

48. $f(x) = -2 + \log_2 x$

49. $f(x) = \log_2(x + 3)$

50. $f(x) = \log_2(x - 2)$

51. $f(x) = \log_2 2x$

52. $f(x) = -\log_2 x$

53. $f(x) = 2 \log_2 x$

Para los problemas 54-61 realice los cálculos siguientes y exprese las respuestas a la centésima más cercana. (Estos cálculos son de preparación para el trabajo en la siguiente sección.)

54. $\dfrac{\log 7}{\log 3}$

55. $\dfrac{\ln 2}{\ln 7}$

56. $\dfrac{2 \ln 3}{\ln 8}$

57. $\dfrac{\ln 5}{2 \ln 3}$

58. $\dfrac{\ln 3}{0.04}$

59. $\dfrac{\ln 2}{0.03}$

60. $\dfrac{\log 2}{5 \log 1.02}$

61. $\dfrac{\log 5}{3 \log 1.07}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

62. ¿Por qué el número 1 se excluye de ser base de un logaritmo?

63. ¿Cómo sabe que $\log_2 6$ está entre 2 y 3?

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

64. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

65. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

66. Grafique $f(x) = \ln x$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = 2 \ln x$, $f(x) = 4 \ln x$ y $f(x) = 6 \ln x$ con la gráfica de $f(x) = \ln x$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \ln x$.

67. Grafique $f(x) = \log x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = 2 + \log x$, $f(x) = -2 + \log x$ y $f(x) = -6 + \log x$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log x$.

68. Grafique $\ln x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = \ln(x - 2)$, $f(x) = \ln(x - 6)$ y $f(x) = \ln(x + 4)$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \ln x$.

69. Para cada una de las expresiones siguientes, (a) prediga la forma y ubicación general de la gráfica, y (b) use su calculadora graficadora para bosquejar la función para comprobar sus predicciones.

(a) $f(x) = \log x + \ln x$ **(b)** $f(x) = \log x - \ln x$

(c) $f(x) = \ln x - \log x$ **(d)** $f(x) = \ln x^2$

10.6 Ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas y resolución de problemas

En la sección 10.1 se resolvieron ecuaciones exponenciales como $3^x = 81$ al expresar ambos lados de la ecuación como una potencia de 3 y luego aplicar la propiedad: si $b^n = b^m$, entonces $n = m$. Sin embargo, si intenta este mismo método con una ecuación como $3^x = 5$, enfrenta la dificultad de expresar 5 como potencia de 3. Este tipo de problemas se resuelven con las propiedades de los logaritmos y la siguiente propiedad de igualdad:

Propiedad 10.8

Si $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces $x = y$ si y sólo si $\log_b x = \log_b y$.

La propiedad 10.8 se enuncia en términos de cualquier base válida b; sin embargo, para la mayoría de las aplicaciones se usan logaritmos comunes o logaritmos naturales. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelva $3^x = 5$ a la centésima más cercana.

Solución

Con el uso de logaritmos comunes se puede proceder del modo siguiente:

$$3^x = 5$$

$$\log 3^x = \log 5 \qquad \text{Propiedad 10.8}$$

$$x \log 3 = \log 5 \qquad \log r^p = p \log r$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 3}$$

$$x = 1.46 \quad \text{a la centésima más cercana}$$

✔ **Comprobación**

Puesto que $3^{1.46} \approx 4.972754647$, se dice que, a la centésima más cercana, el conjunto solución para $3^x = 5$ es $\{1.46\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva $e^{x+1} = 5$ a la centésima más cercana.

Solución

Dado que la base e se usa en la expresión exponencial, use logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$e^{x+1} = 5$$

$$\ln e^{x+1} = \ln 5 \qquad \text{Propiedad 10.8}$$

$$(x+1)\ln e = \ln 5 \qquad \ln r^p = p \ln r$$

$$(x+1)(1) = \ln 5 \qquad \ln e = 1$$

$$x = \ln 5 - 1$$

$$x = 0.61 \quad \text{a la centésima más cercana}$$

El conjunto solución es $\{0.61\}$. ¡Compruébelo! ■

EJEMPLO 3

Resuelva $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$ a la centésima más cercana.

Solución

$$2^{3x-2} = 3^{2x+1}$$

$$\log 2^{3x-2} = \log 3^{2x+1}$$

$$(3x-2)\log 2 = (2x+1)\log 3$$

$$3x \log 2 - 2 \log 2 = 2x \log 3 + \log 3$$

$$3x \log 2 - 2x \log 3 = \log 3 + 2 \log 2$$

$$x(3 \log 2 - 2 \log 3) = \log 3 + 2 \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 + 2 \log 2}{3 \log 2 - 2 \log 3}$$

$$x = -21.10 \quad \text{a la centésima más cercana}$$

El conjunto solución es $\{-21.10\}$. ¡Compruébelo! ■

Ecuaciones logarítmicas

En el ejemplo 11 de la sección 10.4 se resolvió la ecuación logarítmica

$$\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$$

al simplificar el lado izquierdo de la ecuación a $\log_{10}[x(x + 9)]$ y luego cambiar la ecuación a forma exponencial para completar la solución. Ahora, con la propiedad 10.8, puede resolver tal ecuación logarítmica de otra forma y también ampliar sus capacidades de resolución de ecuaciones. Considere algunos ejemplos.

EJEMPLO 4

Resuelva $\log x + \log(x - 15) = 2$

Solución

Puesto que $\log 100 = 2$, la ecuación dada se convierte en

$$\log x + \log(x - 15) = \log 100$$

Ahora simplifique el lado izquierdo, aplique la propiedad 10.8 y proceda del modo siguiente:

$$\log(x)(x - 15) = \log 100$$
$$x(x - 15) = 100$$
$$x^2 - 15x - 100 = 0$$
$$(x - 20)(x + 5) = 0$$
$$x - 20 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x = 20 \quad \text{o} \quad x = -5$$

El dominio de una función logarítmica debe contener sólo números positivos, de modo que x y $x - 15$ deben ser positivas en este problema. Por tanto, se descarta la solución -5; el conjunto solución es $\{20\}$. ■

EJEMPLO 5

Resuelva $\ln(x + 2) = \ln(x - 4) + \ln 3$

Solución

$$\ln(x + 2) = \ln(x - 4) + \ln 3$$
$$\ln(x + 2) = \ln[3(x - 4)]$$
$$x + 2 = 3(x - 4)$$
$$x + 2 = 3x - 12$$
$$14 = 2x$$
$$7 = x$$

El conjunto solución es $\{7\}$. ■

EJEMPLO 6

Resuelva $\log_b(x + 2) + \log_b(2x - 1) = \log_b x$

Solución

$$\log_b(x + 2) + \log_b(2x - 1) = \log_b x$$
$$\log_b[(x + 2)(2x - 1)] = \log_b x$$
$$(x + 2)(2x - 1) = x$$
$$2x^2 + 3x - 2 = x$$
$$2x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

Al usar la fórmula cuadrática se obtiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Puesto que $x + 2$, $2x - 1$ y x tiene que ser positiva, debe descartar la solución $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; el conjunto solución es $\left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

Resolución de problemas

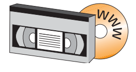
En la sección 10.2 se usó la fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

para determinar la cantidad de dinero (A) acumulado al final de t años si P dólares se invierten a una tasa de interés r compuesta n veces al año. Ahora use esta fórmula para resolver otros tipos de problemas que tratan con interés compuesto.

EJEMPLO 7

¿Cuánto tiempo transcurrirá para duplicar $500, si se invierten a 12% de interés compuesto trimestral?



Solución

"Duplicar" significa que los $500 deben crecer a $1000. Por tanto

$$1000 = 500\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4t}$$
$$= 500(1 + 0.03)^{4t}$$
$$= 500(1.03)^{4t}$$

Al multiplicar ambos lados de $1000 = 500(1.03)^{4t}$ por $\frac{1}{500}$ se produce

$$2 = (1.03)^{4t}$$

Por tanto

$$\log 2 = \log(1.03)^{4t} \qquad \text{Propiedad 10.8}$$
$$= 4t \log 1.03 \qquad \log r^p = p \log r$$

Ahora resuelva para t.

$$4t \log 1.03 = \log 2$$
$$t = \frac{\log 2}{4 \log 1.03}$$
$$t = 5.9 \quad \text{a la décima más cercana}$$

En consecuencia, se afirma que \$500 invertidos a 12% de interés compuesto semestral se duplicarán en aproximadamente 5.9 años.

Comprobación

\$500 invertidos a 12% de interés compuesto semestral durante 5.9 años producirá

$$A = \$500\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(5.9)}$$
$$= \$500(1.03)^{23.6}$$
$$= \$1004.45$$

■

EJEMPLO 8

Suponga que el número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos está dado por la ecuación $Q(t) = Q_0e^{0.04t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que el conteo de bacterias crezca de 500 a 2000?

Solución

Al sustituir en $Q(t) = Q_0e^{0.04t}$ y resolver para t, se obtiene lo siguiente.

$$2000 = 500e^{0.04t}$$
$$4 = e^{0.04t}$$
$$\ln 4 = \ln e^{0.04t}$$
$$\ln 4 = 0.04t \ln e$$
$$\ln 4 = 0.04t \qquad \ln e = 1$$
$$\frac{\ln 4}{0.04} = t$$
$$34.7 = t \quad \text{a la décima más cercana}$$

Deben transcurrir aproximadamente 34.7 minutos. ■

Números Richter

Los sismólogos usan la escala Richter para medir e informar la magnitud de los terremotos. La ecuación

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

R se llama número Richter

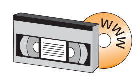
compara la intensidad I de un terremoto con una intensidad mínima o de referencia I_0. La intensidad de referencia es el movimiento terrestre más pequeño que se puede registrar en un sismógrafo. Suponga que la intensidad de un terremoto se determina en 50 000 veces la intensidad de referencia. En este caso, $I = 50\,000\, I_0$ y el número Richter se calcula del modo siguiente:

$$\begin{aligned} R &= \log \frac{50\,000\, I_0}{I_0} \\ &= \log 50\,000 \\ &\approx 4.698970004 \end{aligned}$$

Por tanto, se obtendría un número Richter de 4.7. Considere dos ejemplos más que implican números Richter.

EJEMPLO 9

En 1989 se informó de un terremoto en el área de San Francisco que alcanzó un número Richter de 6.9. ¿Cómo se compara su intensidad con la intensidad de referencia?



Solución

$$\begin{aligned} 6.9 &= \log \frac{I}{I_0} \\ 10^{6.9} &= \frac{I}{I_0} \\ I &= (10^{6.9})(I_0) \\ I &\approx 7\,943\,282\, I_0 \end{aligned}$$

Su intensidad fue un poco menor que 8 millones de veces la intensidad de referencia. ■

EJEMPLO 10

En 1990 un terremoto en Irán alcanzó un número Richter de 7.7. Compare la intensidad de este terremoto con el que tuvo lugar en San Francisco, mencionado en el ejemplo 9.

Solución

A partir del ejemplo 9 se tiene $I = (10^{6.9})(I_0)$ para el terremoto en San Francisco. Entonces, al usar el número Richter de 7.7, se obtiene $I = (10^{7.7})(I_0)$ para el terremoto en Irán. Por tanto, al comparar,

$$\frac{(10^{7.7})(I_0)}{(10^{6.9})(I_0)} = 10^{7.7-6.9} = 10^{0.8} \approx 6.3$$

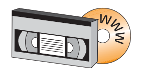
El terremoto en Irán fue aproximadamente 6 veces tan intenso como el de San Francisco. ■

Logaritmos con base distinta a 10 o *e*

El método básico mediante el cual se aplica la propiedad 10.8 y el uso de logaritmos comunes o naturales también se puede usar para evaluar un logaritmo con alguna base distinta de 10 o *e*. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11

Evalúe $\log_3 41$



Solución

Sea $x = \log_3 41$. Cambie a forma exponencial para obtener

$$3^x = 41$$

Ahora aplique la propiedad 10.8 y proceda del modo siguiente.

$$\log 3^x = \log 41$$
$$x \log 3 = \log 41$$
$$x = \frac{\log 41}{\log 3}$$
$$x = 3.3802 \quad \text{redondee a cuatro lugares decimales}$$

Por tanto, se afirma que 3 elevado a la potencia 3.3802 producirá aproximadamente 41. ¡Compruébelo! ■

El método del ejemplo 11 para evaluar $\log_a r$ produce la siguiente fórmula, que con frecuencia se conoce como **fórmula de cambio de base para logaritmos**.

Propiedad 10.9

Si a, b y r son números positivos, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Al usar la propiedad 10.9 puede determinar fácilmente una relación entre logaritmos de diferentes bases. Por ejemplo, suponga que en la propiedad 10.9 se hace $a = 10$ y $b = e$. Entonces,

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

se convierte en

$$\log_{10} r = \frac{\log_e r}{\log_e 10}$$
$$\log_e r = (\log_e 10)(\log_{10} r)$$
$$\log_e r = (2.3026)(\log_{10} r)$$

Por tanto, el logaritmo natural de cualquier número positivo es aproximadamente igual al logaritmo común del número por 2.3026.

Ahora puede usar una herramienta de graficación para graficar funciones logarítmicas tales como $f(x) = \log_2 x$. Al usar la fórmula de cambio de base, puede expresar esta función como $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 2}$ o como $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$. La gráfica de $f(x) = \log_2 x$ se muestra en la figura 10.32.

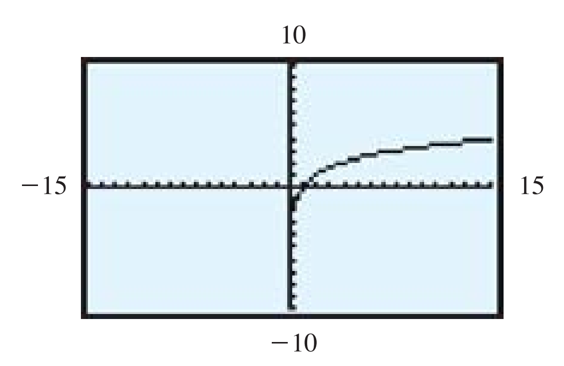


Figura 10.32

Finalmente, use un método gráfico para resolver una ecuación que se dificulte con un método algebraico.

EJEMPLO 12 Resuelva la ecuación $(5^x - 5^{-x})/2 = 3$

Solución

Primero es necesario reconocer que las soluciones para la ecuación $(5^x - 5^{-x})/2 = 3$ son las abscisas al origen de la gráfica de la ecuación $y = (5^x - 5^{-x})/2 - 3$. Puede usar una herramienta de graficación para obtener la gráfica de esta ecuación, como se muestra en la figura 10.33. Use las características ZOOM y TRACE para determinar que la gráfica cruza el eje x en aproximadamente 1.13. Por tanto, el conjunto solución de la expresión original es {1.13}.

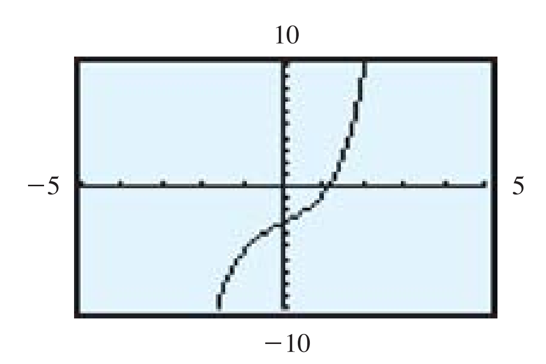


Figura 10.33 ■

Conjunto de problemas 10.6

Para los problemas 1-20 resuelva cada ecuación exponencial y exprese soluciones aproximadas a la centésima más cercana.

1. $3^x = 13$

2. $2^x = 21$

3. $4^n = 35$

4. $5^n = 75$

5. $2^x + 7 = 50$

6. $3^x - 6 = 25$

7. $3^{x-2} = 11$

8. $2^{x+1} = 7$

9. $5^{3t+1} = 9$

10. $7^{2t-1} = 35$

11. $e^x = 27$

12. $e^x = 86$

13. $e^{x-2} = 13.1$

14. $e^{x-1} = 8.2$

15. $3e^x - 1 = 17$

16. $2e^x = 12.4$

17. $5^{2x+1} = 7^{x+3}$

18. $3^{x-1} = 2^{x+3}$

19. $3^{2x+1} = 2^{3x+2}$

20. $5^{x-1} = 2^{2x+1}$

Para los problemas 21-32 resuelva cada ecuación logarítmica y exprese las soluciones racionales en la forma radical más baja.

21. $\log x + \log(x + 21) = 2$

22. $\log x + \log(x + 3) = 1$

23. $\log(3x - 1) = 1 + \log(5x - 2)$

24. $\log(2x - 1) - \log(x - 3) = 1$

25. $\log(x + 1) = \log 3 - \log(2x - 1)$

26. $\log(x - 2) = 1 - \log(x + 3)$

27. $\log(x + 2) - \log(2x + 1) = \log x$

28. $\log(x + 1) - \log(x + 2) = \log \frac{1}{x}$

29. $\ln(2t + 5) = \ln 3 + \ln(t - 1)$

30. $\ln(3t - 4) - \ln(t + 1) = \ln 2$

31. $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

32. $\log x^2 = (\log x)^2$

Para los problemas 33-42 aproxime cada logaritmo a tres lugares decimales. (El ejemplo 11 y/o la propiedad 10.9 deben ser de utilidad.)

33. $\log_2 40$

34. $\log_2 93$

35. $\log_3 16$

36. $\log_3 37$

37. $\log_4 1.6$

38. $\log_4 3.2$

39. $\log_5 0.26$

40. $\log_5 0.047$

41. $\log_7 500$

42. $\log_8 750$

Para los problemas 43-55 resuelva cada problema y exprese las respuestas a la décima más cercana a menos que se enuncie de otro modo.

43. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que $750 se conviertan en $1000 si se invierten a 12% de interés compuesto trimestral?

44. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que $1000 se dupliquen, si se invierten a 9% de interés compuesto semestral?

45. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que $2000 se dupliquen, si se invierten a 13% de interés compuesto continuo?

46. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que $500 se tripliquen, si se invierten a 9% de interés compuesto continuo?

47. ¿Qué tasa de interés compuesto continuo se necesita para que una inversión de $500 crezca a $900 en 10 años?

48. ¿Qué tasa de interés compuesto continuo se necesita para que una inversión de $2500 crezca a $10 000 en 20 años?

49. Para cierta cepa de bacterias, el número de bacterias presente después de t horas está dada por la ecuación $Q = Q_0 e^{0.34t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que 400 bacterias crezcan a 4000 bacterias?

50. Una pieza de maquinaria, valuada en $30 000, se deprecia a una tasa de 10% anual. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que alance un valor de $15 000?

51. La ecuación $P(a) = 14.7e^{-0.21a}$, donde a es la altitud sobre el nivel del mar medida en millas produce la presión atmosférica en libras por pulgada cuadrada. Si la presión atmosférica en Cheyenne, Wyoming, es aproximadamente 11.53 libras por pulgada cuadrada, encuentre la altitud de la ciudad sobre el nivel del mar. Exprese su respuesta a la centena de pie más cercana.

52. El número de gramos de cierta sustancia radiactiva presente después de t horas está dada por la ecuación $Q = Q_0 e^{-0.45t}$, donde Q_0 representa el número inicial de gramos. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que 2500 gramos se reduzcan a 1250 gramos?

53. Para cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = Q_0e^{0.4t}$, donde Q_0 es un número inicial de bacterias y t es el tiempo medido en horas, produce el número de bacterias como función del tiempo. ¿Cuánto tardarán 500 bacterias en aumentar a 2000?

54. Suponga que la ecuación $P(t) = P_0e^{0.02t}$, donde P_0 representa una población inicial y t es el tiempo en años, se usa para predecir el crecimiento poblacional. ¿Cuánto tardará una ciudad de 50 000 en duplicar su población?

55. En 1971 un terremoto en Los Ángeles tuvo una intensidad de aproximadamente 5 millones de veces la intensidad de referencia. ¿Cuál fue el número Richter asociado con el terremoto?

56. En 1906 un terremoto en San Francisco alcanzó un número Richter de 8.3. ¿Cómo se compara su intensidad con la intensidad de referencia?

57. Calcule cuántas veces es más intenso un terremoto con un número Richter de 7.3, que un terremoto con un número Richter de 6.4.

58. Calcule cuántas veces es más intenso un terremoto con un número Richter de 8.9, que un terremoto con un número Richter de 6.2.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

59. Explique cómo determinar $\log_4 76$ sin usar la propiedad 10.9.

60. Explique el concepto de número Richter.

61. Explique cómo resolvería la ecuación $2^x = 64$ y también cómo resolvería la ecuación $2^x = 53$.

62. ¿De qué modo se comparan los logaritmos con base 9, con los logaritmos con base 3? Explique cómo llegó a esta conclusión.

MÁS INVESTIGACIÓN

63. Use el abordaje del ejemplo 11 para desarrollar la propiedad 10.9.

64. Sea $r = b$ en la propiedad 10.9 y verifique que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

65. Resuelva la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$. Exprese su respuesta a la centésima más cercana.

66. Resuelva la ecuación $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$ para x en términos de y.

67. Resuelva la ecuación $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ para x en términos de y.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

68. Compruebe sus respuestas a los problemas 17-20 al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

69. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \log_2 x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

70. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = (0.5)^x$ y $f(x) = \log_{0.5} x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

71. Grafique $f(x) = \log_2 x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = \log_3 x$, $f(x) = \log_4 x$ y $f(x) = \log_8 x$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log_2 x$.

72. Grafique $f(x) = \log_5 x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = 2 \log_5 x$, $f(x) = -4 \log_5 x$ y $f(x) = \log_5(x + 4)$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log_5 x$.

73. Use los métodos gráfico y algebraico para resolver la ecuación $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{3} = 4$.

Capítulo 10 Resumen

(10.1) Si a y b son números reales positivos, y m y n son cualquier número real, entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ Producto de dos potencias
2. $(b^n)^m = b^{mn}$ Potencia de una potencia
3. $(ab)^n = a^n b^n$ Potencia de un producto
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Potencia de un cociente
5. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ Cociente de dos potencias

Si $b > 0$, $b \neq 1$ y m y n son números reales, entonces $b^n = b^m$ si y sólo si $n = m$.

Una función definida por una ecuación de la forma

$$f(x) = b^x, \qquad b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

se llama **función exponencial**.

(10.2) Una fórmula general para cualquier principal P compuesto n veces por año para cualquier número t, a una tasa r, es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A representa la cantidad total de dinero acumulado al final de los t años. El valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, conforme n se hace infinitamente grande, tiende al número e, donde e es igual a 2.71828 a cinco lugares decimales.

La fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

produce el valor acumulado A de una suma de dinero P que se invirtió durante t años a una tasa de r por ciento **compuesto continuo**.

La fórmula

$$Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

se conoce como la fórmula de **vida media**.

La ecuación

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

se usa como un modelo matemático para muchas aplicaciones de crecimiento y decaimiento.

(10.3) Se dice que una función f es una **función uno a uno** si cada valor de $f(x)$ tiene sólo un valor de x asociado consigo.

En términos de pares ordenados, una función uno a uno es una función tal que ninguno de los pares ordenados tiene el mismo segundo componente.

Sea f una función uno a uno con un dominio de X y un rango de Y. Una función g, con un dominio de Y y un rango de X se llama **función inversa** de f si $(f \circ g)(x) = x$ para cada x en Y y $(g \circ f)(x) = x$ para cada x en X.

Si se intercambian los componentes de cada par ordenado de una función uno a uno dada, la función resultante y la función dada son **inversas** una de la otra.

La inversa de una función f se denota f^{-1}. En una gráfica dos funciones que son mutuamente inversas son **imágenes especulares** con referencia a la recta $y = x$.

Una técnica sistemática para encontrar la inversa de una función es la siguiente:

1. Sea $y = f(x)$.
2. Intercambie x y y.
3. Resuelva la ecuación para y en términos de x.
4. La función inversa $f^{-1}(x)$ se determina mediante la ecuación en el paso 3.

No olvide que el dominio de f debe ser igual al rango de f^{-1}, y el dominio de f^{-1} debe ser igual al rango de f.

Sea f una función, con el intervalo I como subconjunto del dominio de f. Sean x_1 y x_2 en I.

1. f es creciente sobre I si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.
2. f es decreciente sobre I si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.
3. f es constante sobre I si $f(x_1) = f(x_2)$ para todo x_1 y x_2.

(10.4) Si r es cualquier número real positivo, entonces el único exponente t tal que $b^t = r$ se llama **logaritmo de r con base b** y se denota mediante $\log_b r$.

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$
3. $r = b^{\log_b r}$

para $b \geq 0$, $b \neq 1$, $r > 0$

Las siguientes propiedades de los logaritmos se derivan a partir de la definición de logaritmo y las propiedades de los exponentes. Para números reales positivos b, r y s, donde $b \neq 1$,

1. $\log_b rs = \log_b r + \log_b s$
2. $\log_b\left(\frac{r}{s}\right) = \log_b r - \log_b s$
3. $\log_b r^p = p \log_b r$, donde p es cualquier número real

(10.5) Una función definida por una ecuación de la forma

$$f(x) = \log_b x, \qquad b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

se llama **función logarítmica**. La ecuación $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$. Las dos funciones $f(x) = b^x$ y $g(x) = \log_b x$ son mutuamente inversas.

Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes**. La expresión $\log_{10} x$ usualmente se escribe como $\log x$.

Muchas calculadoras están equipadas con una función de logaritmo común. Con frecuencia se usa una tecla marcada [log] para encontrar logaritmos comunes.

Los **logaritmos naturales** son aquellos que tienen una base de e, donde e es un número irracional cuya aproximación decimal a ocho dígitos es 2.7182818. Los logaritmos naturales se denotan mediante $\log_e x$ o $\ln x$.

Muchas calculadoras también están equipadas con una función de logaritmo natural. Con frecuencia se usa una tecla marcada [ln x] para este propósito.

(10.6) Las propiedades de igualdad y las propiedades de exponentes y logaritmos se funden para resolver varias ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Estas propiedades también ayudan a resolver problemas que tratan con varias aplicaciones, como interés compuesto y problemas de crecimiento.

La fórmula

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

produce el número Richter asociado con un terremoto.

La fórmula

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

con frecuencia se llama **fórmula de cambio de base**.

Capítulo 10 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-10 evalúe cada una de las siguientes:

1. $8^{5/3}$
2. $-25^{3/2}$
3. $(-27)^{4/3}$
4. $\log_6 216$
5. $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$
6. $\log_2 \sqrt[3]{2}$
7. $\log_2\left(\frac{\sqrt[4]{32}}{2}\right)$
8. $\log_{10} 0.00001$
9. $\ln e$
10. $7^{\log_7 12}$

Para los problemas 11-24 resuelva cada ecuación. Exprese soluciones aproximadas a la centésima más cercana.

11. $\log_{10} 2 + \log_{10} x = 1$
12. $\log_3 x = -2$
13. $4^x = 128$
14. $3^t = 42$
15. $\log_2 x = 3$
16. $\left(\frac{1}{27}\right)^{3x} = 3^{2x-1}$
17. $2e^x = 14$
18. $2^{2x+1} = 3^{x+1}$
19. $\ln(x + 4) - \ln(x + 2) = \ln x$

20. $\log x + \log(x - 15) = 2$

21. $\log(\log x) = 2$

22. $\log(7x - 4) - \log(x - 1) = 1$

23. $\ln(2t - 1) = \ln 4 + \ln(t - 3)$

24. $64^{2t+1} = 8^{-t+2}$

Para los problemas 25-28, si log 3 = 0.4771 y log 7 = 0.8451, evalúe cada una de las siguientes expresiones.

25. $\log\left(\frac{7}{3}\right)$

26. $\log 21$

27. $\log 27$

28. $\log 7^{2/3}$

29. Exprese cada uno de los siguientes logaritmos como la suma o la diferencia de cantidades logarítmicas más simples. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

(a) $\log_b\left(\frac{x}{y^2}\right)$ **(b)** $\log_b \sqrt[4]{xy^2}$

(c) $\log_b\left(\frac{\sqrt{x}}{y^3}\right)$

30. Exprese cada uno de los siguientes logaritmos como un solo logaritmo. Suponga que todas las variables representan números reales positivos.

(a) $3 \log_b x + 2 \log_b y$

(b) $\frac{1}{2}\log_b y - 4 \log_b x$

(c) $\frac{1}{2}(\log_b x + \log_b y) - 2 \log_b z$

Para los problemas 31-34 aproxime cada uno de los logaritmos a tres lugares decimales.

31. $\log_2 3$

32. $\log_3 2$

33. $\log_4 191$

34. $\log_2 0.23$

Para los problemas 35-42 grafique cada una de las funciones.

35. **(a)** $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

(b) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 2$

(c) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$

36. **(a)** $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = 2^{x+2}$

(c) $f(x) = -2^x$

37. **(a)** $f(x) = e^{x-1}$

(b) $f(x) = e^x - 1$

(c) $f(x) = e^{-x+1}$

38. **(a)** $f(x) = -1 + \log x$

(b) $f(x) = \log(x - 1)$

(c) $f(x) = -1 - \log x$

39. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

40. $f(x) = e^{-x^2/2}$

41. $f(x) = \log_2(x - 3)$

42. $f(x) = 3 \log_3 x$

Para los problemas 43-45 use la fórmula de interés compuesto $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para encontrar la cantidad de dinero total acumulado al final del periodo indicado para cada una de las inversiones.

43. \$750 durante 10 años a 11% de interés compuesto trimestral.

44. \$1250 durante 15 años a 9% de interés compuesto mensual.

45. \$2500 durante 20 años a 9.5% de interés compuesto semestral.

Para los problemas 46-49 determine si f y g son funciones inversas.

46. $f(x) = 7x - 1$ y $g(x) = \frac{x+1}{7}$

47. $f(x) = -\frac{2}{3}x$ y $g(x) = \frac{3}{2}x$

48. $f(x) = x^2 - 6$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x + 6}$ para $x \geq -6$

49. $f(x) = 2 - x^2$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$ para $x \leq 2$

Para los problemas 50-53, (a) encuentre f^{-1}, y (b) verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

50. $f(x) = 4x + 5$

51. $f(x) = -3x - 7$

52. $f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

53. $f(x) = -2 - x^2$ para $x \geq 0$

Para los problemas 54 y 55, encuentre los intervalos sobre los cuales la función crece y los intervalos donde disminuye.

54. $f(x) = -2x^2 + 16x - 35$

55. $f(x) = 2\sqrt{x - 3}$

56. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$100 se dupliquen, si se invierten a 14% de interés compuesto anual?

57. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$1000 sean \$3500, si se invierten a 10.5% de interés compuesto trimestral?

58. ¿Qué tasa de interés (a la décima porcentual más cercana), compuesto continuo, se requiere para que una inversión de \$500 crezca a \$1000 en 8 años?

59. Suponga que la población actual de una ciudad es de 50 000. Use la ecuación $P(t) = P_0e^{0.02t}$ (donde P_0 representa una población inicial) para estimar poblaciones futuras y estime la población de dicha ciudad en 10, 15 y 20 años.

60. El número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t horas está dado por la ecuación $Q = Q_0e^{0.29t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardarán 500 bacterias en crecer a 2000 bacterias?

61. Suponga que cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 40 días. Si tiene 750 gramos de la sustancia, ¿cuánto, al gramo más cercano, permanecerá después de 100 días?

62. En 1985 ocurrió un terremoto en la Ciudad de México, que tuvo un nivel de intensidad de casi 125 000 000 veces la intensidad de referencia. Encuentre el número Richter para dicho terremoto.

Capítulo 10 Examen

Para los problemas 1-4 evalúe cada expresión.

1. $\log_3 \sqrt{3}$

2. $\log_2(\log_2 4)$

3. $-2 + \ln e^3$

4. $\log_2(0.5)$

Para los problemas 5-10 resuelva cada ecuación.

5. $4^x = \frac{1}{64}$

6. $9^x = \frac{1}{27}$

7. $2^{3x-1} = 128$

8. $\log_9 x = \frac{5}{2}$

9. $\log x + \log(x + 48) = 2$

10. $\ln x = \ln 2 + \ln(3x - 1)$

Para los problemas 11-13, dado que $\log_3 4 = 1.2619$ y $\log_3 5 = 1.4650$, evalúe cada uno de los siguientes logaritmos

11. $\log_3 100$

12. $\log_3 \frac{5}{4}$

13. $\log_3 \sqrt{5}$

14. Encuentre la inversa de la función $f(x) = -3x - 6$.

15. Resuelva $e^x = 176$ a la centésima más cercana.

16. Resuelva $2^{x-2} = 314$ a la centésima más cercana.

17. Determine $\log_5 632$ a cuatro lugares decimales.

18. Encuentre la inversa de la función $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}$.

19. Si $3500 se invierten a 7.5% de interés compuesto trimestral, ¿cuánto dinero se acumulará al final de 8 años?

20. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que $5000 sean $12 500, si se invierten a 7% de interés compuesto anual? Exprese su respuesta a la décima de año más cercana.

21. El número de bacterias presente en cierto cultivo después de t horas está dado por $Q(t) = Q_0e^{0.23t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardarán 400 bacterias en aumentar a 2400 bacterias? Exprese su respuesta a la décima de hora más cercana.

22. Suponga que cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 50 años. Si tiene 7500 gramos de la sustancia, ¿cuánto permanecerá después de 32 años? Exprese su respuesta al gramo más cercano.

Para los problemas 23-25 grafique cada una de las funciones.

23. $f(x) = e^x - 2$

24. $f(x) = -3^{-x}$

25. $f(x) = \log_2(x - 2)$

Capítulos 1-10 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-5 evalúe cada expresión algebraica para los valores dados de las variables.

1. $-5(x - 1) - 3(2x + 4) + 3(3x - 1)$ para $x = -2$

2. $\dfrac{14a^3b^2}{7a^2b}$ para $a = -1$ y $b = 4$

3. $\dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{2n} + \dfrac{5}{3n}$ para $n = 4$

4. $4\sqrt{2x - y} + 5\sqrt{3x + y}$ para $x = 16$ y $y = 16$

5. $\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{5}{x + 3}$ para $x = 3$

Para los problemas 6-15 realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma simplificada.

6. $(-5\sqrt{6})(3\sqrt{12})$

7. $(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)$

8. $(3\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + 4\sqrt{6})$

9. $(2x - 1)(x^2 + 6x - 4)$

10. $\dfrac{x^2 - x}{x + 5} \cdot \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^4 - x^2}$

11. $\dfrac{16x^2y}{24xy^3} \div \dfrac{9xy}{8x^2y^2}$

12. $\dfrac{x + 3}{10} + \dfrac{2x + 1}{15} - \dfrac{x - 2}{18}$

13. $\dfrac{7}{12ab} - \dfrac{11}{15a^2}$

14. $\dfrac{8}{x^2 - 4x} + \dfrac{2}{x}$

15. $(8x^3 - 6x^2 - 15x + 4) \div (4x - 1)$

Para los problemas 16-19 simplifique cada una de las fracciones complejas.

16. $\dfrac{\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{y^2}}$

17. $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 3}{\dfrac{3}{y} + 4}$

18. $\dfrac{2 - \dfrac{1}{n - 2}}{3 + \dfrac{4}{n + 3}}$

19. $\dfrac{3a}{2 - \dfrac{1}{a}} - 1$

Para los problemas 20-25 factorice por completo cada una de las expresiones algebraicas.

20. $20x^2 + 7x - 6$

21. $16x^3 + 54$

22. $4x^4 - 25x^2 + 36$

23. $12x^3 - 52x^2 - 40x$

24. $xy - 6x + 3y - 18$

25. $10 + 9x - 9x^2$

Para los problemas 26-35 evalúe cada una de las expresiones numéricas.

26. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$

27. $\dfrac{3}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}}$

28. $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}}$

29. $-\sqrt{0.09}$

30. $(27)^{-4/3}$

31. $4^0 + 4^{-1} + 4^{-2}$

32. $\left(\dfrac{3^{-1}}{2^{-3}}\right)^{-2}$

33. $(2^{-3} - 3^{-2})^{-1}$

34. $\log_2 64$

35. $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$

Para los problemas 36-38 encuentre los productos y cocientes indicados; exprese las respuestas finales solamente con exponentes enteros positivos.

36. $(-3x^{-1}y^2)(4x^{-2}y^{-3})$

37. $\dfrac{48x^{-4}y^2}{6xy}$

38. $\left(\dfrac{27a^{-4}b^{-3}}{-3a^{-1}b^{-4}}\right)^{-1}$

Para los problemas 39-46 exprese cada expresión radical en la forma radical más simple.

39. $\sqrt{80}$

40. $-2\sqrt{54}$

41. $\sqrt{\dfrac{75}{81}}$

42. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{8}}$

43. $\sqrt[3]{56}$

44. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

45. $4\sqrt{52x^3y^2}$

46. $\sqrt{\dfrac{2x}{3y}}$

Para los problemas 47-49 use la propiedad distributiva para simplificar cada una de las siguientes:

47. $-3\sqrt{24} + 6\sqrt{54} - \sqrt{6}$

48. $\dfrac{\sqrt{8}}{3} - \dfrac{3\sqrt{18}}{4} - \dfrac{5\sqrt{50}}{2}$

49. $8\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{24} - 4\sqrt[3]{81}$

Para los problemas 50 y 51 racionalice el denominador y simplifique.

50. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}$

51. $\dfrac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}$

Para los problemas 52-54 use notación científica para realizar las operaciones indicadas.

52. $\dfrac{(0.00016)(300)(0.028)}{0.064}$

53. $\dfrac{0.00072}{0.0000024}$

54. $\sqrt{0.00000009}$

Para los problemas 55-58 encuentre cada uno de los productos o cocientes indicados, y exprese las respuestas en forma estándar.

55. $(5 - 2i)(4 + 6i)$

56. $(-3 - i)(5 - 2i)$

57. $\dfrac{5}{4i}$

58. $\dfrac{-1 + 6i}{7 - 2i}$

59. Encuentre la pendiente de la recta determinada por los puntos $(2, -3)$ y $(-1, 7)$.

60. Encuentre la pendiente de la recta determinada por la ecuación $4x - 7y = 9$.

61. Encuentre la longitud del segmento de recta cuyos puntos finales son $(4, 5)$ y $(-2, 1)$.

62. Escriba la ecuación de la recta que contiene los puntos $(3, -1)$ y $(7, 4)$.

63. Escriba la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $3x - 4y = 6$ y contiene el punto $(-3, -2)$.

64. Encuentre el centro y la longitud de un radio del círculo $x^2 + 4x + y^2 - 12y + 31 = 0$.

65. Encuentre las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 + 10x + 21$.

66. Encuentre la longitud del eje mayor de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

Para los problemas 67-76 grafique cada una de las funciones.

67. $f(x) = -2x - 4$

68. $f(x) = -2x^2 - 2$

69. $f(x) = x^2 - 2x - 2$

70. $f(x) = \sqrt{x + 1} + 2$

71. $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

72. $f(x) = -|x - 2| + 1$

73. $f(x) = 2^x + 2$

74. $f(x) = \log_2(x - 2)$

75. $f(x) = -x(x + 1)(x - 2)$

76. $f(x) = \dfrac{-x}{x + 2}$

77. Si $f(x) = x - 3$ y $g(x) = 2x^2 - x - 1$, encuentre $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

78. Encuentre la inversa (f^{-1}) de $f(x) = 3x - 7$.

79. Encuentre la inversa de $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}$.

80. Encuentre la constante de variación si y varía directamente con x y $y = 2$ cuando $x = -\dfrac{2}{3}$.

81. Si y es inversamente proporcional al cuadrado de x y $y = 4$ cuando $x = 3$, encuentre y cuando $x = 6$.

82. El volumen de un gas a temperatura constante varía inversamente con la presión. ¿Cuál es el volumen de un gas bajo una presión de 25 libras, si el gas ocupa 15 centímetros cúbicos bajo una presión de 20 libras?

Para los problemas 83-110 resuelva cada ecuación.

83. $3(2x - 1) - 2(5x + 1) = 4(3x + 4)$

84. $n + \dfrac{3n - 1}{9} - 4 = \dfrac{3n + 1}{3}$

85. $0.92 + 0.9(x - 0.3) = 2x - 5.95$

86. $|4x - 1| = 11$

87. $3x^2 = 7x$

88. $x^3 - 36x = 0$

89. $30x^2 + 13x - 10 = 0$

90. $8x^3 + 12x^2 - 36x = 0$

91. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

92. $(n + 4)(n - 6) = 11$

93. $2 - \frac{3x}{x - 4} = \frac{14}{x + 7}$

94. $\frac{2n}{6n^2 + 7n - 3} - \frac{n - 3}{3n^2 + 11n - 4} = \frac{5}{2n^2 + 11n + 12}$

95. $\sqrt{3y} - y = -6$

96. $\sqrt{x + 19} - \sqrt{x + 28} = -1$

97. $(3x - 1)^2 = 45$

98. $(2x + 5)^2 = -32$

99. $2x^2 - 3x + 4 = 0$

100. $3n^2 - 6n + 2 = 0$

101. $\frac{5}{n - 3} - \frac{3}{n + 3} = 1$

102. $12x^4 - 19x^2 + 5 = 0$

103. $2x^2 + 5x + 5 = 0$

104. $x^3 - 4x^2 - 25x + 28 = 0$

105. $6x^3 - 19x^2 + 9x + 10 = 0$

106. $16^x = 64$

107. $\log_3 x = 4$

108. $\log_{10} x + \log_{10} 25 = 2$

109. $\ln(3x - 4) - \ln(x + 1) = \ln 2$

110. $27^{4x} = 9^{x+1}$

Para los problemas 111-120 resuelva cada desigualdad.

111. $-5(y - 1) + 3 > 3y - 4 - 4y$

112. $0.06x + 0.08(250 - x) \geq 19$

113. $|5x - 2| > 13$

114. $|6x + 2| < 8$

115. $\frac{x - 2}{5} - \frac{3x - 1}{4} \leq \frac{3}{10}$

116. $(x - 2)(x + 4) \leq 0$

117. $(3x - 1)(x - 4) > 0$

118. $x(x + 5) < 24$

119. $\frac{x - 3}{x - 7} \geq 0$

120. $\frac{2x}{x + 3} > 4$

Para los problemas 121-135 establezca una ecuación o una desigualdad para resolver cada problema.

121. Encuentre tres enteros impares consecutivos cuya suma sea 57.

122. Eric tiene una colección de 63 monedas que consisten en monedas de 5, 10 y 25 centavos. El número de monedas de 10 centavos es 6 más que el número de monedas de 5 centavos, y el número de monedas de 25 centavos es 1 más que el doble del número de monedas de 5 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la colección?

123. Uno de dos ángulos suplementarios es 4º más que un tercio del otro ángulo. Encuentre la medida de cada uno de los ángulos.

124. Si un anillo le cuesta \$300 a un joyero, ¿a qué precio debe venderlo para obtener una ganancia de 50% en el precio de venta?

125. Beth invirtió cierta cantidad de dinero a 8% y \$300 más que dicha cantidad a 9%. Su interés anual total fue de \$316. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

126. Dos trenes salen de la misma estación al mismo tiempo, uno viaja al este y el otro hacia el oeste. Al final de $4\frac{1}{2}$ horas, están separados 639 millas. Si la rapidez del tren que viaja al este es 10 millas por hora más rápido que el otro tren, encuentre sus rapideces.

127. Un radiador de 10 cuartos contiene una solución de anticongelante al 50%. ¿Cuánto necesita drenar y sustituir con anticongelante puro para obtener una solución de anticongelante a 70%?

128. Sam tira rondas de 70, 73 y 76 los primeros 3 días en un torneo de golf. ¿Cuánto debe tirar el cuarto día del torneo para promediar 72 o menos para los 4 días?

129. El cubo de un número es igual a nueve veces el mismo número. Encuentre el número.

130. Una tira de ancho uniforme se cortará de ambos lados y ambos extremos de una hoja de papel que mide 8 por 14 pulgadas, para reducir el tamaño del papel a un área de 72 pulgadas cuadradas. Encuentre el ancho de la tira.

131. Una suma de \$2450 se dividirá entre dos personas a la razón de 3 a 4. ¿Cuánto recibe cada persona?

132. Al trabajar juntos, Sue y Dean completan una tarea en $1\frac{1}{5}$ horas. Dean puede hacer la tarea en 2 horas. ¿Cuánto tardará Sue en completar la tarea?

133. Dudley compró algunas acciones por \$300. Un mes después las vende todas, menos 10, con una ganancia de \$5 por acción y vuelve a obtener su inversión original de \$300. ¿Cuántas acciones compró originalmente y a qué precio por acción?

134. El dígito de unidades de un número de dos dígitos es 1 más que el doble del dígito de decenas. La suma de los dígitos es 10. Encuentre el número.

135. La suma de los dos ángulos más pequeños de un triángulo es 40º menos que el otro ángulo. La suma de los ángulos más pequeño y más grande es el doble del otro ángulo. Encuentre las medidas de los tres ángulos del triángulo.

11

Sistemas de ecuaciones

Cuando mezcla diferentes soluciones, un químico podría usar un sistema de ecuaciones para determinar cuánto de cada solución necesita para producir una concentración específica.

Una solución salina al 10% se mezclará con una solución salina al 20% para producir 20 galones de una solución salina al 17.5%. ¿Cuántos galones de la solución al 10% y cuántos galones de la solución al 20% debe mezclar? Las dos ecuaciones, $x + y = 20$ y $0.10x + 0.20y = 0.175(20)$, representan algebraicamente las condiciones del problema; x representa el número de galones de la solución al 10% y y representa el número de galones de la solución al 20%. Las dos ecuaciones, consideradas en conjunto, forman un sistema de ecuaciones lineales y el problema se puede resolver al solucionar el sistema de ecuaciones.

Durante la mayor parte de este capítulo se considerarán sistemas de ecuaciones lineales y sus aplicaciones. Se estudiarán varias técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

11.1 Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

En el capítulo 7 se afirmó que cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son números reales (A y B no son cero), es una **ecuación lineal** con las dos variables, x y y, y su gráfica es una línea recta. Dos ecuaciones lineales con dos variables consideradas en conjunto forman un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables**, como se ilustra mediante los siguientes ejemplos:

$$\begin{pmatrix} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3x + 2y = 1 \\ 5x - 2y = 23 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4x - 5y = 21 \\ -3x + y = -7 \end{pmatrix}$$

Resolver tal sistema significa encontrar todos los pares ordenados que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones en el sistema. Por ejemplo, si grafica las dos ecuaciones $x + y = 6$ y $x - y = 2$ sobre el mismo conjunto de ejes, como en la figura 11.1, entonces el par ordenado asociado con el punto de intersección de las dos líneas es la **solución del sistema**. Por tanto, se dice que $\{(4, 2)\}$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{pmatrix}$$

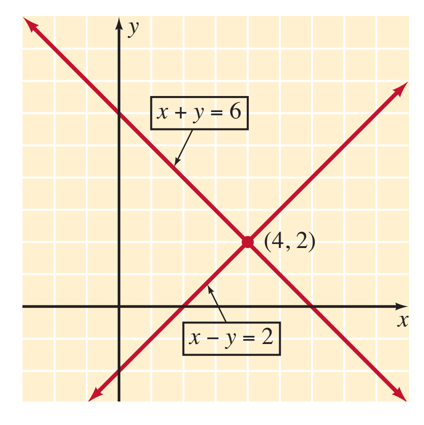


Figura 11.1

Para comprobar la solución, sustituya x por 4 y y por 2 en las dos ecuaciones.

$x + y = 6$ se convierte en $4 + 2 = 6$, un enunciado verdadero

$x - y = 2$ se convierte en $4 - 2 = 2$, un enunciado verdadero

Puesto que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una línea recta, pueden ocurrir tres posibles situaciones cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Estas situaciones se muestran en la figura 11.2.

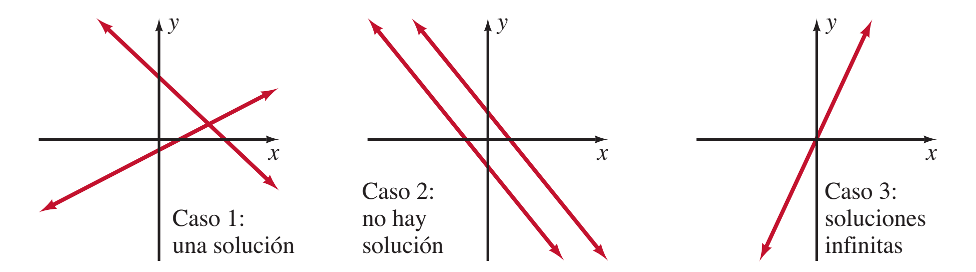


Figura 11.2

Caso 1 Las gráficas de las dos ecuaciones son dos rectas que se intersecan en un punto. Existe exactamente *una solución* y el sistema se llama **sistema consistente**.

Caso 2 Las gráficas de las dos ecuaciones son rectas paralelas. *No hay solución* y el sistema se llama **sistema inconsistente**.

Caso 3 Las gráficas de las dos ecuaciones son la misma línea y existen *infinitas soluciones* del sistema. Cualquier par de números reales que satisfaga una de las ecuaciones también satisface la otra ecuación, y se dice que las ecuaciones son dependientes.

Por tanto, conforme resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, puede esperar uno de tres resultados: el sistema *no* tendrá soluciones, *un* par ordenado como solución o *infinitos* pares ordenados como soluciones.

El método de sustitución

Resolver sistemas específicos de ecuaciones mediante graficación requiere gráficas precisas. Sin embargo, a menos que las soluciones sean enteras, es difícil obtener soluciones exactas a partir de una gráfica. Por tanto, se considerarán algunas otras técnicas para resolver sistemas de ecuaciones.

El **método de sustitución**, que funciona especialmente bien con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se describe del modo siguiente:

Paso 1 Resuelva una de las ecuaciones para una variable en términos de la otra. (Si es posible, elija la que evite fracciones.)

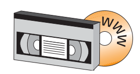
Paso 2 Sustituya la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación, lo que produce una ecuación con una variable.

Paso 3 Resuelva la ecuación obtenida en el paso 2.

Paso 4 Use la solución obtenida en el paso 3, junto con la expresión obtenida en el paso 1, para determinar la solución del sistema.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} x - 3y = -25 \\ 4x + 5y = 19 \end{pmatrix}$



Solución

Resuelva la primera ecuación para x en términos de y para producir

$$x = 3y - 25$$

Sustituya x por $3y - 25$ en la segunda ecuación y resuelva para y.

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 19 \\ 4(3y - 25) + 5y &= 19 \\ 12y - 100 + 5y &= 19 \\ 17y &= 119 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

A continuación sustituya y por 7 en la ecuación $x = 3y - 25$ para obtener

$$x = 3(7) - 25 = -4$$

El conjunto solución del sistema dado es $\{(-4, 7)\}$. (Debe comprobar esta solución en las dos ecuaciones originales.) ■

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 5x + 9y = -2 \\ 2x + 4y = -1 \end{pmatrix}$

Solución

Un vistazo al sistema debe indicar que resolver cualquier ecuación para cualquier variable producirá una forma fraccionaria, así que use sólo la primera ecuación y resuelva para x en términos de y.

$$\begin{aligned} 5x + 9y &= -2 \\ 5x &= -9y - 2 \\ x &= \frac{-9y - 2}{5} \end{aligned}$$

Ahora puede sustituir x con este valor en la segunda ecuación y resolver para y.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -1 \\ 2\left(\frac{-9y - 2}{5}\right) + 4y &= -1 \\ 2(-9y - 2) + 20y &= -5 \qquad \text{Multiplique ambos lados por 5.} \\ -18y - 4 + 20y &= -5 \\ 2y - 4 &= -5 \\ 2y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora puede sustituir y por $-\frac{1}{2}$ en $x = \frac{-9y - 2}{5}$

$$x = \frac{-9\left(-\frac{1}{2}\right) - 2}{5} = \frac{\frac{9}{2} - 2}{5} = \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$. ■

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 6x - 4y = 18 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Solución

La segunda ecuación está dada en forma adecuada para comenzar el proceso de sustitución. Sustituya y por $\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ en la primera ecuación para producir

$$\begin{aligned} 6x - 4y &= 18 \\ 6x - 4\left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\right) &= 18 \\ 6x - 6x + 18 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

La obtención de un enunciado numérico verdadero ($18 = 18$) indica que el sistema tiene infinitas soluciones. Cualquier par ordenado que satisfaga una de las ecuaciones también satisfará la otra ecuación. Por tanto, en la segunda ecuación del sistema original, si se hace $x = k$, entonces $y = \frac{3}{2}k - \frac{9}{2}$. En consecuencia, el conjunto solución se puede expresar como $\left\{\left(k, \frac{3}{2}k - \frac{9}{2}\right) \mid k \text{ es un número real}\right\}$. Si requiere algunas soluciones específicas se pueden generar mediante el par ordenado $\left(k, \frac{3}{2}k - \frac{9}{2}\right)$. Por ejemplo, si $k = 1$, entonces se obtiene $\frac{3}{2}(1) - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$. Por tanto, el par ordenado $(1, -3)$ es miembro del conjunto solución del sistema dado. ■

■ El método de eliminación por adición

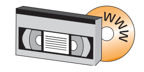
Ahora considere el **método de eliminación por adición** para resolver un sistema de ecuaciones. Éste es un método muy importante porque es la base para desarrollar otras técnicas que resuelven sistemas que contienen muchas ecuaciones y variables.

El método requiere sustituir sistemas de ecuaciones con *sistemas equivalentes más simples* hasta obtener un sistema donde las soluciones sean obvias. Los **sistemas equivalentes** de ecuaciones son sistemas que tienen exactamente el mismo conjunto solución. Las siguientes operaciones o transformaciones se aplican a un sistema de ecuaciones para producir un sistema equivalente:

1. Cualesquiera dos ecuaciones del sistema se pueden intercambiar.
2. Ambos lados de cualquier ecuación del sistema se pueden multiplicar por la suma de dicha ecuación y un múltiplo distinto de cero de otra ecuación.
3. Cualquier ecuación del sistema puede ser remplazada por la suma de la ecuación y un múltiplo distinto de cero de otra ecuación.

EJEMPLO 4

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 3x + 5y = -9 \\ 2x - 3y = 13 \end{pmatrix}$ (1) (2)



Solución

Puede sustituir el sistema dado con un sistema equivalente al multiplicar la ecuación (2) por −3.

$$\begin{pmatrix} 3x + 5y = -9 \\ -6x + 9y = -39 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Ahora sustituya la ecuación (4) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (3) por 2 y sume este resultado a la ecuación (4).

$$\begin{pmatrix} 3x + 5y = -9 \\ 19y = -57 \end{pmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

A partir de la ecuación (6) se puede determinar fácilmente que $y = -3$. Entonces, al sustituir y por −3 en la ecuación (5) se produce

$$3x + 5(-3) = -9$$
$$3x - 15 = -9$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

El conjunto solución para el sistema dado es $\{(2, -3)\}$. ■

Observaciones: Se usa un formato para el método de eliminación por adición que resalta el uso de sistemas equivalentes. En la sección 11.3 este formato conducirá de manera natural a un enfoque que usa matrices. En consecuencia, es benéfico resaltar en este momento el uso de los sistemas equivalentes.

EJEMPLO 5

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -4 \\ \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} (7) \\ (8) \end{matrix}$$

Solución

El sistema dado se puede sustituir con un sistema equivalente al multiplicar la ecuación (7) por 6 y la ecuación (8) por 4.

$$\begin{pmatrix} 3x + 4y = -24 \\ x - 6y = 80 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (9) \\ (10) \end{matrix}$$

Ahora intercambie las ecuaciones (9) y (10).

$$\begin{pmatrix} x - 6y = 80 \\ 3x + 4y = -24 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (11) \\ (12) \end{matrix}$$

Puede sustituir la ecuación (12) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (11) por -3 y sumar este resultado a la ecuación (12).

$$\begin{pmatrix} x - 6y = 80 \\ 22y = -264 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (13) \\ (14) \end{matrix}$$

A partir de la ecuación (14) puede determinar que $y = -12$. Entonces, sustituir y por -12 en la ecuación (13) produce

$$x - 6(-12) = 80$$

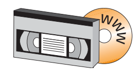
$$x + 72 = 80$$

$$x = 8$$

El conjunto solución del sistema dado es $\{(8, -12)\}$. (¡Compruébelo!) ■

EJEMPLO 6

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} x - 4y = 9 \\ x - 4y = 3 \end{pmatrix}$ (15) (16)



Solución

Puede sustituir la ecuación (16) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (15) por -1 y sumar este resultado a la ecuación (16).

$$\begin{pmatrix} x - 4y = 9 \\ 0 = -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (17) \\ (18) \end{matrix}$$

El enunciado $0 = -6$ es una contradicción y, por tanto, el sistema original es *inconsistente*; no tiene solución. El conjunto solución es $\varnothing$. ■

Tanto el método de eliminación por adición como el de sustitución se pueden usar para obtener soluciones exactas para cualquier sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En ocasiones es cuestión de decidir cuál método usar en un sistema particular. Algunos sistemas tienden hacia uno u otro de los métodos en virtud del formato original de las ecuaciones. Esta idea se ilustrará en un momento cuando se resuelvan algunos problemas verbales.

Uso de sistemas para resolver problemas

Muchos problemas verbales que se resolvieron anteriormente en este texto, con una variable y una ecuación, también se pueden resolver al usar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. De hecho, en muchos de estos problemas, resulta más natural usar dos variables y dos ecuaciones.

La expresión de dos variables, $10t + u$, se puede usar para representar cualesquier número entero positivo de dos dígitos. La t representa el dígito de las decenas, y la u representa las unidades. Por ejemplo, si $t = 4$ y $u = 8$, entonces $10t + u$ se convierte en $10(4) + 8 = 48$. Ahora use esta representación general para que un número de dos dígitos le ayude a resolver un problema.

PROBLEMA 1

El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es 1 más que el doble del dígito de las decenas. El número con los dígitos invertidos es 45 más grande que el número original. Encuentre el número original.

Solución

Sea u el dígito de las unidades del número original y t el dígito de las decenas. Entonces $10t + u$ representa el número original y $10u + t$ representa el nuevo número con los dígitos invertidos. El problema se traduce en el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} u = 2t + 1 \\ 10u + t = 10t + u + 45 \end{pmatrix}$$

El dígito de las unidades es 1 más que el doble del dígito de las decenas.

El número con los dígitos invertidos es 45 más grande que el número original.

Simplifique la segunda ecuación y el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} u = 2t + 1 \\ u - t = 5 \end{pmatrix}$$

Debido a la forma de la primera ecuación, este sistema tiende a resolverse mediante el método de sustitución. Sustituya u por $2t + 1$ en la segunda ecuación para producir

$$(2t + 1) - t = 5$$
$$t + 1 = 5$$
$$t = 4$$

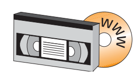
Ahora sustituya t con 4 en la ecuación $u = 2t + 1$ para obtener

$$u = 2(4) + 1 = 9$$

El dígito de las decenas es 4 y el dígito de las unidades es 9, de modo que el número es 49. ■

PROBLEMA 2

Lucinda invirtió $950, una parte a 11% de interés y el resto a 12%. Su ingreso anual total por las dos inversiones fue de $111.50. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?



Solución

Sea x la cantidad invertida a 11% y y la cantidad invertida a 12%. El problema se traduce en el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x + y = 950 \\ 0.11x + 0.12y = 111.50 \end{pmatrix}$$

← Las dos inversiones totalizan $950.
← El interés anual de las dos inversiones totaliza $111.50.

Multiplique la segunda ecuación por 100 para producir un sistema equivalente.

$$\begin{pmatrix} x + y = 950 \\ 11x + 12y = 11\ 150 \end{pmatrix}$$

Puesto que ninguna ecuación se resuelve para una variable en términos de la otra, use el método de eliminación por adición para resolver el sistema. La segunda ecuación se puede sustituir con una ecuación formada al multiplicar la primera ecuación por -11 y sumar este resultado a la segunda ecuación.

$$\begin{pmatrix} x + y = 950 \\ y = 700 \end{pmatrix}$$

Ahora sustituya y por 700 en la ecuación $x + y = 950$.

$$x + 700 = 950$$

$$x = 250$$

Por tanto, Lucinda invirtió $250 a 11% y $700 a 12%. ■

En el ejemplo final de esta sección se usará una herramienta de graficación para resolver un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 7

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 1.14x + 2.35y = -7.12 \\ 3.26x - 5.05y = 26.72 \end{pmatrix}$

Solución

Primero es necesario resolver cada ecuación para y en términos de x. Por tanto, el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} y = \dfrac{-7.12 - 1.14x}{2.35} \\ y = \dfrac{3.26x - 26.72}{5.05} \end{pmatrix}$$

Ahora puede ingresar ambas ecuaciones en una herramienta de graficación y obtener la figura 11.3. A partir de esta figura parece que el punto de intersección está aproximadamente en $x = 2$ y $y = -4$. Mediante sustitución directa en las ecuaciones dadas puede verificar que el punto de intersección es exactamente $(2, -4)$.

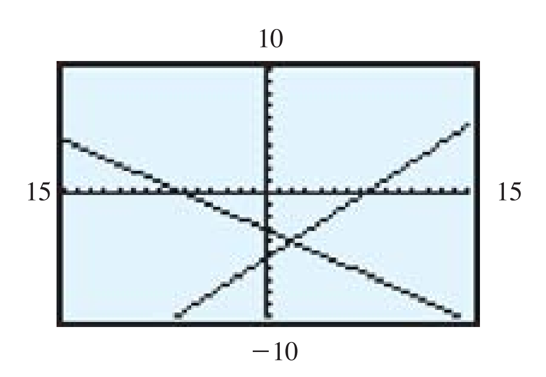


Figura 11.3

■

Conjunto de problemas 11.1

Para los problemas 1-10 use el enfoque de graficación para determinar si el sistema es consistente, es inconsistente o las ecuaciones son dependientes. Si el sistema es consistente, encuentre el conjunto solución a partir de la gráfica y compruébelo.

1. $\left(\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right)$

2. $\left(\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ x - 2y = -7 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{l} 4x + 3y = -5 \\ 2x - 3y = -7 \end{array}\right)$

4. $\left(\begin{array}{l} 2x - y = 9 \\ 4x - 2y = 11 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 9 \\ 4x + 2y = 72 \end{array}\right)$

6. $\left(\begin{array}{l} 5x + 2y = -9 \\ 4x - 3y = 2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 3 \\ x + 4y = -8 \end{array}\right)$

8. $\left(\begin{array}{l} 4x - 9y = -60 \\ \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}y = -5 \end{array}\right)$

9. $\left(\begin{array}{l} x - \frac{y}{2} = -4 \\ 8x - 4y = -1 \end{array}\right)$

10. $\left(\begin{array}{l} 3x - 2y = 7 \\ 6x + 5y = -4 \end{array}\right)$

Para los problemas 11-28 resuelva cada sistema usando el método de sustitución.

11. $\left(\begin{array}{l} x + y = 16 \\ y = x + 2 \end{array}\right)$

12. $\left(\begin{array}{l} 2x + 3y = -5 \\ y = 2x + 9 \end{array}\right)$

13. $\left(\begin{array}{l} x = 3y - 25 \\ 4x + 5y = 19 \end{array}\right)$

14. $\left(\begin{array}{l} 3x - 5y = 25 \\ x = y + 7 \end{array}\right)$

15. $\left(\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ 5x - 7y = 9 \end{array}\right)$

16. $\left(\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x + 5 \\ 4x - 3y = -1 \end{array}\right)$

17. $\left(\begin{array}{l} a = 4b + 13 \\ 3a + 6b = -33 \end{array}\right)$

18. $\left(\begin{array}{l} 9a - 2b = 28 \\ b = -3a + 1 \end{array}\right)$

19. $\left(\begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{array}\right)$

20. $\left(\begin{array}{l} t + u = 11 \\ t = u + 7 \end{array}\right)$

21. $\left(\begin{array}{l} u = t - 2 \\ t + u = 12 \end{array}\right)$

22. $\left(\begin{array}{l} y = 5x - 9 \\ 5x - y = 9 \end{array}\right)$

23. $\left(\begin{array}{l} 4x + 3y = -7 \\ 3x - 2y = 16 \end{array}\right)$

24. $\left(\begin{array}{l} 5x - 3y = -34 \\ 2x + 7y = -30 \end{array}\right)$

25. $\left(\begin{array}{l} 5x - y = 4 \\ y = 5x + 9 \end{array}\right)$

26. $\left(\begin{array}{l} 2x + 3y = 3 \\ 4x - 9y = -4 \end{array}\right)$

27. $\left(\begin{array}{l} 4x - 5y = 3 \\ 8x + 15y = -24 \end{array}\right)$

28. $\left(\begin{array}{l} 4x + y = 9 \\ y = 15 - 4x \end{array}\right)$

Para los problemas 29-44 resuelva cada sistema usando el método de eliminación por adición.

29. $\left(\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ 5x - 2y = 23 \end{array}\right)$

30. $\left(\begin{array}{l} 4x + 3y = -22 \\ 4x - 5y = 26 \end{array}\right)$

31. $\begin{pmatrix} x - 3y = -22 \\ 2x + 7y = 60 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 6x - y = 3 \\ 5x + 3y = -9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 4x - 5y = 21 \\ 3x + 7y = -38 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 5x - 3y = -34 \\ 2x + 7y = -30 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 5x - 2y = 19 \\ 5x - 2y = 7 \end{pmatrix}$ **36.** $\begin{pmatrix} 4a + 2b = -4 \\ 6a - 5b = 18 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 5a + 6b = 8 \\ 2a - 15b = 9 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 7x + 2y = 11 \\ 7x + 2y = -4 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}s + \frac{1}{4}t = -1 \\ \frac{1}{2}s - \frac{1}{3}t = -7 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}s - \frac{2}{3}t = -3 \\ \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t = 7 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{2y}{5} = \frac{-23}{60} \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{3}{5} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{7}{80} \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \\ 4x + 6y = -1 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -\frac{3}{10} \\ 5x + 4y = -1 \end{pmatrix}$

Para los problemas 45-60 resuelva cada sistema usando el método de sustitución o el método de eliminación por adición, cualquiera que parezca más adecuado.

45. $\begin{pmatrix} 5x - y = -22 \\ 2x + 3y = -2 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} 4x + 5y = -41 \\ 3x - 2y = 21 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} x = 3y - 10 \\ x = -2y + 15 \end{pmatrix}$ **48.** $\begin{pmatrix} y = 4x - 24 \\ 7x + y = 42 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 3x - 5y = 9 \\ 6x - 10y = -1 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} y = \frac{2}{5}x - 3 \\ 4x - 7y = 33 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 22 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y = -9 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = -14 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} t = 2u + 2 \\ 9u - 9t = -45 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} 9u - 9t = 36 \\ u = 2t + 1 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} x + y = 1000 \\ 0.12x + 0.14y = 136 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} x + y = 10 \\ 0.3x + 0.7y = 4 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} y = 2x \\ 0.09x + 0.12y = 132 \end{pmatrix}$ **58.** $\begin{pmatrix} y = 3x \\ 0.1x + 0.11y = 64.5 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} x + y = 10.5 \\ 0.5x + 0.8y = 7.35 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 2x + y = 7.75 \\ 3x + 2y = 12.5 \end{pmatrix}$

Para los problemas 61-80 resuelva cada problema usando un sistema de ecuaciones.

61. La suma de dos números es 53 y su diferencia es 19. Encuentre los números.

62. La suma de dos números es −3 y su diferencia es 25. Encuentre los números.

63. La medida del mayor de dos ángulos complementarios es 15º más que cuatro veces la medida del ángulo más pequeño. Encuentre las medidas de ambos ángulos.

64. Suponga que un avión vuela con una rapidez constante bajo condiciones de viento invariables. Al viajar contra un viento frontal, el avión tarda 4 horas en recorrer 1540 millas. Al viajar con un viento de cola, el avión vuela 1365 millas en 3 horas. Encuentre la rapidez del avión y la rapidez del viento.

65. El dígito de las decenas de un número de dos dígitos es 1 más que tres veces el dígito de las unidades. Si la suma de los dígitos es 9, encuentre el número.

66. El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es 1 menos que el doble del dígito de las decenas. La suma de los dígitos es 8. Encuentre el número.

67. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Si los dígitos se invierten, el número recién formado es 9 más grande que el número original. Encuentre el número original.

68. El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es 1 menos que el doble del dígito de las decenas. Si los dígitos se invierten, el número recién formado es 27 más grande que el número original. Encuentre el número original.

69. Un hotel renta habitaciones dobles a $32 por día y las habitaciones sencillas por $26 diarios. Si un día se rentan 23 habitaciones para un total de $688, ¿cuántas habitaciones de cada tipo se rentaron?

70. Un complejo de departamentos renta departamentos de una recámara por $325 al mes y departamentos de dos habitaciones por $375 por mes. Un mes el número de departamentos de una recámara rentados fue el doble que el número de departamentos de dos recámaras. Si el ingreso total por dicho mes fue de $12 300, ¿cuántos departamentos de cada tipo se rentaron?

71. El ingreso por una producción de teatro estudiantil fue de $10 000. El precio de un boleto de estudiante fue de $3, y los boletos para no estudiantes se vendieron en $5

cada uno. Se vendieron tres mil boletos. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

72. Michelle puede entrar a un pequeño negocio como socia plena y recibir un salario de $10 000 al año y 15% de las ganancias anuales, o puede ser gerente de ventas por un salario de $25 000 más 5% de las ganancias anuales. ¿Cuál debe ser la ganancia anual para que sus ingresos totales sean los mismos, ya sea que trabaje como socia plena o como gerente de ventas?

73. Melinda invirtió tres veces tanto dinero a 11% de interés anual, como el que invirtió a 9%. Su interés anual total de las dos inversiones fue de $210. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

74. Sam invirtió $1950, parte a 10% y el resto a 12% de interés anual. El ingreso anual sobre la inversión a 12% fue de $6 menos que el doble del ingreso de la inversión a 10%. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

75. Un día del verano pasado, Jim fue a practicar en su kayak en el río Little Susitna, en Alaska. Al remar río arriba contra la corriente, recorrió 20 millas en 4 horas. Luego dio la vuelta y remó el doble de rápido río abajo y, con la ayuda de la corriente, recorrió 19 millas en una hora. Encuentre la rapidez de la corriente.

76. Una solución contiene 30% de alcohol y una segunda solución contiene 70% de alcohol. ¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para tener 10 litros que contengan 40% de alcohol?

77. Bill compró 4 pelotas de tenis y 3 bolas de golf por un total de $10.25. Bret fue a la misma tienda y compró 2 pelotas de tenis y 5 bolas de golf por $11.25. ¿Cuál fue el precio de cada pelota de tenis y el de cada bola de golf?

78. Seis latas de gaseosa y 2 bolsas de papas fritas cuestan $5.12. A los mismos precios, 8 latas de gaseosa y 5 bolsas de papas fritas cuestan $9.86. Encuentre el precio por lata de gaseosa y el precio por bolsa de papas fritas.

79. Una caja registradora sólo contiene billetes de cinco y de diez dólares. Hay 12 billetes más de cinco dólares que de diez dólares. Si la caja contiene $330, encuentre el número de cada tipo de billete.

80. Brad tiene una colección de monedas de diez y 25 centavos que totalizan $47.50. El número de monedas de 25 centavos es 10 más que el doble del número de monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

81. Proporcione una descripción general de cómo usar el método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

82. Proporcione una descripción general de cómo usar el método de eliminación por adición para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

83. ¿Cuál método usaría para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 9x + 4y = 7 \\ 3x + 2y = 6 \end{pmatrix}$? ¿Por qué?

84. ¿Cuál método usaría para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x + 3y = 12 \\ 3x - y = 10 \end{pmatrix}$? ¿Por qué?

MÁS INVESTIGACIÓN

Un sistema como

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{19}{15} \\ -\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

no es un sistema lineal, pero se puede resolver usando el método de eliminación por adición del modo siguiente. Sume la primera ecuación a la segunda para producir el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{19}{15} \\ \frac{4}{y} = \frac{12}{15} \end{pmatrix}$$

Ahora resuelva $\frac{4}{y} = \frac{12}{15}$ para producir $y = 5$.

Sustituya y por 5 en la primera ecuación y resuelva para x, lo que produce

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{5}=\frac{19}{15}$$
$$\frac{2}{x}=\frac{10}{15}$$
$$10x=30$$
$$x=3$$

El conjunto solución del sistema original es $\{(3, 5)\}$.

Para los problemas 85-90 resuelva cada sistema.

85. $\begin{pmatrix} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{7}{12} \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{5}{12} \end{pmatrix}$

86. $\begin{pmatrix} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=2 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

87. $\begin{pmatrix} \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{13}{6} \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=0 \end{pmatrix}$

88. $\begin{pmatrix} \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=11 \\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-9 \end{pmatrix}$

89. $\begin{pmatrix} \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=23 \\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{23}{2} \end{pmatrix}$

90. $\begin{pmatrix} \frac{2}{x}-\frac{7}{y}=\frac{9}{10} \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=-\frac{41}{20} \end{pmatrix}$

91. Considere el sistema lineal $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{pmatrix}$.

(a) Pruebe que este sistema tiene exactamente una solución si y sólo si $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

(b) Pruebe que este sistema no tiene solución si y sólo si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

(c) Pruebe que este sistema tiene infinitas soluciones si y sólo si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

92. Para cada uno de los siguientes sistemas use los resultados del problema 91 para determinar si el sistema es consistente o inconsistente o si las ecuaciones son dependientes.

(a) $\begin{pmatrix} 5x+y=9 \\ x-5y=4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3x-2y=14 \\ 2x+3y=9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x-7y=4 \\ x-7y=9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3x-5y=10 \\ 6x-10y=1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3x+6y=2 \\ \frac{3}{5}x+\frac{6}{5}y=\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=2 \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{5}y=9 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 7x+9y=14 \\ 8x-3y=12 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 4x-5y=3 \\ 12x-15y=9 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

93. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones en el problema 92, use su calculadora graficadora para determinar si el sistema es consistente o inconsistente o si las ecuaciones son dependientes.

94. Use su calculadora graficadora para determinar el conjunto solución para cada uno de los siguientes sistemas. Asegúrese de comprobar sus respuestas.

(a) $\begin{pmatrix} y=3x-1 \\ y=9-2x \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5x+y=-9 \\ 3x-2y=5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4x-3y=18 \\ 5x+6y=3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2x-y=20 \\ 7x+y=79 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 13x-12y=37 \\ 15x+13y=-11 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1.98x+2.49y=13.92 \\ 1.19x+3.45y=16.18 \end{pmatrix}$

11.2 Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

Considere una ecuación lineal con tres variables x, y y z, tales que $3x - 2y + z = 7$. Se dice que cualquier **tripleta ordenada** (x, y, z) que hace a la ecuación un enunciado numérico verdadero es una *solución* de la ecuación. Por ejemplo, la tripleta ordenada (2, 1, 3) es una solución porque $3(2) - 2(1) + 3 = 7$. Sin embargo, la tripleta ordenada (5, 2, 4) no es una solución porque $3(5) - 2(2) + 4 \neq 7$. En el conjunto solución existen infinitas soluciones.

Observaciones: La idea de una ecuación lineal se generaliza para incluir ecuaciones de más de dos variables. Por tanto, una ecuación como $5x - 2y + 9z = 8$ se llama ecuación lineal con tres variables, la ecuación $5x - 7y + 2z - 11w = 1$ se llama ecuación lineal con cuatro variables, etcétera.

Para *resolver* un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, como

$$\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = 13 \\ 4x + 2y + 5z = 30 \\ 5x - 3y - z = 3 \end{pmatrix}$$

significa encontrar todos los pares ordenados que satisfacen las tres ecuaciones. En otras palabras, el conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las tres ecuaciones en el sistema.

La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano*, no una recta. De hecho, graficar ecuaciones con tres variables requiere el uso de un sistema coordenado tridimensional. En consecuencia, usar un enfoque de graficación para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables no es del todo práctico. Sin embargo, un análisis gráfico simple sí proporciona algunos indicios de qué puede esperar mientras comienza a resolver tales sistemas.

En general, puesto que cada ecuación lineal con tres variables produce un plano, un sistema de tres de tales ecuaciones produce tres planos. Existen varias formas en las que se pueden relacionar tres planos. Por ejemplo, pueden ser mutuamente paralelos o dos de los planos pueden ser paralelos, y el tercero intersecar los otros dos. (¡Tal vez quiera analizar todas las otras posibilidades para los tres planos!) No obstante, para los propósitos de este momento, necesita darse cuenta de que, desde un punto de vista de un conjunto solución, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables produce una de las siguientes posibilidades:

1. Existe *una tripleta ordenada* que satisface las tres ecuaciones. Los tres planos tienen un *punto* de intersección común, como se indica en la figura 11.4.

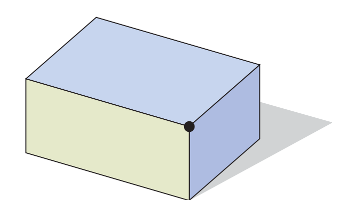


Figura 11.4

2. Existen *infinitas tripletas ordenadas* en el conjunto solución, todas las cuales son coordenadas de puntos sobre una *recta* común a los tres planos. Esto puede ocurrir si los tres planos tienen una recta de intersección común, como en la figura 11.5(a), o si dos de los planos coinciden y el tercer plano los interseca como en la figura 11.5(b).

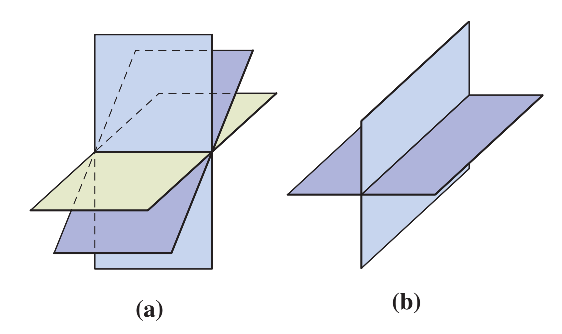


Figura 11.5

3. Existen *infinitas tripletas ordenadas* en el conjunto solución, todas las cuales son coordenadas de puntos sobre un *plano*. Esto puede ocurrir si los tres planos coinciden, como se ilustra en la figura 11.6.

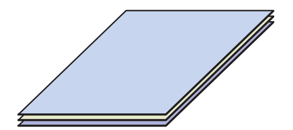
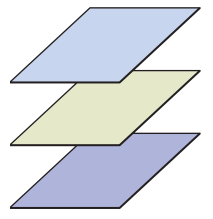
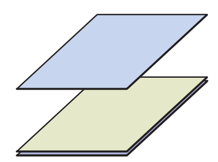


Figura 11.6

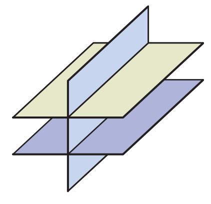
4. El conjunto solución está *vacío*; por tanto, se escribe ∅. Esto puede ocurrir en varias formas, como se ilustra en la figura 11.7. Note que en cada situación no hay puntos comunes a los tres planos.



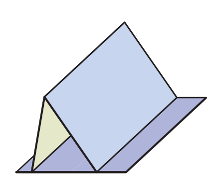
(a) Tres planos paralelos.



(b) Dos planos son paralelos y el tercero los interseca en rectas paralelas.



(c) Dos planos coinciden y el tercero es paralelo a los planos coincidentes.



(d) Ningún par de planos es paralelo, pero dos de ellos intersecan en una recta que es paralela al tercer plano.

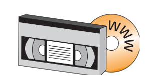
Figura 11.7

Ahora que conoce cuáles posibilidades existen, considere encontrar los conjuntos solución para algunos sistemas. El enfoque será el método de eliminación por adición, por medio del cual los sistemas se sustituyen con sistemas equivalentes hasta que se obtiene un sistema donde se puede determinar fácilmente el conjunto solución. Los detalles de este abordaje serán evidentes conforme trabaje los ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 4x - 3y - 2z = 5 \\ 5y + z = -11 \\ 3z = 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$



Solución

La forma de este sistema facilita la resolución. A partir de la ecuación (3) se obtiene $z = 4$. Entonces, al sustituir z por 4 en la ecuación (2), se obtiene

$$5y + 4 = -11$$
$$5y = -15$$
$$y = -3$$

Finalmente, al sustituir z por 4 y y por -3 en la ecuación (1) produce

$$4x - 3(-3) - 2(4) = 5$$
$$4x + 1 = 5$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$

Por tanto, el conjunto solución del sistema dado es $\{(1, -3, 4)\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 22 \\ 2x - 3y - z = 5 \\ 3x + y - 5z = -32 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Solución

La ecuación (5) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (4) por -2 y sumar este resultado a la ecuación (5). La ecuación (6) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (4) por -3 y sumar este resultado a la ecuación (6). Se produce el siguiente sistema equivalente, en el que las ecuaciones (8) y (9) contienen solamente las dos variables y y z:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 22 \\ y - 7z = -39 \\ 7y - 14z = -98 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix}$$

La ecuación (9) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (8) por −7 y sumar este resultado a la ecuación (9). Esto produce el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 22 \\ y - 7z = -39 \\ 35z = 175 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix}$$

A partir de la ecuación (12) se obtiene $z = 5$. Entonces, al sustituir z por 5 en la ecuación (11), se obtiene

$$y - 7(5) = -39$$

$$y - 35 = -39$$

$$y = -4$$

Finalmente, sustituir y por −4 y z por 5 en la ecuación (10) produce

$$x - 2(-4) + 3(5) = 22$$

$$x + 8 + 15 = 22$$

$$x + 23 = 22$$

$$x = -1$$

El conjunto solución del sistema original es $\{(-1, -4, 5)\}$. (Tal vez deba comprobar esta tripleta ordenada en las tres ecuaciones originales.) ■

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = 13 \\ 5x - 3y - z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 30 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (13) \\ (14) \\ (15) \end{matrix}$$

Solución

La ecuación (14) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (13) por −3 y sumar este resultado a la ecuación (14). La ecuación (15) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (13) por 2 y sumar este resultado a la ecuación (15). Por tanto, se produce el siguiente sistema equivalente, en el que las ecuaciones (17) y (18) contienen solamente las dos variables x y z:

$$\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = 13 \\ -4x \quad - 7z = -36 \\ 10x \quad + 9z = 56 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (16) \\ (17) \\ (18) \end{matrix}$$

Ahora, si multiplica la ecuación (17) por 5 y la ecuación (18) por 2, se obtiene el siguiente sistema equivalente.

$$\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = 13 \\ -20x \quad - 35z = -180 \\ 20x \quad + 18z = 112 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (19) \\ (20) \\ (21) \end{matrix}$$

La ecuación (21) se puede sustituir con la ecuación formada al sumar la ecuación (20) a la ecuación (21).

$$\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = 13 \\ -20x \quad - 35z = -180 \\ - 17z = -68 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (22) \\ (23) \\ (24) \end{matrix}$$

De la ecuación (24) se obtiene $z = 4$. Entonces puede sustituir z por 4 en la ecuación (23).

$$-20x - 35(4) = -180$$
$$-20x - 140 = -180$$
$$-20x = -40$$
$$x = 2$$

Ahora puede sustituir 2 en x y 4 en z en la ecuación (22).

$$3(2) - y + 2(4) = 13$$
$$6 - y + 8 = 13$$
$$-y + 14 = 13$$
$$-y = -1$$
$$y = 1$$

El conjunto solución del sistema original es $\{(2, 1, 4)\}$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y + z = 14 \\ 3x - 4y - 2z = -30 \\ 5x + 7y + 3z = 32 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (25) \\ (26) \\ (27) \end{matrix}$$

Solución

La ecuación (26) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (25) por 2 y sumar este resultado a la ecuación (26). La ecuación (27) se puede sustituir con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (25) por −3 y sumar este resultado a la ecuación (27). Se produce el siguiente sistema equivalente, en el que las ecuaciones (29) y (30) contienen solamente las dos variables x y y:

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y + z = 14 \\ 7x + 2y \quad = -2 \\ -x - 2y \quad = -10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (28) \\ (29) \\ (30) \end{matrix}$$

Ahora, la ecuación (30) se puede sustituir con la ecuación formada al sumar la ecuación (29) a la ecuación (30).

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y + z = 14 \\ 7x + 2y \quad = -2 \\ 6x \quad = -12 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (31) \\ (32) \\ (33) \end{matrix}$$

A partir de la ecuación (33) se obtiene $x = -2$. Luego, al sustituir -2 en x en la ecuación (32), se obtiene

$$7(-2) + 2y = -2$$
$$2y = 12$$
$$y = 6$$

Finalmente, sustituir y por 6 y x por -2 en la ecuación (31) produce

$$2(-2) + 3(6) + z = 14$$
$$14 + z = 14$$
$$z = 0$$

El conjunto solución del sistema original es $\{(-2, 6, 0)\}$. ■

La habilidad para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas mejora sus capacidades para resolver problemas. Esta sección concluye con un problema que se puede resolver usando tal sistema.

PROBLEMA 1

Una pequeña compañía que fabrica equipo deportivo produce tres estilos diferentes de camisetas de golf. Cada estilo de camiseta requiere los servicios de tres departamentos, como se indica en la siguiente tabla:

	Estilo A	Estilo B	Estilo C
Departamento de corte	0.1 hora	0.1 hora	0.3 hora
Departamento de costura	0.3 hora	0.2 hora	0.4 hora
Departamento de empacado	0.1 hora	0.2 hora	0.1 hora

Los departamentos de corte, costura y empacado tienen a su disposición un máximo de 340, 580 y 255 horas laborables por semana, respectivamente. ¿Cuántas camisetas de cada estilo se deben producir cada semana, de modo que la compañía opere a toda su capacidad?

Solución

Sea a el número de camisetas del estilo A producida por semana, b el número del estilo B por semana y c el número del estilo C por semana. Entonces el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0.1a + 0.1b + 0.3c = 340 \\ 0.3a + 0.2b + 0.4c = 580 \\ 0.1a + 0.2b + 0.1c = 255 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Departamento de corte} \\ \leftarrow \text{Departamento de costura} \\ \leftarrow \text{Departamento de empacado} \end{matrix}$$

Resolver este sistema (se dejarán los detalles para que usted los realice) produce $a = 500$, $b = 650$ y $c = 750$. Por tanto, la compañía debe producir 500 camisetas de golf de estilo A, 650 del estilo B y 750 del estilo C por semana. ■

Conjunto de problemas 11.2

Para los problemas 1-20 resuelva cada sistema.

1. $\begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z = 10 \\ 5y - 2z = -16 \\ 3z = 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -3x + 2y + z = -9 \\ 4x - 3z = 18 \\ 4z = -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = 2 \\ 3y - z = 13 \\ 3y + 5z = 25 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2x + 3y - 4z = -10 \\ 2y + 3z = 16 \\ 2y - 5z = -16 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3x + 2y - 2z = 14 \\ x - 6z = 16 \\ 2x + 5z = -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3x + 2y - z = -11 \\ 2x - 3y = -1 \\ 4x + 5y = -13 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + 5z = 17 \\ 3x - 4y - 2z = 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = -4 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \\ -3x - 6y + 7z = 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \\ 5x + y - 6z = -32 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = -14 \\ 4x + 2y - z = 12 \\ 6x - 3y + 4z = -22 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3x + 2y - z = -11 \\ 2x - 3y + 4z = 11 \\ 5x + y - 2z = -17 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 9x + 4y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 6 \\ 6x - 8y - 3z = 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2x + 3y - 4z = -10 \\ 4x - 5y + 3z = 2 \\ 2y + z = 8 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = 2 \\ 3x - z = -8 \\ 2x - 3y + 5z = -9 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3x + 2y - 2z = 14 \\ 2x - 5y + 3z = 7 \\ 4x - 3y + 7z = 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4x + 3y - 2z = -11 \\ 3x - 7y + 3z = 10 \\ 9x - 8y + 5z = 9 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z = -12 \\ 4x + 2y - 3z = -13 \\ 6x - 5y + 7z = -31 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3x + 5y - 2z = -27 \\ 5x - 2y + 4z = 27 \\ 7x + 3y - 6z = -55 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5x - 3y - 6z = 22 \\ x - y + z = -3 \\ -3x + 7y - 5z = 23 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 4x + 3y - 5z = -29 \\ 3x - 7y - z = -19 \\ 2x + 5y + 2z = -10 \end{pmatrix}$

Para los problemas 21-30 resuelva cada problema al establecer y resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

21. Una tienda de regalos realiza una mezcla de almendras, pacanas y cacahuates, que vende por \$3.50 la libra, \$4 por libra y \$2 por libra, respectivamente. El tendero quiere hacer 20 libras de la mezcla para vender a \$2.70 la libra. El número de libras de cacahuates será tres veces el número de libras de pacanas. Encuentre el número de libras de cada uno a usar en la mezcla.

22. El organizador de una comida campestre para una iglesia ordenó ensalada de col, ensalada de papa y frijoles con un peso de 50 libras. Había tres veces tanta ensalada de papa como de ensalada de col. El número de libras de frijoles fue 6 menos que el número de libras de ensalada de papa. Encuentre el número de libras de cada una.

23. Una caja contiene \$7.15 en monedas de cinco, diez y 25 centavos. Existen 42 monedas en total, y la suma de los números de monedas de cinco y diez centavos es 2 me-

nos que el número de monedas de 25 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

24. Un puñado de 65 monedas consiste de monedas de uno, cinco y diez centavos. El número de monedas de cinco centavos es 4 menos que el doble del número de monedas de 1 centavo, y hay 13 más monedas de diez centavos que monedas de cinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

25. La medida del ángulo más grande de un triángulo es el doble de la medida del ángulo más pequeño. La suma del ángulo más pequeño y el ángulo más grande es el doble del otro ángulo. Encuentre la medida de cada ángulo.

26. El perímetro de un triángulo es de 45 centímetros. El lado más largo es 4 centímetros menor que el doble del lado más corto. La suma de las longitudes de los lados más corto y más largo es 7 centímetros menor que tres veces la longitud del lado restante. Encuentre las longitudes de los tres lados del triángulo.

27. Parte de $3000 se invierte a 12%, otra parte a 13% y el resto a 14% de interés anual. El ingreso anual total de las tres inversiones es $400. La suma de las cantidades invertidas a 12 y 13% es igual a la cantidad invertida a 14%. ¿Cuánto se invierte a cada tasa?

28. Diferentes cantidades se invierten a 10, 11 y 12% de interés anual. La cantidad invertida a 11% es $300 más que la invertida a 10%, y el ingreso anual total de las tres inversiones es de $324. Se invierte un total de $2900. Encuentre la cantidad invertida a cada tasa.

29. Una pequeña compañía fabrica tres tipos diferentes de pajareras. Cada tipo requiere los servicios de tres departamentos diferentes, como se indica en la siguiente tabla.

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Departamento de corte	0.1 hora	0.2 hora	0.1 hora
Departamento de empacado	0.4 hora	0.4 hora	0.3 hora
Departamento de costura	0.2 hora	0.1 hora	0.3 hora

Los departamentos de corte, empacado y costura tienen a su disposición un máximo de 35, 95 y 62.5 horas laborables por semana, respectivamente. ¿Cuántas pajareras de cada tipo debe fabricar por semana, de modo que la compañía opere a toda su capacidad?

30. Cierta dieta consiste de los platos A, B y C. Cada porción de A tiene 1 gramo de grasa, 2 gramos de carbohidrato y 4 gramos de proteína. Cada porción de B tiene 2 gramos de grasa, 1 gramo de carbohidrato y 3 gramos de proteína. Cada porción de C tiene 2 gramos de grasa, 4 gramos de carbohidrato y 3 gramos de proteína. La dieta permite 15 gramos de grasa, 24 gramos de carbohidrato y 30 gramos de proteína. ¿Cuántas porciones de cada plato puede comer?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

31. Proporcione una descripción general de cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

32. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = -23 \\ 5y - 2z = 32 \\ 4z = -24 \end{pmatrix}$$

33. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y + 7z = 9 \\ x - 3z = 4 \\ 2x + z = 9 \end{pmatrix}$$

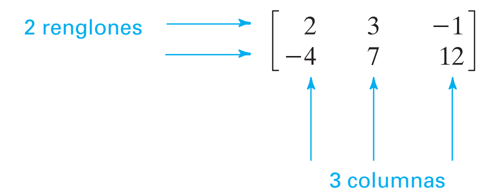
11.3 Enfoque matricial para resolver sistemas lineales

En las primeras dos secciones de este capítulo se descubrió que las técnicas de sustitución y de eliminación por adición funcionaban eficientemente con dos ecua-

ciones y dos incógnitas, pero comenzaban a volverse un tanto complicadas con tres ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, ahora comenzará a analizar algunas técnicas que se prestan para usar con sistemas de ecuaciones más grandes. Más aún, algunas de estas técnicas forman la base para usar una computadora en la resolución de sistemas. Aun cuando estas técnicas están diseñadas principalmente para sistemas de ecuaciones grandes, se les estudiará en el contexto de sistemas pequeños, de modo que no se empantanará con los aspectos computacionales de las técnicas.

Matrices

Una **matriz** es un arreglo de números ordenados en filas horizontales y columnas verticales, y encerrado en corchetes. Por ejemplo, la matriz



tiene 2 renglones y 3 columnas y se llama matriz 2 × 3 (esto se lee “dos por tres”). Cada número en una matriz se llama **elemento** de la matriz. A continuación se presentan algunos ejemplos adicionales de matrices:

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}} \qquad \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -14 & 16 \end{bmatrix}} \qquad \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 7 & 14 \end{bmatrix}} \qquad \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}}$$

En general, una matriz de m filas y n columnas se llama matriz de **dimensión** $\boldsymbol{m \times n}$ u **orden** $\boldsymbol{m \times n}$.

Con cualquier sistema de ecuaciones lineales, se puede asociar una matriz que consista de los coeficientes y términos constantes. Por ejemplo, con el sistema

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{pmatrix}$$

se puede asociar la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

que comúnmente se llama **matriz aumentada** del sistema de ecuaciones. La línea rayada simplemente separa los coeficientes de los términos constantes y recuerda que se trabaja con una matriz aumentada.

En la sección 11.1 se mencionaron las operaciones o transformaciones que se pueden aplicar a un sistema de ecuaciones para producir un sistema equivalente.

Puesto que las matrices aumentadas son en esencia formas abreviadas de sistemas de ecuaciones lineales, existen transformaciones análogas que se pueden aplicar a matrices aumentadas. Estas transformaciones usualmente se conocen como **operaciones elementales de renglones** y se enuncian del modo siguiente:

> Para cualquier matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las siguientes operaciones elementales de renglón producirán una matriz de un sistema equivalente:
>
> **1.** Cualesquiera dos renglones de la matriz se pueden intercambiar.
>
> **2.** Cualquier renglón de la matriz se puede multiplicar por un número real distinto de cero.
>
> **3.** Cualquier renglón de la matriz se puede sustituir con la suma de un múltiplo distinto de cero de otro renglón más dicho renglón.

A continuación se ilustra el uso de las matrices aumentadas y las operaciones elementales de renglón para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 3y = -17 \\ 2x + 7y = 31 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & -17 \\ 2 & 7 & 31 \end{array}\right]$$

Sería adecuado cambiar esta matriz a una de la forma

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

donde se puede determinar fácilmente que la solución es $x = a$ y $y = b$. Comience por sumar -2 por renglón 1 a renglón 2 para producir un nuevo renglón 2.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & -17 \\ 0 & 13 & 65 \end{array}\right]$$

Ahora puede multiplicar el renglón 2 por $\frac{1}{13}$.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & -17 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Finalmente, puede sumar 3 veces al renglón 2 al renglón 1 para producir un nuevo renglón 1.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

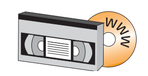
A partir de esta última matriz, se ve que $x = -2$ y $y = 5$. En otras palabras, el conjunto solución del sistema original es $\{(-2, 5)\}$. ■

Parece que el método matricial no proporciona mucho poder adicional para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, conforme los sistemas se vuelven más grandes, lo compacto del enfoque matricial se vuelve más conveniente. Considere un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = 15 \\ -2x - 3y + z = -15 \\ 4x + 9y - 4z = 49 \end{pmatrix}$$



Solución

La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 15 \\ -2 & -3 & 1 & -15 \\ 4 & 9 & -4 & 49 \end{array}\right]$$

Si el sistema tiene una solución única, entonces podrá cambiar la matriz aumentada a la forma

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

donde podrá leer la solución $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

Sume 2 veces el renglón 1 al renglón 2 para producir un nuevo renglón 2. Del mismo modo, sume -4 por el renglón 1 al renglón 3 para producir un nuevo renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 8 & -11 \end{array}\right]$$

Ahora sume -2 por el renglón 2 al renglón 1 para producir un nuevo renglón 1. Además, sume -1 por el renglón 2 al renglón 3 para producir un nuevo renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & -15 \\ 0 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right]$$

Ahora multiplique el renglón 3 por $\frac{1}{13}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & -15 \\ 0 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Finalmente, puede sumar −7 por el renglón 3 al renglón 1 para producir un nuevo renglón 1, y puede sumar 5 por el renglón 3 al renglón 2 para un nuevo renglón 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

A partir de esta última matriz el conjunto solución del sistema original es {(−1, 5, −2)}. ■

Las matrices finales de los ejemplos 1 y 2,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

se dice que están en **forma escalonada reducida**. En general, una matriz está en forma escalonada reducida si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Conforme se lee de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero de cada renglón es 1.

2. En la columna que contiene al 1 más a la izquierda de un renglón, todas las otras entradas son cero.

3. El 1 más a la izquierda de cualquier renglón está a la derecha del 1 más a la izquierda del renglón precedente.

4. Los renglones que contienen sólo ceros están abajo de todos los renglones que contienen entradas distintas a cero.

Igual que las matrices finales de los ejemplos 1 y 2, las siguientes están en forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

En contraste, las siguientes matrices *no* están en forma escalonada reducida por la razón indicada bajo cada matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

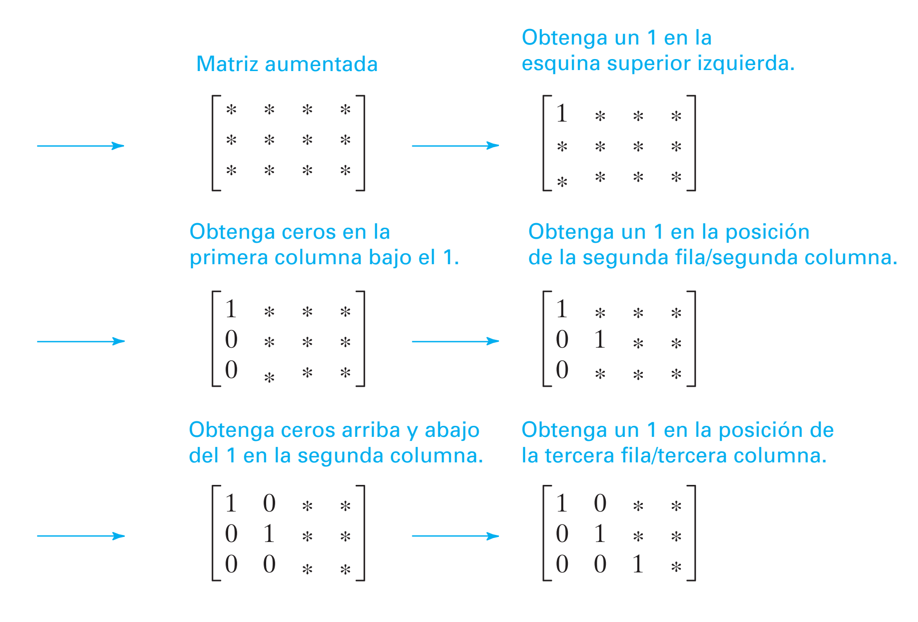
Viola la condición 1 Viola la condición 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Viola la condición 3 Viola la condición 4

Una vez que tenga una matriz aumentada en forma escalonada reducida, es fácil determinar el conjunto solución del sistema. Más aún, el procedimiento para cambiar una matriz aumentada a forma escalonada reducida se puede describir en

una forma muy sistemática. Por ejemplo, si una matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene una solución única, entonces se puede cambiar a forma escalonada reducida del modo siguiente:



Obtenga ceros arriba del 1 en la tercera columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Puede identificar sistemas inconsistentes y dependientes mientras cambia una matriz a forma escalonada reducida. Se mostrarán algunos ejemplos de tales casos, pero primero considere otro ejemplo de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas donde hay una solución única.

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z = 37 \\ x + 3y - 4z = 29 \\ 5x - y + 3z = -20 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & -5 & 37 \\ 1 & 3 & -4 & 29 \\ 5 & -1 & 3 & -20 \end{array}\right]$$

no tiene un 1 en la esquina superior izquierda, pero esto se puede remediar al intercambiar los renglones 1 y 2.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -4 & 29 \\ 2 & 4 & -5 & 37 \\ 5 & -1 & 3 & -20 \end{array}\right]$$

Ahora puede obtener ceros en la primera columna bajo el 1 al sumar -2 por el renglón 1 al renglón 2 y al sumar -5 por el renglón 1 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -4 & 29 \\ 0 & -2 & 3 & -21 \\ 0 & -16 & 23 & -165 \end{array}\right]$$

A continuación se puede obtener un 1 para la primera entrada distinta de cero del segundo renglón al multiplicar el segundo renglón por $-\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -4 & 29 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & -16 & 23 & -165 \end{array}\right]$$

Ahora puede obtener ceros arriba y abajo del 1 en la segunda columna al sumar -3 por el renglón 2 al renglón 1 y al sumar 16 por el renglón 2 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

A continuación se puede obtener un 1 en la primera entrada distinta de cero de la tercera fila al multiplicar el tercer renglón por -1.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Finalmente, puede obtener ceros arriba del 1 en la tercera columna al sumar $-\frac{1}{2}$. por el renglón 3 al renglón 1, y al sumar $\frac{3}{2}$ por el renglón 3 al renglón 2.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

A partir de esta última matriz se ve que el conjunto solución del sistema original es $\{(-1, 6, -3)\}$. ■

El ejemplo 3 ilustra que aun cuando el proceso de cambiar a forma escalonada reducida se puede describir de manera sistemática, tal vez requiera algún cálculo más complicado. Sin embargo, con la ayuda de una computadora, tales cálculos no son problemáticos. Para los propósitos de este texto, los ejemplos y problemas se ajustan a sistemas que minimizan los cálculos complicados. Esto le permitirá concentrarse en los procedimientos.

Ahora conviene llamar su atención a otro tema en la solución del ejemplo 3. Considere la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -4 & 29 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & -16 & 23 & -165 \end{array}\right]$$

que se obtuvo aproximadamente a medio camino de la solución. En este paso, parece evidente que los cálculos se vuelven un poco complicados. Por tanto, en lugar de continuar hacia la forma escalonada reducida, se suma 16 por el renglón 2 al renglón 3 para producir un nuevo renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -4 & 29 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

El sistema representado por esta matriz es

$$\begin{pmatrix} x + 3y - 4z = 29 \\ y - \frac{3}{2}z = \frac{21}{2} \\ -z = 3 \end{pmatrix}$$

y se dice que está en **forma triangular**. La última ecuación determina el valor para z; luego puede usar el proceso de resustitución para determinar los valores para y y x.

Finalmente, considere dos ejemplos para ilustrar lo que ocurre cuando se usa el enfoque matricial sobre sistemas inconsistentes y dependientes.

EJEMPLO 4

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 3 \\ 5x - 9y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 6z = -1 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 5 & -9 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

Se pueden obtener ceros bajo el 1 en la primera columna al sumar −5 por el renglón 1 a la fila 2 y al sumar −2 por el renglón 1 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

En este paso puede detenerse, porque el renglón inferior de la matriz representa el enunciado $0(x) + 0(y) + 0(z) = -7$, que obviamente es falso para todos los valores de x, y y z. Por tanto, el sistema original es inconsistente; su conjunto solución es $\varnothing$. ■

EJEMPLO 5

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x + 2y + 2z = 9 \\ x + 3y - 4z = 5 \\ 2x + 5y - 2z = 14 \end{pmatrix}$$

Solución

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -2 & 14 \end{array}\right]$$

Puede obtener ceros en la primera columna bajo el 1 en la esquina superior izquierda al sumar −1 por el renglón 1 al renglón 2 y sumar −2 por el renglón 1 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right]$$

Ahora puede obtener ceros en la segunda columna arriba y abajo del 1 en el segundo renglón al sumar −2 por el renglón 2 al renglón 1 y sumar −1 por el renglón 2 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 14 & 17 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El renglón inferior de ceros representa el enunciado $0(x) + 0(y) + 0(z) = 0$, que es verdadero para todos los valores de x, y y z. La segunda fila representa el enunciado $y - 6z = -4$, que se puede reescribir $y = 6z - 4$. El segundo renglón representa el enunciado $x + 14z = 17$, que se puede reescribir $x = -14z + 17$. Por tanto, si se hace $z = k$, donde k es cualquier número real, el conjunto solución de infinitas tripletas ordenadas se puede representar mediante $\{(-14k + 17, 6k - 4, k) | k$ es un número real$\}$. Se pueden generar soluciones específicas al dejar que k tome cualquier valor. Por ejemplo, si $k = 2$, entonces $6k - 4$ se convierte en $6(2) - 4 = 8$ y $-14k + 17$ se convierte en $-14(2) + 17 = -11$. Por tanto, la tripleta ordenada $(-11, 8, 2)$ es un miembro del conjunto solución. ■

Conjunto de problemas 11.3

Para los problemas 1-10 indique si cada matriz está en forma escalonada reducida.

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 14 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right]$

5. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \end{array}\right]$

6. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$

7. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

9. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

10. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$

Para los problemas 11-30 use un enfoque matricial para resolver cada sistema.

11. $\begin{pmatrix} x - 3y = 14 \\ 3x + 2y = -13 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} x + 5y = -18 \\ -2x + 3y = -16 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3x - 4y = 33 \\ x + 7y = -39 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2x + 7y = -55 \\ x - 4y = 25 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} x - 6y = -2 \\ 2x - 12y = 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2x - 3y = -12 \\ 3x + 2y = 8 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3x - 5y = 39 \\ 2x + 7y = -67 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3x + 9y = -1 \\ x + 3y = 10 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} x - 2y - 3z = -6 \\ 3x - 5y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} x + 3y - 4z = 13 \\ 2x + 7y - 3z = 11 \\ -2x - y + 2z = -8 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -2x - 5y + 3z = 11 \\ x + 3y - 3z = -12 \\ 3x - 2y + 5z = 31 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -3x + 2y + z = 17 \\ x - y + 5z = -2 \\ 4x - 5y - 3z = -36 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} x - 3y - z = 2 \\ 3x + y - 4z = -18 \\ -2x + 5y + 3z = 2 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} x - 4y + 3z = 16 \\ 2x + 3y - 4z = -22 \\ -3x + 11y - z = -36 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} x - y + 2z = 1 \\ -3x + 4y - z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 6 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} x + 2y - 5z = -1 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x + 5y - 7z = 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -2x + y + 5z = -5 \\ 3x + 8y - z = -34 \\ x + 2y + z = -12 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 4x - 10y + 3z = -19 \\ 2x + 5y - z = -7 \\ x - 3y - 2z = -2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 7 \\ 3x + 4y + 5z = -2 \\ 5x + y + 3z = 13 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 4x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 6 \\ 5x - y - 3z = 3 \end{pmatrix}$

La notación con subíndices se usa frecuentemente para trabajar con sistemas de ecuaciones más grandes. Para los problemas 31-34 use un enfoque matricial para resolver cada sistema. Exprese las soluciones como 4-tuplas de la forma (x_1, x_2, x_3, x_4).

31. $\begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -5 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 18 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -9 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 8 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 19 \\ -3x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \\ 4x_1 + 11x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 19 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -28 \\ -5x_1 - 9x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 14 \end{pmatrix}$

En los problemas 35-42 cada matriz es la matriz escalonada reducida para un sistema con variables x_1, x_2, x_3 y x_4. Encuentre el conjunto solución de cada sistema.

35. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

36. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

37. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

38. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

39. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

40. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

41. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

42. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. ¿Qué es una matriz? ¿Qué es una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales?

44. Describa cómo usar matrices para resolver el sistema $\begin{pmatrix} x - 2y = 5 \\ 2x + 7y = 9 \end{pmatrix}$.

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 45-50 cambie cada matriz aumentada del sistema a forma escalonada reducida y luego indique las soluciones del sistema.

45. $\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 4 \\ 3x - 5y - z = 7 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} x + 3y - 2z = -1 \\ 2x - 5y + 7z = 4 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 2x - 4y + 3z = 8 \\ 3x + 5y - z = 7 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 3x + 6y - z = 9 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = 3 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} x + y - 2z = -1 \\ 3x + 3y - 6z = -3 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

51. Si su calculadora graficadora tiene la capacidad de manipular matrices, éste es un buen momento para familiarizarse con dichas operaciones. Tal vez necesite referirse a su manual del usuario para las instrucciones de digitación. Para comenzar el proceso de familiarización, cargue su calculadora con las tres matrices aumentadas en los ejemplos 1, 2 y 3. Entonces, por cada una, realice las operaciones del renglón como se describen en el texto.

11.4 Determinantes

Antes de introducir el concepto de determinante se plantea una nueva notación conveniente. Una **matriz general $m \times n$** se puede representar mediante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices dobles se usan para identificar el número de renglón y el número de la columna, en ese orden. Por ejemplo, a_{23} es la entrada en la intersección del segundo renglón y la tercera columna. En general, la entrada en la intersección del renglón i y la columna j se denota mediante a_{ij}.

Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene el mismo número de renglones y de columnas. Cada matriz cuadrada A con entradas de número real se puede asociar con un número real llamado **determinante** de la matriz, denotada mediante $|A|$. Primero se definirá $|A|$ para una matriz 2×2.

Definición 11.1

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

EJEMPLO 1

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, encuentre $|A|$.

Solución

Use la definición 11.1 para obtener

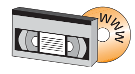
$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} &= 3(8) - (-2)(5) \\ &= 24 + 10 \\ &= 34 \end{aligned}$$

■

A encontrar el determinante de una matriz cuadrada comúnmente se le llama **evaluar el determinante**, y la notación matricial se omite con frecuencia.

EJEMPLO 2

Evalúe $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$



Solución

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-3)(8) - (6)(2)$$
$$= -24 - 12$$
$$= -36$$

■

Para encontrar los determinantes de 3×3 y matrices cuadradas más grandes, es conveniente introducir alguna terminología adicional.

Definición 11.2

Si A es una matriz 3×3, entonces el **menor** (denotado M_{ij}) del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz 2×2 obtenida al borrar el renglón i y la columna j de A.

EJEMPLO 3

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, encuentre (a) M_{11} y (b) M_{23}

Solución

(a) Para encontrar M_{11}, primero borre el renglón 1 y la columna 1 de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - (-2)(2) = 19$$

(b) Para encontrar M_{23}, primero borre el renglón 2 y la columna 3 de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - (1)(4) = 0$$

■

También se usará la siguiente definición.

Definición 11.3

Si A es una matriz 3×3, entonces el **cofactor** (denotado mediante C_{ij}) del elemento a_{ij} se define como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

De acuerdo con la definición 11.3, para encontrar el cofactor de cualquier elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A, se encuentra el menor de a_{ij} y se multiplica por 1 si $i + j$ es par, o se multiplica por -1 si $i + j$ es impar.

EJEMPLO 4

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre C_{32}

Solución

Primero encuentre M_{32} al borrar el renglón 3 y la columna 2 de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(4) - (-4)(1) = 16$$

En consecuencia,

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5(16) = -16$$

■

El concepto de cofactor se puede usar para definir el determinante de una matriz 3×3 del modo siguiente:

Definición 11.4

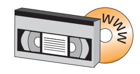
Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

La definición 11.4 simplemente afirma que el determinante de una matriz 3×3 se puede encontrar al multiplicar cada elemento de la primera columna por su correspondiente cofactor y luego sumar los tres resultados. A continuación se ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 5

Encuentre $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$



Solución

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= (-2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(1)(20) + (3)(-1)(10) + (1)(1)(5) \\ &= -40 - 30 + 5 \\ &= -65 \end{aligned}$$

■

Cuando se usa la definición 11.4, con frecuencia se dice que "el determinante se extenderá en torno a la primera columna". También se puede demostrar que **cualquier renglón o columna puede usarse para extender un determinante**. Por ejemplo, para la matriz A en el ejemplo 5, la expansión del determinante en torno a la *segunda fila* es como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} &= (3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + (5)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (3)(-1)(10) + (0)(1)(8) + (5)(-1)(7) \\ &= -30 + 0 - 35 \\ &= -65 \end{aligned}$$

Note que, cuando se expande en torno a la segunda fila, el cálculo se simplificó por la presencia de un cero. En general, es útil expandir en torno al renglón o columna que contiene más ceros.

Los conceptos de menor y cofactor se definieron en términos de matrices 3×3. Definiciones análogas se pueden dar para cualquier matriz cuadrada (esto es, cualquier matriz $n \times n$ con $n \geq 2$), y el determinante se puede expandir en torno a cualquier fila o columna. Ciertamente, conforme las matrices se vuelven más grandes que 3×3, los cálculos se vuelven más tediosos. En este texto, la mayoría de los esfuerzos se concentrarán en las matrices 2×2 y 3×3.

Propiedades de los determinantes

Los determinantes tienen varias propiedades interesantes, algunas de las cuales son importantes principalmente desde un punto de vista teórico. Pero algunas de las propiedades también son muy útiles cuando se evalúan determinantes. Estas propiedades se enunciarán para matrices cuadradas en general, pero se usarán

matrices 2×2 o 3×3 como ejemplos. Es posible demostrar algunas de las pruebas de estas propiedades al evaluar los determinantes implicados, y algunas de las pruebas para matrices 3×3 se dejarán para que usted las verifique en el siguiente conjunto de problemas.

Propiedad 11.1

Si algún renglón (o columna) de una matriz cuadrada A contiene sólo ceros, entonces $|A| = 0$.

Si cualquier elemento de un renglón (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces debe ser evidente que expandir el determinante en torno a dicho renglón (o columna) de ceros producirá 0.

Propiedad 11.2

Si la matriz cuadrada B se obtiene a partir de la matriz cuadrada A al intercambiar dos renglones (o dos columnas), entonces $|B| = -|A|$.

La propiedad 11.2 afirma que intercambiar dos renglones (o columnas) cambia el signo del determinante. Como ejemplo de esta propiedad, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

y que los renglones 1 y 2 se intercambian para formar

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcular $|A|$ y $|B|$ produce

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - (5)(-1) = 17$$

y

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(5) - (6)(2) = -17$$

Propiedad 11.3

Si la matriz cuadrada B se obtiene a partir de la matriz cuadrada A al multiplicar cada elemento de algún renglón (o columna) de A por algún número real k, entonces $|B| = k|A|$.

La propiedad 11.3 afirma que multiplicar cualquier fila (o columna) por un factor de k afecta el valor del determinante por un factor de k. Como ejemplo de esta propiedad, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & -16 \end{bmatrix}$$

y que B se forma al multiplicar cada elemento de la tercera columna por $\frac{1}{4}$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ahora calcule $|A|$ y $|B|$ al expandir en torno a la tercera columna en cada caso.

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & -16 \end{vmatrix} &= (8)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (12)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-16)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (8)(1)(1) + (12)(-1)(8) + (-16)(1)(5) \\ &= -168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= (2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2)(1)(1) + (3)(-1)(8) + (-4)(1)(5) \\ &= -42 \end{aligned}$$

Se ve que $|B| = \frac{1}{4}|A|$. Este ejemplo también ilustra el uso de cálculo usual de la propiedad 11.3: puede factorizar un factor común de un renglón o columna y luego ajustar el valor del determinante por dicho factor. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Factorice un 2 de la fila superior.

Propiedad 11.4

Si la matriz cuadrada B se obtiene de la matriz cuadrada A al sumar k veces un renglón (o columna) de A a otro renglón (o columna) de A, entonces $|B| = |A|$.

La propiedad 11.4 afirma que sumar el producto de k veces una fila (o columna) a otro renglón (o columna) no afecta el valor del determinante. Como ejemplo de esta propiedad, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora forme B al sustituir el renglón 2 con el resultado de sumar -2 por el renglón 1 al renglón 2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A continuación, evalúe $|A|$ y $|B|$ al expandir en torno al segundo renglón en cada caso.

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= (2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (4)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (7)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)(-2) + (4)(1)(9) + (7)(-1)(5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= (0)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + (-1)(-1)(5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Note que $|B| = |A|$. Más aún, debido a los ceros en el segundo renglón, evaluar $|B|$ es mucho más sencillo que evaluar $|A|$. Con frecuencia se puede usar la propiedad 11.4 para obtener algunos ceros antes de evaluar un determinante.

Es adecuada una llamada de advertencia en este momento. Tenga cuidado de no confundir las propiedades 11.2, 11.3 y 11.4 con las tres transformaciones elementales de renglón de las matrices aumentadas que se usaron en la sección 11.3. Los enunciados de los dos conjuntos de propiedades sí recuerdan unas a las otras, pero las propiedades pertenecen a *dos conceptos diferentes*, así que asegúrese de entender la distinción entre ellos.

Debe mencionarse una propiedad final de los determinantes.

Propiedad 11.5

Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticas, entonces $|A| = 0$.

La propiedad 11.5 es consecuencia directa de la propiedad 11.2. Suponga que A es una matriz cuadrada (de cualquier tamaño) con dos filas idénticas. La matriz cuadrada B se puede formar a partir de A al intercambiar las dos filas idénticas. Puesto que se intercambiaron filas idénticas, $|B| = |A|$. *Pero*, por la propiedad 11.2, $|B| = -|A|$. Para que estos dos enunciados se sostengan, $|A| = 0$.

Esta sección concluye al evaluar un determinante 4 × 4, usando las propiedades 11.3 y 11.4 para facilitar el cálculo.

EJEMPLO 6

Evalúe $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & -2 \\ 9 & -1 & 4 & 1 \\ 12 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

Solución

Primero sume −3 por la cuarta columna a la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 & -2 \\ 9 & -1 & 1 & 1 \\ 12 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Ahora, si expande en torno al cuarto renglón, se obtiene sólo un producto distinto de cero.

$$(3)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ 12 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

Factorizar un 3 de la primera columna del determinante 3 × 3 produce

$$(3)(-1)^{8}(3)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

A continuación, al trabajar con el determinante 3 × 3, primero puede sumar la columna 3 a la columna 2 y luego sumar −3 por la columna 3 a la columna 1.

$$(3)(-1)^{8}(3)\begin{vmatrix} -19 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Finalmente, al expandir este determinante 3 × 3 en torno al segundo renglón, se obtiene

$$(3)(-1)^{8}(3)(1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -19 & 9 \\ -14 & 4 \end{vmatrix}$$

El resultado final es

$$(3)(-1)^{8}(3)(1)(-1)^{5}(50) = -450$$

■

Conjunto de problemas 11.4

Para los problemas 1-12 evalúe cada determinante 2 × 2 usando la definición 11.1.

1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$

Para los problemas 13-28 evalúe cada determinante 3×3. Use las propiedades de los determinantes a su favor.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 35 & 5 \\ 1 & -5 & 1 \\ -4 & 15 & 2 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 2 & -17 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 24 & -1 & 4 \\ 40 & 2 & 0 \\ -16 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -1 \\ -6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

Para los problemas 29-32 evalúe cada determinante 4×4. Use las propiedades de los determinantes a su favor.

29. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -6 & 3 & 0 & 9 \\ -3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

Para los problemas 33-42 use la propiedad de determinantes adecuada de esta sección para justificar cada enunciado verdadero. *No* evalúe los determinantes.

33. $(-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 6 & -8 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 9 & 7 \\ 6 & 2 & -8 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

37. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 14 \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -4 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$

42. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -11 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. Explique la diferencia entre una matriz y un determinante.

44. Explique el concepto de cofactor y cómo se usa para expandir un determinante.

45. ¿Qué significa decir que cualquier fila o columna se puede usar para expandir un determinante?

46. Brinde una explicación paso a paso de cómo evaluar el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 47-50 use

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

como una representación general para cualquier matriz 3×3.

47. Verifique la propiedad 11.2 para matrices 3×3.

48. Verifique la propiedad 11.3 para matrices 3×3.

49. Verifique la propiedad 11.4 para matrices 3×3.

50. Demuestre que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

51. Use una calculadora para comprobar sus respuestas para los problemas 29-32.

52. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ -4 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Forme la matriz B al intercambiar los renglones 1 y 3 de la matriz A. Ahora use su calculadora para demostrar que $|B| = -|A|$.

53. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & 5 & -1 \\ 6 & 7 & 9 & 12 & 13 \\ -4 & -7 & 6 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 12 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Forme la matriz B al multiplicar cada elemento del segundo renglón de la matriz A por 3. Ahora use su calculadora para demostrar que $|B| = -|A|$.

54. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ -4 & -6 & 7 & 12 & 11 & 9 \\ 5 & 8 & 6 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Use su calculadora para demostrar que $|A| = 0$.

11.5 Regla de Cramer

Los determinantes proporcionan la base para otro método de resolución de sistemas lineales. Considere el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$$

Al usar la transformación elemental de renglón de las matrices aumentadas puede cambiar esta matriz a la siguiente forma escalonada reducida. (Los detalles se dejan para que usted los haga como ejercicio.)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{array}\right], \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

La solución para x y y se expresa en forma determinante del modo siguiente:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Este método de usar determinantes para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se llama **regla de Cramer** y se puede enunciar del modo siguiente:

Regla de Cramer (caso 2 × 2)

Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{pmatrix}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

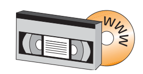
entonces la solución para este sistema está dada por

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

Note que los elementos de D son los coeficientes de las variables en el sistema dado. En D_x, los coeficientes de x se sustituyen con las constantes correspondientes, y en D_y, los coeficientes de y se sustituyen con las constantes correspondientes. A continuación se ilustra el uso de la regla de Cramer para resolver algunos sistemas.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 6x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -4 \end{pmatrix}$



Solución

El sistema está en la forma adecuada para aplicar la regla de Cramer, así que determine D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -24 - 6 = -30$$

Por tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{16}{3}$$

y

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-30}{3} = -10$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{16}{3}, -10\right)\right\}$. ■

EJEMPLO 2

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} y = -2x - 2 \\ 4x - 5y = 17 \end{pmatrix}$

Solución

Para comenzar, debe cambiar la forma de la primera ecuación de modo que el sistema se ajuste a la forma dada en la regla de Cramer. La ecuación $y = -2x - 2$ se puede reescribir $2x + y = -2$. Ahora el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} 2x + y = -2 \\ 4x - 5y = 17 \end{pmatrix}$$

y se puede proceder para determinar D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 17 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 17 = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 17 \end{vmatrix} = 34 - (-8) = 42$$

Por tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{42}{-14} = -3$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{1}{2}, -3\right)\right\}$, que se puede verificar, como siempre, al sustituir de nuevo en las ecuaciones originales. ■

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -4 \\ \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = 20 \end{pmatrix}$$

Solución

Con tal sistema primero puede producir un sistema equivalente con coeficientes enteros y luego ejecutar la regla de Cramer o aplicar la regla inmediatamente. Para evitar algo del trabajo con fracciones, multiplique la primera ecuación por 6 y la segunda ecuación por 4 para producir el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 3x + 4y = -24 \\ x - 6y = 80 \end{pmatrix}$$

Ahora proceda como antes.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 4 = -22$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -24 & 4 \\ 80 & -6 \end{vmatrix} = 144 - 320 = -176$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -24 \\ 1 & 80 \end{vmatrix} = 240 - (-24) = 264$$

En consecuencia,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-176}{-22} = 8 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{264}{-22} = -12$$

El conjunto solución es $\{(8, -12)\}$. ■

En el enunciado de la regla de Cramer se impuso la condición de que $D \neq 0$. Si $D = 0$ y D_x o D_y (o ambos) son distintos de cero, entonces el sistema es inconsistente y no tiene solución. Si $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, entonces las ecuaciones son dependientes y hay infinitas soluciones.

Regla de Cramer extendida

Sin demostrar los detalles, simplemente se afirmará que la regla de Cramer también se aplica en la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Se enuncia del modo siguiente:

Regla de Cramer (caso 3 × 3)

Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{pmatrix}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

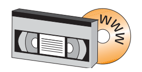
$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

De nuevo, note la restricción de que $D \neq 0$. Si $D = 0$ y al menos uno de D_x, D_y y D_z no es cero, entonces el sistema es inconsistente. Si D, D_x, D_y y D_z son todos cero, entonces las ecuaciones son dependientes, y hay infinitas soluciones.

EJEMPLO 4

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y + z = -4 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \end{pmatrix}$$



Solución

Simplemente se indicarán los valores de D, D_x, D_y y D_z y los cálculos se dejarán para que los compruebe.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 29 \qquad D_x = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 29$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 58 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -29$$

Por tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{29}{29} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{58}{29} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-29}{29} = -1$$

El conjunto solución es $\{(1, 2, -1)\}$. (¡Asegúrese de comprobarlo!) ■

EJEMPLO 5

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x + 3y - z = 4 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + 6y - 2z = 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(0) = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

Por tanto, puesto que $D = 0$, y al menos uno de D_x, D_y y D_z no es cero, el sistema es inconsistente. El conjunto solución es $\varnothing$. ■

El ejemplo 5 ilustra por qué primero debe determinarse D. Una vez encontrado que $D = 0$ y $D_x \neq 0$, se sabe que el sistema es inconsistente, y no hay necesidad de encontrar D_y y D_z.

Finalmente, se debe notar que la regla de Cramer se puede extender a sistemas de n ecuaciones lineales en n variables; sin embargo, este método no se considera una forma muy eficiente de resolver un sistema grande de ecuaciones lineales.

Conjunto de problemas 11.5

Para los problemas 1-32 use la regla de Cramer para encontrar el conjunto solución para cada sistema. Si las ecuaciones son dependientes, simplemente indique que hay infinitas soluciones.

1. $\begin{pmatrix} 2x - y = -2 \\ 3x + 2y = 11 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3x + y = -9 \\ 4x - 3y = 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 29 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 4x - 7y = -23 \\ 2x + 5y = -3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5x - 4y = 14 \\ -x + 2y = -4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -x + 2y = 10 \\ 3x - y = -10 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y = 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -3x - 4y = 14 \\ -2x + 3y = -19 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -4x + 3y = 3 \\ 4x - 6y = -5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} x = 4y - 1 \\ 2x - 8y = -2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 9x - y = -2 \\ 8x + y = 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 6x - 5y = 1 \\ 4x - 7y = 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = -7 \\ \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y = 6 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -6 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = -1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2x + 7y = -1 \\ x = 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5x - 3y = 2 \\ y = 4 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} x - y + 2z = -8 \\ 2x + 3y - 4z = 18 \\ -x + 2y - z = 7 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = -3 \\ 2x - 3y - 3z = -5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2x - 3y + z = -7 \\ -3x + y - z = -7 \\ x - 2y - 5z = -45 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3x - y - z = 18 \\ 4x + 3y - 2z = 10 \\ -5x - 2y + 3z = -22 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4x + 5y - 2z = -14 \\ 7x - y + 2z = 42 \\ 3x + y + 4z = 28 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -5x + 6y + 4z = -4 \\ -7x - 8y + 2z = -2 \\ 2x + 9y - z = 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = -17 \\ 3y + z = 5 \\ x - 2y - z = -3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = -5 \\ 3x + 4y - 2z = -25 \\ -x + z = 6 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} x + 3y - 4z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 4x + 5y - 7z = 0 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3x - 2y - 3z = -5 \\ x + 2y + 3z = -3 \\ -x + 4y - 6z = 8 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3x - 2y + z = 11 \\ 5x + 3y = 17 \\ x + y - 2z = 6 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + 4y - 3z = -3 \\ 5x - 6y + 6z = 10 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 3y - 4z = 2 \\ x + 5y - z = 9 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} -x - y + 3z = -2 \\ -2x + y + 7z = 14 \\ 3x + 4y - 5z = 12 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} -2x + y - 3z = -4 \\ x + 5y - 4z = 13 \\ 7x - 2y - z = 37 \end{pmatrix}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

33. Proporcione una descripción paso a paso de cómo resolvería el sistema

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = 31 \\ x - 2y - z = 8 \\ 3x + 5y + 8z = 35 \end{pmatrix}$$

34. Proporcione una descripción paso a paso de cómo encontraría el valor de x en la solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} x + 5y - z = -9 \\ 2x - y + z = 11 \\ -3x - 2y + 4z = 20 \end{pmatrix}$$

MÁS INVESTIGACIÓN

35. Un sistema lineal en el que los términos constantes son todos cero se llama **sistema homogéneo**.

(a) Verifique que, para un sistema homogéneo 3×3, si $D \neq 0$, entonces $(0, 0, 0)$ es la única solución para el sistema.

(b) Verifique que, para un sistema homogéneo 3×3, si $D = 0$, entonces las ecuaciones son dependientes.

Para los problemas 36-39 resuelva cada uno de los sistemas homogéneos (vea el problema 35). Si las ecuaciones son dependientes, indique que el sistema tiene infinitas soluciones.

36. $\begin{pmatrix} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ 4x - 7y + z = 0 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 3x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 4x - 5y - 2z = 0 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 2x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

40. Use determinantes y su calculadora para resolver cada uno de los siguientes sistemas:

(a) $\begin{pmatrix} 4x - 3y + z = 10 \\ 8x + 5y - 2z = -6 \\ -12x - 2y + 3z = -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2x + y - z + w = -4 \\ x + 2y + 2z - 3w = 6 \\ 3x - y - z + 2w = 0 \\ 2x + 3y + z + 4w = -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x - 2y + z - 3w = 4 \\ 2x + 3y - z - 2w = -4 \\ 3x - 4y + 2z - 4w = 12 \\ 2x - y - 3z + 2w = -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1.98x + 2.49y + 3.45z = 80.10 \\ 2.15x + 3.20y + 4.19z = 97.16 \\ 1.49x + 4.49y + 2.79z = 83.92 \end{pmatrix}$

11.6 Fracciones parciales (opcional)

En el capítulo 4 se revisó el proceso de sumar expresiones racionales. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3} = \frac{3(x+3) + 2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3x+9+2x-4}{(x-2)(x+3)} = \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}$$

Ahora suponga que quiere invertir el proceso. Esto es, suponga que se proporciona la expresión racional

$$\frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}$$

y quiere expresarla como la suma de dos expresiones racionales llamadas **fracciones parciales**. Este proceso, llamado **descomposición en fracciones parciales**, tiene varias aplicaciones en cálculo y ecuaciones diferenciales. La siguiente propiedad proporciona la base para la descomposición de fracciones parciales.

Propiedad 11.6

Sea $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con coeficientes reales, tales que el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$. El cociente indicado $f(x)/g(x)$ se puede descomponer en fracciones parciales del modo siguiente.

1. Si $g(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$, entonces la descomposición en fracciones parciales contendrá un término de la forma

$$\frac{A}{ax+b}, \text{ donde } A \text{ es una constante}$$

2. Si $g(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$ elevado a la k-ésima potencia, entonces la descomposición en fracciones parciales contendrá términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son constantes.

3. Si $g(x)$ tiene un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contendrá un término de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad \text{donde } A \text{ y } B \text{ son constantes.}$$

4. Si $g(x)$ tiene un factor cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ elevado a la k-ésima potencia, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces la descomposición en fracciones parciales contendrá términos de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_kx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ son constantes.

Note que la propiedad 11.6 sólo se aplica a **fracciones propias**; esto es, a fracciones en las cuales el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Si el numerador no es de grado menor, puede dividir y luego aplicar la propiedad 11.6 al residuo, que será una fracción propia. Por ejemplo,

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4} = x - 3 + \frac{x - 17}{x^2 - 4}$$

y la fracción propia $\frac{x - 17}{x^2 - 4}$ se puede descomponer en fracciones parciales al aplicar la propiedad 11.6. Ahora considere algunos ejemplos para ilustrar los cuatro casos en la propiedad 11.6.

EJEMPLO 1

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\frac{11x + 2}{2x^2 + x - 1}$

Solución

El denominador se puede expresar como $(x + 1)(2x - 1)$. Por tanto, de acuerdo con la parte 1 de la propiedad 11.6, cada uno de los factores lineales produce una fracción parcial de la forma *constante sobre factor lineal*. En otras palabras, puede escribir

$$\frac{11x + 2}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{2x - 1} \tag{1}$$

para algunas constantes A y B. Para encontrar A y B multiplique ambos lados de la ecuación (1) por el mínimo común denominador $(x + 1)(2x - 1)$:

$$11x + 2 = A(2x - 1) + B(x + 1) \tag{2}$$

La ecuación (2) es una **identidad**: *es verdadera para todos los valores de x*. En consecuencia, elija algunos valores convenientes para x que determinarán los valores para A y B. Si hace $x = -1$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación sólo en A.

$$\begin{aligned} 11(-1) + 2 &= A[2(-1) - 1] + B(-1 + 1) \\ -9 &= -3A \\ 3 &= A \end{aligned}$$

Si hace $x = \frac{1}{2}$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación sólo en B.

$$\begin{aligned} 11\left(\frac{1}{2}\right) + 2 &= A\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right] + B\left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ \frac{15}{2} &= \frac{3}{2}B \\ 5 &= B \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión racional dada ahora se puede escribir

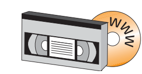
$$\frac{11x + 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{3}{x + 1} + \frac{5}{2x - 1}$$ ■

La idea clave en el ejemplo 1 es el enunciado de que la ecuación (2) es verdadera para todos los valores de x. Si hubiese elegido *cualesquiera* dos valores para x, todavía podría determinar los valores para A y B. Por ejemplo, hacer $x = 1$ y luego $x = 2$ produce las ecuaciones $13 = A + 2B$ y $24 = 3A + 3B$. Al resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas produce $A = 3$ y$B = 5$. En el ejemplo 1 las elecciones de $x = -1$ y luego $x = \frac{1}{2}$ simplemente eliminaron la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones para encontrar A y B.

EJEMPLO 2

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{-2x^2 + 7x + 2}{x(x - 1)^2}$$



Solución

Aplique la parte 1 de la propiedad 11.6 para determinar que hay una fracción parcial de la forma A/x correspondiente al factor de x. A continuación, aplicar la parte 2 de la propiedad 11.6 y el factor cuadrado $(x - 1)^2$ da lugar a una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

Por tanto, la descomposición completa en fracciones parciales es de la forma

$$\frac{-2x^2 + 7x + 2}{x(x - 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \quad (1)$$

Multiplique ambos lados de la ecuación (1) por $x(x-1)^2$ para producir

$$-2x^2 + 7x + 2 = A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx \quad (2)$$

que es verdadera para todos los valores de x. Si hace $x = 1$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación sólo en C.

$$-2(1)^2 + 7(1) + 2 = A(1 - 1)^2 + B(1)(1 - 1) + C(1)$$
$$7 = C$$

Si hace $x = 0$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación sólo en A.

$$-2(0)^2 + 7(0) + 2 = A(0 - 1)^2 + B(0)(0 - 1) + C(0)$$
$$2 = A$$

Si hace $x = 2$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación en A, B y C.

$$-2(2)^2 + 7(2) + 2 = A(2 - 1)^2 + B(2)(2 - 1) + C(2)$$
$$8 = A + 2B + 2C$$

Pero ya se sabe que $A = 2$ y $C = 7$, de modo que fácilmente puede determinar B.

$$8 = 2 + 2B + 14$$
$$-8 = 2B$$
$$-4 = B$$

En consecuencia, la expresión racional original se puede escribir

$$\frac{-2x^2 + 7x + 2}{x(x - 1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{4}{x - 1} + \frac{7}{(x - 1)^2}$$

EJEMPLO 3 Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^2 + 6x - 10}{(x + 3)(x^2 + x + 2)}$$

Solución

Aplique la parte 1 de la propiedad 11.6 para determinar que hay una fracción parcial de la forma $A/(x + 3)$ que corresponde al factor $x + 3$. Aplique la parte 3 de la propiedad 11.6 para determinar que también hay una fracción parcial de la forma

$$\frac{Bx + C}{x^2 + x + 2}$$

Por tanto, la descomposición completa en fracciones parciales es de la forma

$$\frac{4x^2 + 6x - 10}{(x + 3)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 2} \qquad (1)$$

Multiplique ambos lados de la ecuación (1) por $(x + 3)(x^2 + x + 2)$ para producir

$$4x^2 + 6x - 10 = A(x^2 + x + 2) + (Bx + C)(x + 3) \qquad (2)$$

que es verdadera para todos los valores de x. Si hace $x = -3$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación sólo en A.

$$4(-3)^2 + 6(-3) - 10 = A[(-3)^2 + (-3) + 2] + [B(-3) + C][(-3) + 3]$$
$$8 = 8A$$
$$1 = A$$

Si hace $x = 0$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación en A y C.

$$4(0)^2 + 6(0) - 10 = A(0^2 + 0 + 2) + [B(0) + C](0 + 3)$$
$$-10 = 2A + 3C$$

Puesto que $A = 1$ se obtiene el valor de C.

$$-10 = 2 + 3C$$
$$-12 = 3C$$
$$-4 = C$$

Si hace $x = 1$, entonces la ecuación (2) se convierte en una ecuación en A, B y C.

$$\begin{aligned} 4(1)^2 + 6(1) - 10 &= A(1^2 + 1 + 2) + [B(1) + C](1 + 3) \\ 0 &= 4A + 4B + 4C \\ 0 &= A + B + C \end{aligned}$$

Pero, dado que $A = 1$ y $C = -4$, se obtiene el valor de B.

$$0 = A + B + C$$
$$0 = 1 + B + (-4)$$
$$3 = B$$

Por tanto, la expresión racional original ahora se puede escribir

$$\frac{4x^2 + 6x - 10}{(x + 3)(x^2 + x + 2)} = \frac{1}{x + 3} + \frac{3x - 4}{x^2 + x + 2}$$ ■

EJEMPLO 4

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Solución

Aplique la parte 4 de la propiedad 11.6 para determinar que la descomposición en fracciones parciales de esta fracción es de la forma

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} \quad (1)$$

Multiplique ambos lados de la ecuación (1) por $(x^2 + 1)^2$ para producir

$$x^3 + x^2 + x + 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \quad (2)$$

que es verdadera para todos los valores de x. La ecuación (2) es una identidad, de modo que, como sabe, los coeficientes de términos similares en ambos lados de la ecuación deben ser iguales. Por tanto, reúna términos similares en el lado derecho de la ecuación (2).

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 3 &= Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \end{aligned}$$

Ahora puede igualar los coeficientes de ambos lados:

$$1 = A \qquad 1 = B \qquad 1 = A + C \qquad \text{y} \qquad 3 = B + D$$

A partir de estas ecuaciones, puede determinar que $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = 2$. En consecuencia, la expresión racional original se puede escribir

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$$

Conjunto de problemas 11.6

Para los problemas 1-22 encuentre la descomposición en fracciones parciales para cada expresión racional.

1. $\dfrac{11x - 10}{(x - 2)(x + 1)}$

2. $\dfrac{11x - 2}{(x + 3)(x - 4)}$

3. $\dfrac{-2x - 8}{x^2 - 1}$

4. $\dfrac{-2x + 32}{x^2 - 4}$

5. $\dfrac{20x - 3}{6x^2 + 7x - 3}$

6. $\dfrac{-2x - 8}{10x^2 - x - 2}$

7. $\dfrac{x^2 - 18x + 5}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}$

8. $\dfrac{-9x^2 + 7x - 4}{x^3 - 3x^2 - 4x}$

9. $\dfrac{-6x^2 + 7x + 1}{x(2x - 1)(4x + 1)}$

10. $\dfrac{15x^2 + 20x + 30}{(x + 3)(3x + 2)(2x + 3)}$

11. $\dfrac{2x + 1}{(x - 2)^2}$

12. $\dfrac{-3x + 1}{(x + 1)^2}$

13. $\dfrac{-6x^2 + 19x + 21}{x^2(x + 3)}$

14. $\dfrac{10x^2 - 73x + 144}{x(x - 4)^2}$

15. $\dfrac{-2x^2 - 3x + 10}{(x^2 + 1)(x - 4)}$

16. $\dfrac{8x^2 + 15x + 12}{(x^2 + 4)(3x - 4)}$

17. $\dfrac{3x^2 + 10x + 9}{(x + 2)^3}$

18. $\dfrac{2x^3 + 8x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2(x^2 + 3)}$

19. $\dfrac{5x^2 + 3x + 6}{x(x^2 - x + 3)}$

20. $\dfrac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2}$

21. $\dfrac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

22. $\dfrac{4x^2 + 3x + 14}{x^3 - 8}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

23. Proporcione una descripción general de la descomposición en fracciones parciales a alguien que faltó a clase cuando se estudió.

24. Proporcione una explicación paso a paso de cómo encontrar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{11x + 5}{2x^2 + 5x - 3}$$

Capítulo 11 Resumen

(11.1 y 11.2) El foco principal de este capítulo es el desarrollo de diferentes técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Método de sustitución

Con la ayuda de un ejemplo puede describir el método de sustitución del modo siguiente. Suponga que quiere resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y = 22 \\ 3x + 4y = -24 \end{pmatrix}$$

Paso 1 Resuelva la primera ecuación para x en términos de y.

$$x - 2y = 22$$
$$x = 2y + 22$$

Paso 2 Sustituya $2y + 22$ en x en la segunda ecuación.

$$3(2y + 22) + 4y = -24$$

Paso 3 Resuelva la ecuación que se obtuvo en el paso 2.

$$6y + 66 + 4y = -24$$
$$10y + 66 = -24$$
$$10y = -90$$
$$y = -9$$

Paso 4 Sustituya y por -9 en la ecuación del paso 1.

$$x = 2(-9) + 22 = 4$$

El conjunto solución es $\{(4, -9)\}$.

Método de eliminación por adición

Este método permite sustituir sistemas de ecuaciones con *sistemas equivalentes más simples* hasta obtener un sistema para el cual pueda determinar fácilmente la solución. Las siguientes operaciones producen sistemas equivalentes:

1. Cualesquiera dos ecuaciones de un sistema se pueden intercambiar.
2. Ambos lados de cualquier ecuación del sistema se pueden multiplicar por cualquier número real distinto de cero.
3. Cualquier ecuación del sistema se puede sustituir con la suma de un múltiplo distinto de cero de otra ecuación más dicha ecuación.

Por ejemplo, a través de una secuencia de operaciones, puede transformar el sistema

$$\begin{pmatrix} 5x + 3y = -28 \\ \frac{1}{2}x - y = -8 \end{pmatrix}$$

al sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} x - 2y = -16 \\ 13y = 52 \end{pmatrix}$$

para el cual fácilmente puede determinar el conjunto solución $\{(-8, 4)\}$.

Método matricial

(11.3) Puede cambiar la matriz aumentada de un sistema a forma escalonada reducida al aplicar las siguientes operaciones elementales de renglón:

1. Cualesquiera dos renglones de la matriz se pueden intercambiar.
2. Cualquier renglón de la matriz se puede multiplicar por un número real distinto de cero.
3. Cualquier renglón de la matriz se puede sustituir por la suma de un múltiplo distinto de cero de otro renglón más dicho renglón.

Por ejemplo, la matriz aumentada del sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{pmatrix}$$

es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Puede cambiar esta matriz a la forma escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

donde el conjunto solución $\{(4, 3, 2)\}$ es obvio.

(11.4) Un arreglo rectangular de números se llama **matriz**. Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas y columnas. Para una matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

el **determinante** de la matriz se escribe como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y se define como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

El determinante de una matriz cuadrada 3×3 (o mayor) se puede evaluar mediante la expansión de los elementos menores de cualquier fila o cualquier columna. Con este propósito se necesitan los conceptos de menor y de cofactor; estos términos se definen en las definiciones 11.2 y 11.3.

Las siguientes propiedades son útiles cuando se evalúan determinantes:

1. Si cualquier renglón (o columna) de una matriz cuadrada A contiene sólo ceros, entonces $|A| = 0$.
2. Si la matriz cuadrada B se obtiene a partir de la matriz cuadrada A al intercambiar dos renglones (o dos columnas), entonces $|B| = -|A|$.
3. Si la matriz cuadrada B se obtiene de la matriz cuadrada A al multiplicar cada elemento de cualquier fila (o columna) de A por algún número real k, entonces $|B| = k|A|$.
4. Si la matriz cuadrada B se obtiene de la matriz cuadrada A al sumar k veces una fila (o columna) de A a otro renglón (o columna) de A, entonces $|B| = |A|$.
5. Si dos renglones (o columnas) de una matriz cuadrada A son idénticas, entonces $|A| = 0$.

(11.5) La regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se enuncia del modo siguiente: dado el sistema

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{pmatrix}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

La regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables se enuncia del modo siguiente: dado el sistema

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{pmatrix}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

Capítulo 11 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-4 resuelva cada sistema con el uso del método de *sustitución*.

1. $\begin{pmatrix} 3x - y = 16 \\ 5x + 7y = -34 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 6x + 5y = -21 \\ x - 4y = 11 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2x - 3y = 12 \\ 3x + 5y = -20 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5x + 8y = 1 \\ 4x + 7y = -2 \end{pmatrix}$

Para los problemas 5-8 resuelva cada sistema con el uso del método de *eliminación por adición*.

5. $\begin{pmatrix} 4x - 3y = 34 \\ 3x + 2y = 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = -19 \\ 3x + 2y - 4z = 21 \\ 5x - 4y - z = -8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3x + 2y - 4z = 4 \\ 5x + 3y - z = 2 \\ 4x - 2y + 3z = 11 \end{pmatrix}$

Para los problemas 9-12 resuelva cada sistema por el *cambio de la matriz aumentada a forma escalonada reducida*.

9. $\begin{pmatrix} x - 3y = 17 \\ -3x + 2y = -23 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 25 \\ 3x - 5y = -29 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = -7 \\ 2x - 3y + 4z = -14 \\ -3x + y - 2z = 10 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -2x - 7y + z = 9 \\ x + 3y - 4z = -11 \\ 4x + 5y - 3z = -11 \end{pmatrix}$

Para los problemas 13-16 resuelva cada sistema con el uso de la *regla de Cramer*.

13. $\begin{pmatrix} 5x + 3y = -18 \\ 4x - 9y = -3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 0.2x + 0.3y = 2.6 \\ 0.5x - 0.1y = 1.4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2x - 3y - 3z = 25 \\ 3x + y + 2z = -5 \\ 5x - 2y - 4z = 32 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3x - y + z = -10 \\ 6x - 2y + 5z = -35 \\ 7x + 3y - 4z = 19 \end{pmatrix}$

Para los problemas 17-24 resuelva cada sistema con el uso del método que crea más adecuado.

17. $\begin{pmatrix} 4x + 7y = -15 \\ 3x - 2y = 25 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = -15 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = -5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 7x - 3y = -49 \\ y = \frac{3}{5}x - 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} x - y - z = 4 \\ -3x + 2y + 5z = -21 \\ 5x - 3y - 7z = 30 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2x - y + z = -7 \\ -5x + 2y - 3z = 17 \\ 3x + y + 7z = -5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3x - 2y - 5z = 2 \\ -4x + 3y + 11z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 7x - y + z = -4 \\ -2x + 9y - 3z = -50 \\ x - 5y + 4z = 42 \end{pmatrix}$

Para los problemas 25-30 evalúe cada determinante.

25. $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -7 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Para los problemas 31-34 resuelva cada problema al establecer y resolver un sistema de ecuaciones lineales.

31. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 9. Si los dígitos se invierten, el número recién formado es 45 menos que el número original. Encuentre el número original.

32. Sara invirtió $2500, parte de ellos a 10% y el resto a 12% de interés anual. El ingreso anual sobre la inversión de 12% fue de $102 más que el ingreso sobre la inversión a 10%. ¿Cuánto dinero invirtió a cada tasa?

33. Una caja contiene $17.70 en monedas de cinco, diez y 25 centavos. El número de monedas de 10 centavos es 8 menos que el doble del número de monedas de cinco centavos. El número de monedas de 25 centavos es 2 más que la suma de los números de monedas de cinco y diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?

34. La medida del ángulo más grande de un triángulo es 10º más que cuatro veces el ángulo más pequeño. La suma de los ángulos más pequeño y más grande es tres veces la medida del otro ángulo. Encuentre la medida de cada ángulo del triángulo.

Capítulo 11 Examen

Para los problemas 1-4 consulte los siguientes sistemas de ecuaciones:

I. $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 4 \\ 9x - 6y = 12 \end{pmatrix}$ **II.** $\begin{pmatrix} 5x - y = 4 \\ 3x + 7y = 9 \end{pmatrix}$

III. $\begin{pmatrix} 2x - y = 4 \\ 2x - y = -6 \end{pmatrix}$

1. ¿Para cuál sistema las gráficas son rectas paralelas?

2. ¿Para cuál sistema las ecuaciones son dependientes?

3. ¿Para cuál sistema la solución es el conjunto $\varnothing$?

4. ¿Cuál sistema es consistente?

Para los problemas 5-8 evalúe cada determinante.

5. $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

9. ¿Cuántos pares ordenados de números reales hay en el conjunto solución para el sistema $\begin{pmatrix} y = 3x - 4 \\ 9x - 3y = 12 \end{pmatrix}$?

10. Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 2y = -14 \\ 7x + 2y = -6 \end{pmatrix}$.

11. Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 4x - 5y = 17 \\ y = -3x + 8 \end{pmatrix}$.

12. Encuentre el valor de x en la solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = -21 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = -4 \end{pmatrix}$$

13. Encuentre el valor de y en la solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} 4x - y = 7 \\ 3x + 2y = 2 \end{pmatrix}.$$

14. Suponga que la matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones lineales en las tres variables x, y y z se puede cambiar a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Encuentre el valor de x en la solución para el sistema.

15. Suponga que la matriz aumentada de un sistema de tres ecuaciones lineales en las tres variables x, y y z se puede cambiar a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

Encuentre el valor de y en la solución para el sistema.

16. ¿Cuántas tripletas ordenadas hay en el conjunto solución para el siguiente sistema?

$$\begin{pmatrix} x + 3y - z = 5 \\ 2x - y - z = 7 \\ 5x + 8y - 4z = 22 \end{pmatrix}$$

17. ¿Cuántas tripletas ordenadas hay en el conjunto solución para el siguiente sistema?

$$\begin{pmatrix} 3x - y - 2z = 1 \\ 4x + 2y + z = 5 \\ 6x - 2y - 4z = 9 \end{pmatrix}$$

18. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 5x - 3y - 2z = -1 \\ 4y + 7z = 3 \\ 4z = -12 \end{pmatrix}$$

19. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + z = 0 \\ y - 3z = -1 \\ 2y + 5z = -2 \end{pmatrix}$$

20. Encuentre el valor de x en la solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 4y + z = 12 \\ -2x + 3y - z = -11 \\ 5x - 3y + 2z = 17 \end{pmatrix}$$

21. Encuentre el valor de y en la solución para el sistema

$$\begin{pmatrix} x - 3y + z = -13 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ 5x - 2y + 2z = -13 \end{pmatrix}$$

22. Una solución es 30% alcohol y otra es 70% alcohol. Parte de cada una de las dos soluciones se mezcla para producir 8 litros de una solución al 40%. ¿Cuántos litros de la solución al 70% se deben usar?

23. Una caja contiene $7.25 en monedas de cinco, diez y 25 centavos. Hay 43 monedas, y el número de monedas de 25 centavos es 1 más que tres veces el número de monedas de cinco centavos. Encuentre el número de monedas de 25 centavos en la caja.

24. Una compañía de aprovisionamiento fabrica lotes de tres tipos diferentes de repostería para servir en banquetes. Cada lote requiere los servicios de tres operaciones diferentes, como se indica en la tabla siguiente:

	Bollos de crema	Bombas de crema	Rollo danés
Amasado	0.2 hora	0.5 hora	0.4 hora
Horneado	0.3 hora	0.1 hora	0.2 hora
Escarchado	0.1 hora	0.5 hora	0.3 hora

Las operaciones de amasado, horneado y escarchado están disponibles un máximo de 7.0, 3.9 y 5.5 horas, respectivamente. ¿Cuántos lotes de cada tipo se deben fabricar, de modo que la compañía opere a toda su capacidad?

25. La medida del ángulo más grande de un triángulo es 20º más que la suma de las medidas de los otros dos ángulos. La diferencia en las medidas de los ángulos más grande y más pequeño es de 65º. Encuentre la medida de cada ángulo.

12

Álgebra de matrices

© Monkey Business Images | Dreamstime.com

Un planificador financiero puede usar las técnicas de la programación lineal cuando desarrolle un plan para sus clientes.

En la sección 11.3 se usaron matrices estrictamente como un dispositivo para ayudar a resolver sistemas de ecuaciones lineales. El objetivo principal fue el desarrollo de técnicas para resolver sistemas de ecuaciones, no el estudio de las matrices. Sin embargo, las matrices se pueden estudiar desde un punto de vista algebraico, en forma muy parecida al estudio del conjunto de los números reales. Esto es, es posible definir ciertas operaciones sobre matrices y verificar las propiedades de dichas operaciones. Este enfoque algebraico a las matrices es el punto central de este capítulo. Para obtener una visión simplificada del álgebra de matrices se comenzará por estudiar las matrices 2×2, y luego, más tarde, se extenderá el análisis para incluir matrices $m \times n$. Como bono, de este estudio surgirá otra técnica para resolver sistemas de ecuaciones. En la sección final de este capítulo se ampliarán las habilidades de resolución de problemas al estudiar sistemas de desigualdades lineales.

12.1 Álgebra de matrices 2 × 2

A lo largo de las próximas dos secciones trabajará principalmente con matrices 2 × 2; en consecuencia, cualquier referencia a matrices significa a matrices 2 × 2, a menos que se establezca de otro modo. La siguiente notación matricial 2 × 2 se usará con frecuencia.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Dos matrices son **iguales** si y sólo si todos los elementos en posiciones correspondientes son iguales. Por tanto, $A = B$ si y sólo si $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ y $a_{22} = b_{22}$.

Suma de matrices

Para **sumar** dos matrices se suman los elementos que aparecen en posiciones correspondientes. Por tanto, la suma de la matriz A y la matriz B se define del modo siguiente:

Definición 12.1

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

No es difícil demostrar que las **propiedades conmutativa** y **asociativa** son válidas para la suma de matrices. Por tanto, se afirma que

$$A + B = B + A \qquad \text{y} \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

Puesto que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se ve que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que se llama **matriz cero**, representada por O, es el **elemento identidad aditivo**. Por tanto, se afirma que

$$A + O = O + A = A$$

Puesto que todo número real tiene un inverso aditivo, se sigue que cualquier matriz A tiene un **inverso aditivo**, $-A$, que se forma al tomar el inverso aditivo de cada elemento de A. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \; -A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En general, puede afirmarse que toda matriz A tiene un inverso aditivo $-A$ tal que

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Resta de matrices

De nuevo, como el álgebra de los números reales, la **resta** de matrices se puede definir en términos de *sumar el inverso aditivo*. Por tanto, la resta se define del modo siguiente:

Definición 12.2

$$A - B = A + (-B)$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicación escalar

Cuando se trabaja con matrices, por lo general a un solo número real se le refiere como **escalar** para distinguirlo de una matriz. Entonces, tomar el **producto** de un escalar y una matriz (con frecuencia llamada **multiplicación escalar**) se puede lograr al multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar. Por ejemplo,

$$3\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-4) & 3(-6) \\ 3(1) & 3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -18 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

En general, la multiplicación escalar se define del modo siguiente:

Definición 12.3

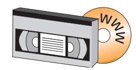
$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

donde k es cualquier número real.

EJEMPLO 1

Si $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$, encuentre

(a) $-2A$ **(b)** $3A + 2B$ **(c)** $A - 4B$



Soluciones

(a) $-2A = -2\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $$3A + 2B = 3\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 6 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 20 & -27 \end{bmatrix}$$

(c) $$A - 4B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 28 & -24 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -28 & 24 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -12 & 15 \\ -26 & 19 \end{bmatrix}$$ ■

Las siguientes propiedades, que son fáciles de comprobar, pertenecen a multiplicación escalar y suma matricial (donde k y l representan cualquier número real):

$$k(A + B) = kA + kB$$
$$(k + l)A = kA + lA$$
$$(kl)A = k(lA)$$

Multiplicación de matrices

En este momento probablemente parecería muy natural definir la multiplicación matricial al multiplicar los elementos correspondientes de dos matrices. Sin embargo, es evidente que tal definición no tiene muchas aplicaciones que valgan la pena. Por tanto, se usa un tipo especial de **multiplicación matricial**, en ocasiones conocida como “multiplicación renglón por columna”. La definición se enunciará, parafraseando lo que dice, y luego se darán algunos ejemplos.

Definición 12.4

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

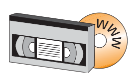
Note el patrón renglón por columna de la definición 12.4. Multiplique los renglones de A por las columnas de B en forma pareada, y sume los resultados. Por ejemplo, el elemento en el primer renglón y la segunda columna del producto se obtiene al multiplicar los elementos del primer renglón de A por los elementos de la segunda columna de B y sumar los resultados.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}]$$

Ahora observe algunos ejemplos específicos.

EJEMPLO 2

Si $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, encuentre **(a)** AB y **(b)** BA.



Soluciones

(a) $$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(3) + (1)(-1) & (-2)(-2) + (1)(7) \\ (4)(3) + (5)(-1) & (4)(-2) + (5)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 7 & 27 \end{bmatrix}$$

(b) $$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-2) + (-2)(4) & (3)(1) + (-2)(5) \\ (-1)(-2) + (7)(4) & (-1)(1) + (7)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ 30 & 34 \end{bmatrix}$$

■

El ejemplo 2 hace evidente que la multiplicación matricial *no* es una operación **conmutativa**.

EJEMPLO 3

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre AB.

Solución

Una vez que se sienta cómodo con la definición 12.4, puede hacer la suma mentalmente.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

El ejemplo 3 ilustra que el producto de dos matrices puede ser la matriz cero, aun cuando ninguna de las dos matrices sea la matriz cero. Esto es diferente de la propiedad de los números reales que afirma que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.

Como se ilustró y enunció, la multiplicación matricial *no* es una operación conmutativa. Sin embargo, es una operación **asociativa** y muestra dos **propiedades distributivas**. Estas propiedades se enuncian del modo siguiente:

$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

En el siguiente conjunto de problemas se le pedirá verificar estas propiedades.

Conjunto de problemas 12.1

Para los problemas 1-12 calcule la matriz indicada usando las siguientes matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

1. $A + B$

2. $B - C$

3. $3C + D$

4. $2D - E$

5. $4A - 3B$

6. $2B + 3D$

7. $(A - B) - C$

8. $B - (D - E)$

9. $2D - 4E$

10. $3A - 4E$

11. $B - (D + E)$

12. $A - (B + C)$

Para los problemas 13-26 calcule AB y BA.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & -12 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Para los problemas 27-30 use las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Calcule AB y BA.

28. Calcule AC y CA.

29. Calcule AD y DA.

30. Calcule AI e IA.

Para los problemas 31-34 use las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

31. Demuestre que $(AB)C = A(BC)$.

32. Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

33. Demuestre que $(A + B)C = AC + BC$.

34. Demuestre que $(3 + 2)A = 3A + 2A$.

Para los problemas 35-43 use las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. Demuestre que $A + B = B + A$.

36. Demuestre que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

37. Demuestre que $A + (-A) = O$.

38. Demuestre que $k(A + B) = kA + kB$ para cualquier número real k.

39. Demuestre que $(k + l)A = kA + lA$ para cualesquiera números reales k y l.

40. Demuestre que $(kl)A = k(lA)$ para cualesquiera números reales k y l.

41. Demuestre que $(AB)C = A(BC)$.

42. Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

43. Demuestre que $(A + B)C = AC + BC$.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

44. ¿Cómo demostraría que la suma de matrices 2×2 es una operación conmutativa?

45. ¿Cómo demostraría que la resta de matrices 2×2 no es una operación conmutativa?

46. ¿Cómo explicaría la multiplicación de matrices a alguien que faltó a clase el día que se estudió?

47. Su amigo le dice que, puesto que la multiplicación de números reales es una operación conmutativa, parece razonable que la multiplicación de matrices también deba ser una operación conmutativa. ¿Cómo reaccionaría ante esta afirmación?

MÁS INVESTIGACIÓN

48. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule A^2 y A^3, donde A^2 significa AA y A^3 significa AAA.

49. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, calcule A^2 y A^3.

50. ¿$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ para todas las matrices 2×2? Defienda su respuesta.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

51. Use una calculadora para comprobar las respuestas a las tres partes del ejemplo 1.

52. Use una calculadora para comprobar sus respuestas a los problemas 21-26.

53. Use las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que $(AB)C = A(BC)$.
(b) Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.
(c) Demuestre que $(B + C)A = BA + CA$.

12.2 Inversas multiplicativas

Se sabe que 1 es un elemento identidad multiplicativo para el conjunto de los números reales. Esto es, $a(1) = 1(a) = a$ para cualquier número real a. ¿Existe un elemento identidad para matrices 2×2? Sí. La matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es el **elemento identidad multiplicativo** porque

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

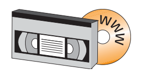
Por tanto, se puede afirmar que

$$AI = IA = A$$

para todas las matrices 2×2.

De nuevo, remítase a los números reales, donde todo número real a distinto de cero tiene un inverso multiplicativo $1/a$ que $a(1/a) = (1/a)a = 1$. ¿Toda matriz 2×2 tiene una inversa multiplicativa? Para ayudarle a responder esta pregunta, piense en encontrar el inverso multiplicativo (si existe uno) para una matriz específica. Esto debe darle algunas pistas acerca de un método general.

EJEMPLO 1 Encuentre la inversa multiplicativa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$



Solución

Se busca una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. En otras palabras, se quiere resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es necesario multiplicar las dos matrices en el lado izquierdo de esta ecuación y luego igualar los elementos de la matriz producto con los elementos correspondientes de la matriz identidad. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3x + 5z = 1 \\ 3y + 5w = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2y + 4w = 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (3) se producen valores para x y z.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1(4) - 5(0)}{3(4) - 5(2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3(0) - 1(2)}{3(4) - 5(2)} = \frac{-2}{2} = -1$$

Del mismo modo, al resolver simultáneamente las ecuaciones (2) y (4) se producen valores para y y w.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0(4) - 5(1)}{3(4) - 5(2)} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3(1) - 0(2)}{3(4) - 5(2)} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Para comprobar esto realice la siguiente multiplicación:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Ahora use el enfoque del ejemplo 1 sobre la matriz general

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Se quiere encontrar

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tal que $AA^{-1} = I$. En consecuencia, necesita resolver la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para x, y, z y w. Una vez más, multiplique las dos matrices en el lado izquierdo de la ecuación e iguale los elementos de esta matriz producto con los elementos correspondientes de la matriz identidad. Entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y + a_{12}w = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{pmatrix}$$

Resolver este sistema produce

$$x = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad y = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$z = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad w = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Note que el número en cada denominador, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, es el determinante de la matriz A. Por tanto, si $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices demostrará que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Si $|A| = 0$, entonces la matriz A *no* tiene inversa multiplicativa.

EJEMPLO 2

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

Solución

Primero encuentre $|A|$.

$$|A| = (3)(-4) - (5)(-2) = -2$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. ■

EJEMPLO 3

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$

Solución

$$|A| = (8)(3) - (-2)(-12) = 0$$

En consecuencia, A no tiene inversa multiplicativa. ■

Más acerca de la multiplicación de matrices

Hasta el momento se encontraron los productos solamente de matrices 2×2. El patrón de multiplicación renglón por columna se puede aplicar a muchos tipos diferentes de matrices, lo que se verá en la siguiente sección. Por ahora, encuentre el producto de una matriz 2×2 y una matriz 2×1, con la matriz 2×2 a la izquierda, del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{bmatrix}$$

Note que la matriz producto es una matriz 2×1. El siguiente ejemplo ilustra este patrón:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(5) + (3)(7) \\ (1)(5) + (-4)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -23 \end{bmatrix}$$

De regreso a la resolución de sistemas de ecuaciones

El sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = d_2 \end{pmatrix}$$

se puede representar por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Si se hace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación matricial anterior se puede escribir $AX = B$.

Si existe A^{-1}, entonces puede multiplicar ambos lados de $AX = B$ por A^{-1} (a la izquierda) y simplificar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}(B) \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Por tanto, el producto $A^{-1}B$ es la solución del sistema.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 5x + 4y = 10 \\ 6x + 5y = 13 \end{pmatrix}$

Solución

Si hace

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema dado puede representarse mediante la ecuación matricial $AX = B$. A partir de la discusión anterior, se sabe que la solución de esta ecuación es $X = A^{-1}B$, de modo que necesita encontrar A^{-1} y el producto $A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El conjunto solución del sistema dado es {(–2, 5)}. ■

EJEMPLO 5

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 7y = -17 \end{pmatrix}$

Solución

Si hace

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema se representa mediante $AX = B$, donde $X = A^{-1}B$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{29} & \frac{2}{29} \\ -\frac{4}{29} & \frac{3}{29} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{29} & \frac{2}{29} \\ -\frac{4}{29} & \frac{3}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El conjunto solución del sistema dado es {(1, –3)}. ■

Esta técnica de usar inversos matriciales para resolver sistemas de ecuaciones lineales es especialmente útil cuando hay muchos sistemas a resolver que tienen los mismos coeficientes pero diferentes términos constantes.

Conjunto de problemas 12.2

Para los problemas 1-18 encuentre el inverso multiplicativo (si existe) de cada matriz.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Para los problemas 19-26 calcule AB.

19. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix}$

Para los problemas 27-40 use el método de inversos matriciales para resolver cada sistema.

27. $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 13 \\ x + 2y = 8 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3x + 2y = 10 \\ 7x + 5y = 23 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 4x - 3y = -23 \\ -3x + 2y = 16 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 6x - y = -14 \\ 3x + 2y = -17 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} x - 7y = 7 \\ 6x + 5y = -5 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} x + 9y = -5 \\ 4x - 7y = -20 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 3x - 5y = 2 \\ 4x - 3y = -1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 5x - 2y = 6 \\ 7x - 3y = 8 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} y = 19 - 3x \\ 9x - 5y = 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 4x + 3y = 31 \\ x = 5y + 2 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 3x + 2y = 0 \\ 30x - 18y = -19 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 12x + 30y = 23 \\ 12x - 24y = -13 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = 12 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = -2 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}y = 11 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = 1 \end{pmatrix}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

41. Describa cómo resolver el sistema $\begin{pmatrix} x - 2y = -10 \\ 3x + 5y = 14 \end{pmatrix}$ usando cada una de las siguientes técnicas:

(a) método de sustitución

(b) método de eliminación por adición

(c) forma escalonada reducida de la matriz aumentada

(d) determinantes

(e) el método de inversos matriciales

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

42. Use su calculadora para encontrar el inverso multiplicativo (si existe) de cada una de las siguientes matrices. Asegúrese de comprobar sus respuestas al demostrar que $A^{-1}A = I$.

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ -19 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 9 & 36 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1.2 & 1.5 \\ 7.6 & 4.5 \end{bmatrix}$

43. Use su calculadora para encontrar el inverso multiplicativo de $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. ¿Qué dificultad encontró?

44. Use su calculadora y el método de inversos matriciales para resolver cada uno de los siguientes sistemas. Asegúrese de comprobar sus soluciones.

(a) $\begin{pmatrix} 5x + 7y = 82 \\ 7x + 10y = 116 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 9x - 8y = -150 \\ -10x + 9y = 168 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 15x - 8y = -15 \\ -9x + 5y = 12 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1.2x + 1.5y = 5.85 \\ 7.6x + 4.5y = 19.55 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 12x - 7y = -34.5 \\ 8x + 9y = 79.5 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} \frac{3x}{2} + \frac{y}{6} = 11 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 114x + 129y = 2832 \\ 127x + 214y = 4139 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{2y}{5} = 14 \\ \frac{3x}{4} + \frac{y}{4} = 14 \end{pmatrix}$

12.3 Matrices $m \times n$

Ahora vea cuánta del álgebra de matrices 2×2 se extiende a las matrices $m \times n$; esto es, a matrices de cualquier dimensión. En la sección 11.4 se representó una matriz general $m \times n$ como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El elemento en la intersección del renglón i y la columna j se denota mediante a_{ij}. También se acostumbra denotar una matriz A con la notación abreviada (a_{ij}).

La suma de matrices se puede extender a matrices de cualquier dimensión mediante la siguiente definición:

Definición 12.5

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de *la misma dimensión*. Entonces

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

La definición 12.5 afirma que, para sumar dos matrices, se suman los elementos que aparecen en posiciones correspondientes en las matrices. Para que esto funcione, las matrices deben ser de las mismas dimensiones. Un ejemplo de la suma de dos matrices 3×2 es

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -8 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$$

Las **propiedades conmutativa** y **asociativa** se mantienen para cualquier matriz que se pueda sumar. La **matriz cero** $m \times n$, denotada mediante O, es la matriz que contiene todos ceros. Es el **elemento identidad para la suma**. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -5 \\ -7 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -5 \\ -7 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Toda matriz A tiene un **inverso aditivo**, $-A$, que se encuentra al cambiar el signo de cada elemento de A. Por ejemplo, si

$$A = [2 \quad -3 \quad 0 \quad 4 \quad -7]$$

entonces

$$-A = [-2 \quad 3 \quad 0 \quad -4 \quad 7]$$

Más aún, $A + (-A) = O$ para todas las matrices.

La definición que se dio anteriormente para la resta, $A - B = A + (-B)$, se puede extender a cualesquiera dos matrices de la misma dimensión. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} [-4 \quad 3 \quad -5] - [7 \quad -4 \quad -1] &= [-4 \quad 3 \quad -5] + [-7 \quad 4 \quad 1] \\ &= [-11 \quad 7 \quad -4] \end{aligned}$$

El **producto escalar** de cualquier número real k y cualquier matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$ se define como

$$kA = (ka_{ij})$$

En otras palabras, para encontrar kA, simplemente se multiplica cada elemento de A por k. Por ejemplo,

$$(-4)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -12 \\ -16 & -20 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Las propiedades $k(A + B) = kA + kB$, $(k + l)A = kA + lA$ y $(kl)A = k(lA)$ se mantienen para todas las matrices. Las matrices A y B deben ser de la misma dimensión para sumarse.

La definición renglón por columna para multiplicar dos matrices se puede ampliar, pero debe tener cuidado. Para definir el producto AB de dos matrices A y B, **el número de columnas de** $\boldsymbol{A}$ **debe ser igual al número de renglones de** $\boldsymbol{B}$. Suponga $A = (a_{ij})$ es $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ es $n \times p$. Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = C$$

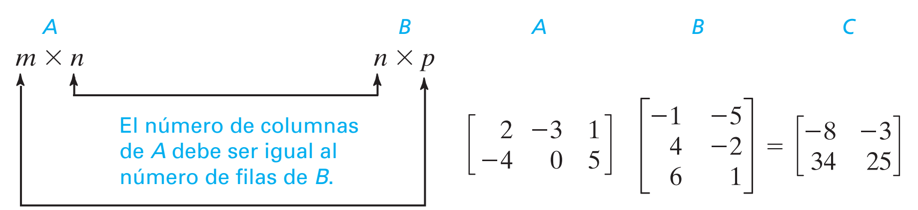
La matriz producto C es de la dimensión $m \times p$, y el elemento general, c_{ij}, se determina del modo siguiente:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Un elemento específico de la matriz producto, tal como c_{23}, es el resultado de multiplicar los elementos en el renglón 2 de la matriz A por los elementos en la columna 3 de la matriz B y sumar los resultados. Por tanto,

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + \cdots + a_{2n}b_{n3}$$

El siguiente ejemplo ilustra el producto de una matriz 2×3 y una matriz 3×2:



$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 34 & 25 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (2)(-1) + (-3)(4) + (1)(6) = -8$$

$$c_{12} = (2)(-5) + (-3)(-2) + (1)(1) = -3$$

$$c_{21} = (-4)(-1) + (0)(4) + (5)(6) = 34$$

$$c_{22} = (-4)(-5) + (0)(-2) + (5)(1) = 25$$

Recuerde que la multiplicación de matrices *no* es conmutativa. De hecho, puede ser que AB esté definida y BA no lo esté. Por ejemplo, si A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×4, entonces el producto AB es una matriz 2×4, pero el producto BA no está definido porque el número de columnas de B no es igual al número de filas de A.

La **propiedad asociativa para la multiplicación** y las dos **propiedades distributivas** se mantienen si las matrices tienen el número adecuado de renglones y columnas para las operaciones definidas. En este caso, se tiene $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.

Matrices cuadradas

Ahora se extenderá algo del álgebra de matrices 2×2 a todas las matrices cuadradas (donde el número de renglones es igual al número de columnas). Por ejemplo, el **elemento identidad multiplicativo** general para las matrices cuadradas contiene 1 en la diagonal principal desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha, y 0 en las demás partes. Por tanto, para matrices 3×3 y 4×4, los elementos identidad multiplicativos son los siguientes:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la sección 12.2 se vio que algunas matrices 2×2, mas no todas, tienen inversas multiplicativas. En general, algunas matrices cuadradas de una dimensión particular, mas no todas, tienen inversas multiplicativas. Si una matriz cuadrada $n \times n$ A tiene una inversa multiplicativa A^{-1}, entonces

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

La técnica que se utilizó en la sección 12.2 para encontrar inversas multiplicativas de matrices 2×2 sí se generaliza, pero se vuelve muy complicada. Por tanto, ahora se describirá otra técnica que funciona para todas las matrices cuadradas. Dada una matriz $n \times n$ A, se comienza por formar la matriz $n \times 2n$

$$\left[\begin{array}{cccc:ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

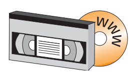
donde la matriz identidad I_n aparece a la derecha de A. Ahora aplique una sucesión de transformaciones elementales de fila a esta matriz doble hasta que se obtiene una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

La matriz B en esta matriz es la inversa deseada A^{-1}. Si A no tiene una inversa, entonces es imposible cambiar la matriz original a esta forma final.

EJEMPLO 1

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$



Solución

Primero forme la matriz

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora multiplique el renglón 1 por $\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación, sume −3 por el renglón 1 al renglón 2 para formar un nuevo renglón 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Luego multiplique el renglón 2 por −1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

Finalmente, sume −2 por el renglón 2 al renglón 1 para formar un nuevo renglón 1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

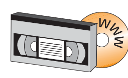
La matriz dentro del recuadro es A^{-1}; esto es,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Esto se puede comprobar, como siempre, al demostrar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. ■

EJEMPLO 2

Encuentre A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$



Solución

Forme la matriz $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Sume −2 por el renglón 1 al renglón 2, y sume 3 por el renglón 1 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sume −1 por el renglón 2 al renglón 1, y sume −4 por el renglón 2 al renglón 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 11 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplique el renglón 3 por $\frac{1}{24}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{array}\right]$$

Sume −7 por el renglón 3 al renglón 1, y sume 5 por el renglón 3 al renglón 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

¡Asegúrese de comprobar esto!

Sistemas de ecuaciones

En la sección 12.2 se usó el concepto de inverso multiplicativo para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Esta misma técnica aplica a sistemas generales de n ecuaciones lineales en n variables. Considere uno de tales ejemplos que implique tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z = -8 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ -3x + y - 2z = 4 \end{pmatrix}$$

Solución

Si hace

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema dado puede representarse mediante la ecuación matricial $AX = B$. Por tanto, se sabe que $X = A^{-1}B$, así que es necesario encontrar A^{-1} y el producto $A^{-1}B$. La matriz A^{-1} se encontró en el ejemplo 2, así que use dicho resultado y encuentre $A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

El conjunto solución del sistema dado es $\{(1, -1, -4)\}$. ■

Conjunto de problemas 12.3

Para los problemas 1-8 encuentre $A + B$, $A - B$, $2A + 3B$ y $4A - 2B$.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -7 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

3. $A = [2 \quad -1 \quad 4 \quad 12]$, $B = [-3 \quad -6 \quad 9 \quad -5]$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 10 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -2 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -5 & -4 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 6 & -5 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -6 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Para los problemas 9-20 encuentre AB y BA, siempre que exista.

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ -6 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = [2 \quad -1 \quad 3 \quad 4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $B = [3 \quad -4 \quad -5]$

17. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [3 \quad -4]$

20. $A = [3 \quad -7]$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix}$

Para los problemas 21-36 use la técnica analizada en esta sección para encontrar el inverso multiplicativo (si existe) de cada matriz.

21. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -11 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para los problemas 37-46 use el método de inversos matriciales para resolver cada sistema. Los inversos multiplicativos requeridos se encontraron en los problemas 21-36.

37. $\begin{pmatrix} 2x + y = -4 \\ 7x + 4y = -13 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 3x + 7y = -38 \\ 2x + 5y = -27 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} -2x + y = 1 \\ 3x - 4y = -14 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} -3x + y = -18 \\ 3x - 2y = 15 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} x + 2y + 3z = -2 \\ x + 3y + 4z = -3 \\ x + 4y + 3z = -6 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} x + 3y - 2z = 5 \\ x + 4y - z = 3 \\ -2x - 7y + 5z = -12 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = -3 \\ -2x + 5y + 3z = 34 \\ 3x - 5y + 7z = 14 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} x + 4y - 2z = 2 \\ -3x - 11y + z = -2 \\ 2x + 7y + 3z = -2 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} x + 2y + 3z = 2 \\ -3x - 4y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - z = 4 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = -39 \\ -x + 3y - 2z = 40 \\ -2x + 6y + z = 45 \end{pmatrix}$

47. Es posible generar cinco sistemas de ecuaciones lineales a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ -3x + y - 2z = c \end{pmatrix}$$

al dejar que a, b y c asuman cinco diferentes conjuntos de valores. Resuelva el sistema para cada conjunto de valores. El inverso de la matriz coeficiente de estos sistemas está dado en el ejemplo 2 de esta sección.

(a) $a = 7, b = 1$ y $c = -1$
(b) $a = -7, b = 5$ y $c = 1$
(c) $a = -9, b = -8$ y $c = 19$
(d) $a = -1, b = -13$ y $c = -17$
(e) $a = -2, b = 0$ y $c = -2$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

48. ¿Cómo describiría la multiplicación de matrices fila por columna?

49. Proporcione una explicación paso a paso para encontrar el inverso multiplicativo de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ usando la técnica de la sección 12.3.

50. Explique cómo encontrar el inverso multiplicativo de la matriz en el problema 49 usando la técnica discutida en la sección 12.2.

MÁS INVESTIGACIÓN

51. Las matrices se pueden usar para codificar y decodificar mensajes. Por ejemplo, suponga que se establece una correspondencia uno a uno entre las letras del alfabeto y los primeros 26 números, del modo siguiente:

A	B	C		Z
↕	↕	↕	. . .	↕
1	2	3		26

Ahora suponga que quiere codificar el mensaje PLAY IT BY EAR (tóquela de oído). Puede separar las letras del mensaje en grupos de dos. Puesto que el último grupo contendrá solamente una letra, agregue arbitrariamente una Z para formar un grupo de dos. Asigne también un número a cada letra a partir de la asociación letra/número que se mostró.

P	L	A	Y	I	T	B	Y	E	A	R	Z
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
16	12	1	25	9	20	2	25	5	1	18	26

Cada par de números se puede registrar como columnas en una matriz B 2×6.

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 1 & 9 & 2 & 5 & 18 \\ 12 & 25 & 20 & 25 & 1 & 26 \end{bmatrix}$$

Ahora elija una matriz 2×2 tal que la matriz contenga sólo enteros y su inverso también contenga sólo enteros. Por ejemplo, puede usar $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

A continuación, encuentre el producto AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 1 & 9 & 2 & 5 & 18 \\ 12 & 25 & 20 & 25 & 1 & 26 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 28 & 47 & 31 & 16 & 80 \\ 104 & 55 & 85 & 60 & 27 & 142 \end{bmatrix}$$

Ahora tiene el mensaje codificado:

60 104 28 55 47 85 31 60 16 27 80 142

Una persona que decodifique el mensaje pondría los números de vuelta en una matriz 2×6, la multiplicaría a la izquierda por A^{-1} y convertiría los números de vuelta en letras.

Cada uno de los siguientes mensajes codificados se formó usando la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Decodifique cada uno de los mensajes.

(a) 68 40 77 51 78 49 23 15 29 19 85 52 41 27

(b) 62 40 78 47 64 36 19 11 93 57 93 56 88 57

(c) 64 36 58 37 63 36 21 13 75 47 63 36 38 23 118 72

(d) 61 38 115 69 93 57 36 20 78 49 68 40 77 51 60 37 47 26 84 51 21 11

52. Suponga que el par ordenado (x, y) de un sistema coordenado rectangular se registra como una matriz 2×1 y luego se multiplica a la izquierda por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se obtendría

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

El punto $(x, -y)$ es una reflexión sobre el eje x del punto (x, y). Por tanto, la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ realiza

una reflexión sobre el eje x. ¿Qué tipo de transformación geométrica se realiza mediante cada una de las siguientes matrices?

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

[*Sugerencia*: Compruebe las pendientes de las líneas a través del origen.]

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

53. Use su calculadora para comprobar sus respuestas a los problemas 14, 18, 28, 30, 32, 34, 36, 42, 44, 46 y 47.

54. Use su calculadora y el método de inversos matriciales para resolver cada uno de los siguientes sistemas. Asegúrese de comprobar sus soluciones.

(a) $\begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z = 54 \\ 3x + y - z = 32 \\ 5x - 4y + 3z = 58 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 17x + 15y - 19z = 10 \\ 18x - 14y + 16z = 94 \\ 13x + 19y - 14z = -23 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1.98x + 2.49y + 3.15z = 45.72 \\ 2.29x + 1.95y + 2.75z = 42.05 \\ 3.15x + 3.20y + 1.85z = 42 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -23 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -22 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 = 59 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -103 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 12x_5 = 98 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 41 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 - 9x_5 = -41 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 7x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 6x_5 = 12 \end{pmatrix}$

12.4 Sistemas de desigualdades lineales: programación lineal

El proceso para encontrar conjuntos solución para **sistemas de desigualdades lineales** se apoya enormemente en el enfoque de graficación. (Recuerde que en la sección 7.3 se estudió la graficación de desigualdades lineales.) El conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x + y > 2 \\ x - y < 2 \end{pmatrix}$$

es la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades individuales. En la figura 12.1(a) se indica el conjunto solución para $x + y > 2$, y en la figura 12.1(b) se indica el conjunto solución para $x - y < 2$. La región sombreada en la figura 12.1(c) representa la intersección de los dos conjuntos solución; por tanto, es la gráfica del sistema. Recuerde que las rectas discontinuas se usan para indicar que los puntos sobre las líneas no se incluyen en el conjunto solución. En los siguientes ejemplos sólo se indica el conjunto solución final para el sistema.

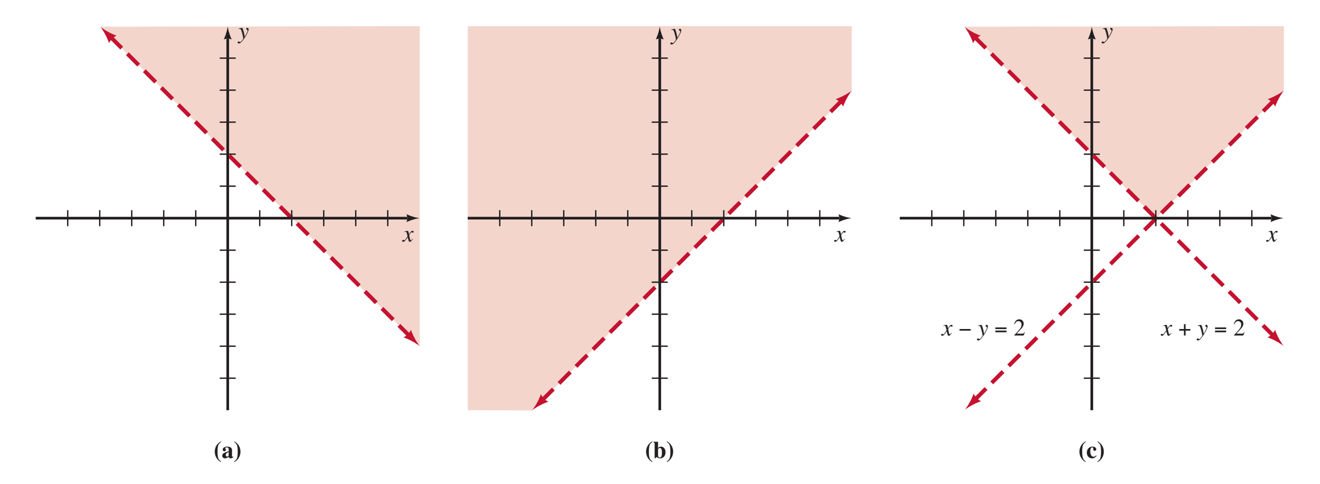
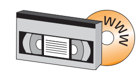


Figura 12.1

EJEMPLO 1

Resuelva el siguiente sistema mediante graficación.

$$\begin{pmatrix} 2x - y \geq 4 \\ x + 2y < 2 \end{pmatrix}$$



Solución

La gráfica de $2x - y \geq 4$ consiste de todos los puntos *sobre o abajo* de la recta $2x - y = 4$. La gráfica de $x + 2y < 2$ consiste de todos los puntos *bajo* la recta $x + 2y = 2$. La gráfica del sistema se indica mediante la región sombreada en la figura 12.2. Note que todos los puntos en la región sombreada están sobre o bajo la recta $2x - y = 4$ y bajo la recta $x + 2y = 2$.

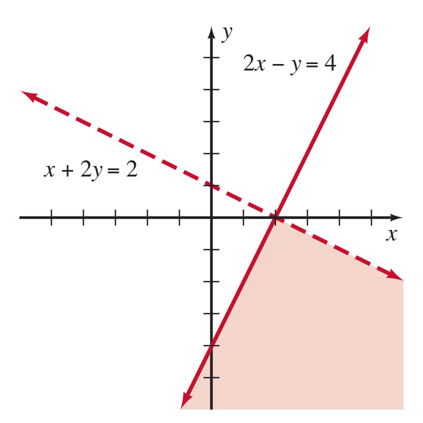


Figura 12.2

EJEMPLO 2

Resuelva el siguiente sistema mediante graficación:

$$\begin{pmatrix} x \leq 2 \\ y \geq -1 \end{pmatrix}$$

Solución

Recuerde que aun cuando cada desigualdad contenga solamente una variable, se trabaja en un sistema coordenado rectangular que implica pares ordenados. Esto es, el sistema también se podría escribir

$$\begin{pmatrix} x + 0(y) \leq 2 \\ 0(x) + y \geq -1 \end{pmatrix}$$

La gráfica de este sistema es la región sombreada en la figura 12.3. Note que todos los puntos en la región sombreada *están sobre o a la izquierda* de la recta $x = 2$ y *sobre o arriba* la recta $y = -1$.

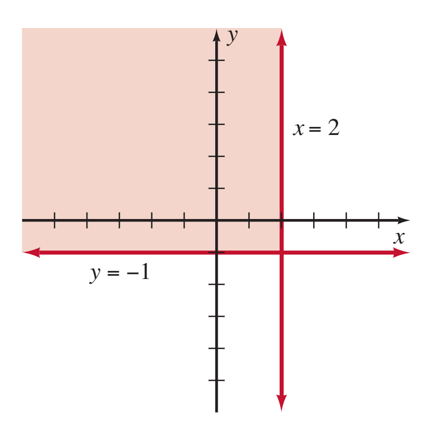


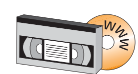
Figura 12.3 ■

Un sistema puede contener más de dos desigualdades, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Resuelva el siguiente sistema mediante graficación:

$$\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 6 \end{pmatrix}$$



Solución

El conjunto solución para el sistema es la intersección de los conjuntos solución de las cuatro desigualdades. La región sombreada en la figura 12.4 indica el conjunto solución para el sistema. Note que todos los puntos en la región sombreada están *sobre o a la derecha* del eje y, *sobre o arriba* del eje x, *sobre o bajo* la recta $2x + 3y = 12$, y *sobre o bajo* la recta $3x + y = 6$.

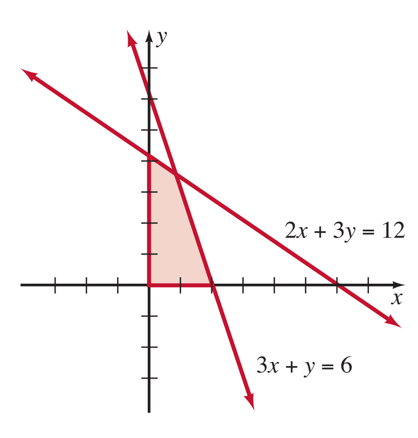


Figura 12.4 ■

Programación lineal: otro vistazo a la resolución de problemas

A lo largo de este texto la resolución de problemas es un tema unificador. Por tanto, parece apropiado en este momento brindarle un breve vistazo de un área de las matemáticas que se desarrolló en la década de 1940, específicamente como una herramienta para resolver problemas. Muchos problemas aplicados implican la idea de *maximizar* o *minimizar* cierta función que está sujeta a varias restricciones; éstas se pueden expresar como desigualdades lineales. La **programación lineal** se desarrolló como un método para resolver tales problemas.

Observaciones: El término *programación* se refiere a la distribución de recursos limitados con la finalidad de maximizar o minimizar cierta función, como costo, ganancia, distancia, etc. Por tanto, no significa lo mismo que en programación de computadoras. Las restricciones que gobiernan la distribución de recursos determinan las desigualdades y ecuaciones lineales; por ende, se usa el término *programación lineal*.

Antes de introducir un tipo de problema de programación lineal, es necesario ampliar un poco un concepto matemático. Una **función lineal en dos variables**, x y y, es una función de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, donde a, b y c son números reales. En otras palabras, con cada par ordenado (x, y) se asocia un tercer número por la regla $ax + by + c$. Por ejemplo, suponga que la función f se describe mediante $f(x, y) = 4x + 3y + 5$. Entonces, $f(2, 1) = 4(2) + 3(1) + 5 = 16$.

Primero, revise de nuevo algunas ideas matemáticas que forman la base para resolver un problema de programación lineal. Considere la región sombreada en la figura 12.5 y las siguientes funciones lineales con dos variables:

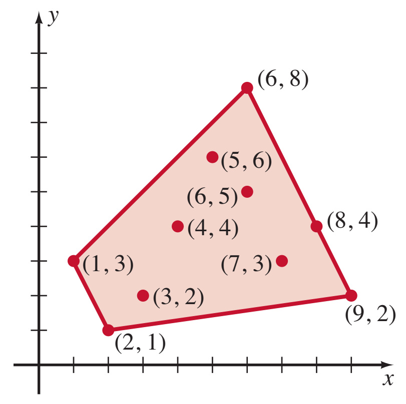


Figura 12.5

$$f(x, y) = 4x + 3y + 5$$

$$f(x, y) = 2x + 7y - 1$$

$$f(x, y) = x - 2y$$

Suponga que necesita encontrar el valor máximo y el valor mínimo que alcanzan cada una de las funciones en la región indicada. La siguiente tabla resume los va-

lores para los pares ordenados indicados en la figura 12.5. Note que, para cada función, los valores máximo y mínimo se obtienen en los vértices de la región.

	Pares ordenados	Valor de $f(x, y) = 4x + 3y = 5$	Valor de $f(x, y) = 2x + 7y - 1$	Valor de $f(x, y) = x - 2y$
Vértice	(2, 1)	16 (*mínimo*)	10 (*mínimo*)	0
	(3, 2)	23	19	−1
Vértice	(9, 2)	47	31	5 (*máximo*)
Vértice	(1, 3)	18	22	−5
	(7, 3)	42	34	1
	(4, 4)	33	35	−4
	(8, 4)	49	43	0
	(6, 5)	44	46	−4
	(5, 6)	43	51	−7
Vértice	(6, 8)	53 (*máximo*)	67 (*máximo*)	−10 (*mínimo*)

Se afirma que, para funciones lineales, los valores funcionales máximo y mínimo *siempre* se obtienen en los vértices de la región. Para justificar esto, considere la familia de rectas $x - 2y = k$, donde k es una constante arbitraria. (Ahora sólo se trabaja con la función $f(x, y) = x - 2y$.) En forma pendiente-ordenada, $x - 2y = k$ se convierte en $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}k$, de modo que se tiene una familia de rectas paralelas, donde cada una tiene una pendiente de $\frac{1}{2}$. En la figura 12.6 se bosquejan algunas de estas rectas de modo que cada línea tiene al menos un punto en común con la región dada. Note que $x - 2y$ alcanza un valor mínimo de -10 en el vértice (6, 8) y un valor máximo de 5 en el vértice (9, 2).

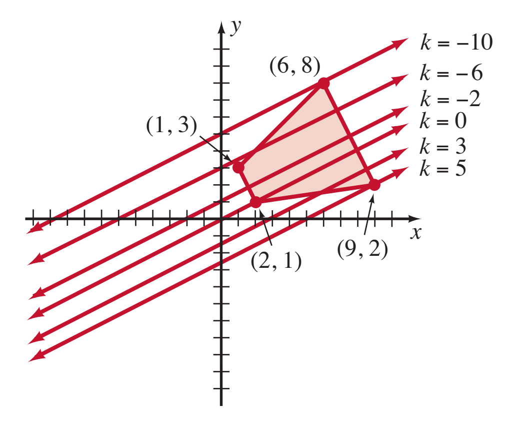


Figura 12.6

En general, suponga que f es una función lineal con dos variables x y y, y que S es una región del plano xy. Si f logra un valor máximo (mínimo) en S, entonces dicho valor máximo (mínimo) se obtiene en un vértice de S.

Observaciones: Se dice que un subconjunto del plano xy está **acotado** si existe un círculo que contiene todos sus puntos; de otro modo, se dice que el subconjunto es **no acotado**. Un conjunto acotado contendrá valores máximo y mínimo para una función, pero un conjunto no acotado puede no contener tales valores.

Ahora se considerarán dos ejemplos que ilustran un enfoque de graficación general para resolver un problema de programación lineal con dos variables. El primer ejemplo proporciona la constitución general de tal problema; el segundo ejemplo ilustrará el tipo de configuración a partir de la cual evolucionan la función y las desigualdades.

EJEMPLO 4

Encuentre el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 9x + 13y$ en la región determinada por el siguiente sistema de desigualdades.

$$\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ 2x + y \leq 10 \end{pmatrix}$$

Solución

Primero grafique las desigualdades para determinar la región, como se indica en la figura 12.7. (Tal región se llama **conjunto de soluciones factibles** y a las desigualdades se les refiere como **restricciones**.) El punto (3, 4) se determina al resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y = 18 \\ 2x + y = 10 \end{pmatrix}$$

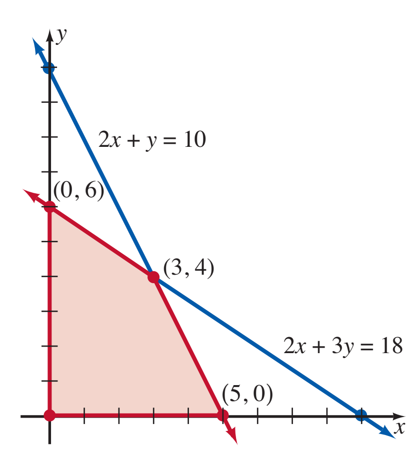


Figura 12.7

A continuación, puede determinar los valores de la función dada en los vértices de la región. (Tal función a maximizar o minimizar se llama **función objetivo**.)

Vértices	**Valor de $f(x, y) = 9x + 13y$**
(0, 0)	0 (*mínimo*)
(5, 0)	45
(3, 4)	79 (*máximo*)
(0, 6)	78

Un valor mínimo de 0 se obtiene en (0, 0), y un valor máximo de 79 se obtiene en (3, 4). ■

PROBLEMA 1

Una compañía que fabrica aparatos y utensilios tiene disponible la siguiente información de producción:

1. Producir un aparato requiere 3 horas de trabajo en la máquina A y 1 hora en la máquina B.
2. Producir un utensilio requiere 2 horas en la máquina A y 1 hora en la máquina B.
3. La máquina A está disponible por no más de 120 horas por semana, y la máquina B está disponible por no más de 50 horas por semana.
4. Los aparatos se pueden vender con una ganancia de $3.75 cada uno, y en un utensilio se puede obtener una ganancia de $3.

¿Cuántos aparatos y cuántos utensilios debe producir la compañía cada semana para maximizar su ganancia? ¿Cuál sería la ganancia máxima?

Solución

Sea x el número de aparatos y y el número de utensilios. Por tanto, la función ganancia es $P(x, y) = 3.75x + 3y$. Las restricciones para el problema se representan mediante las siguientes desigualdades:

$3x + 2y \leq 120$ Máquina A disponible por no más de 120 horas.

$x + y \leq 50$ Máquina B disponible por no más de 50 horas.

$x \geq 0$
$y \geq 0$ El número de aparatos y utensilios debe representarse mediante un número no negativo.

Cuando se grafican estas desigualdades, se obtiene el conjunto de soluciones factibles indicadas por la región sombreada en la figura 12.8. A continuación se encuentra el valor de la función ganancia en los vértices; esto produce la tabla siguiente.

Vértices	**Valor de $P(x, y) = 3.75x + 3y$**
(0, 0)	0
(40, 0)	150
(20, 30)	165 (*máximo*)
(0, 50)	150

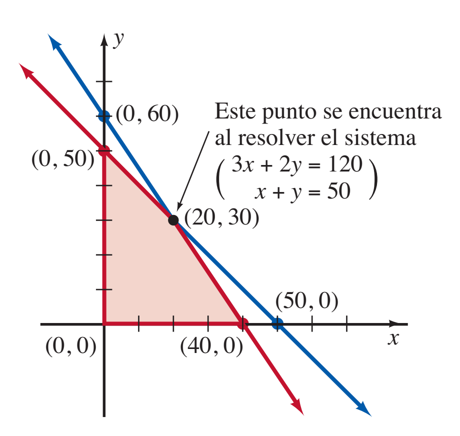


Figura 12.8

Por tanto, se obtiene una ganancia máxima de $165 al producir 20 aparatos y 30 utensilios. ■

Conjunto de problemas 12.4

Para los problemas 1-24 indique el conjunto solución para cada sistema de desigualdades al graficar el sistema y sombrear la región adecuada.

1. $\begin{pmatrix} x + y > 3 \\ x - y > 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x - y < 2 \\ x + y < 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x - 2y \leq 4 \\ x + 2y > 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3x - y > 6 \\ 2x + y \leq 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2x + 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 4x + 3y \geq 12 \\ 3x - 4y \geq 12 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2x - y \geq 4 \\ x + 3y < 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3x - y < 3 \\ x + y \geq 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} x + 2y > -2 \\ x - y < -3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} x - 3y < -3 \\ 2x - 3y > -6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} y > x - 4 \\ y < x \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} y \leq x + 2 \\ y \geq x \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} x - y > 2 \\ x - y > -1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} x + y > 1 \\ x + y > 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} y \geq x \\ x > -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} y < x \\ y \leq 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} y < x \\ y > x + 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} x \leq 3 \\ y \leq -1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} y > -2 \\ x > 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} x + 2y > 4 \\ x + 2y < 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \\ 4x + 7y \leq 28 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \\ 2x - 3y \leq 6 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ 5x + 3y \geq 15 \end{pmatrix}$

Para los problemas 25-28 (figuras de la 12.9 a la 12.12), encuentre el valor máximo y el valor mínimo de la función dada en la región indicada.

25. $f(x, y) = 3x + 5y$

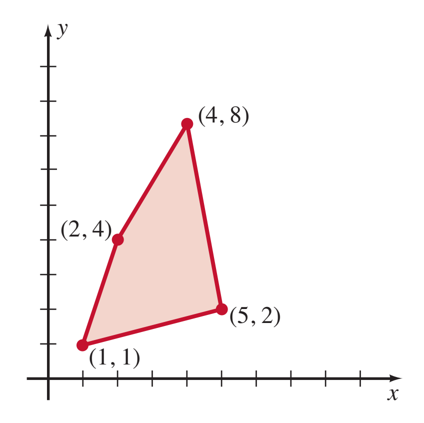


Figura 12.9

26. $f(x, y) = 8x + 3y$

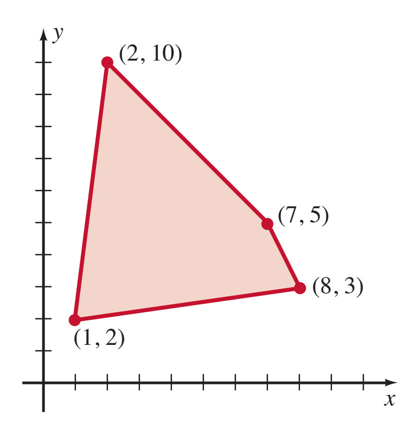


Figura 12.10

27. $f(x, y) = x + 4y$

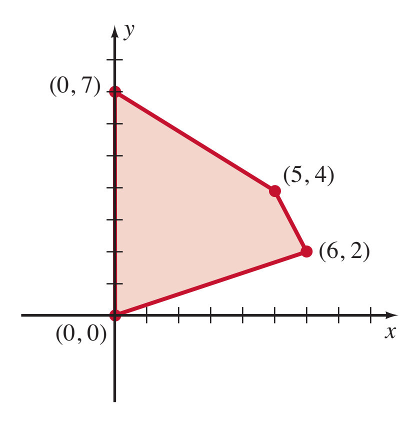


Figura 12.11

28. $f(x, y) = 2.5x + 3.5y$

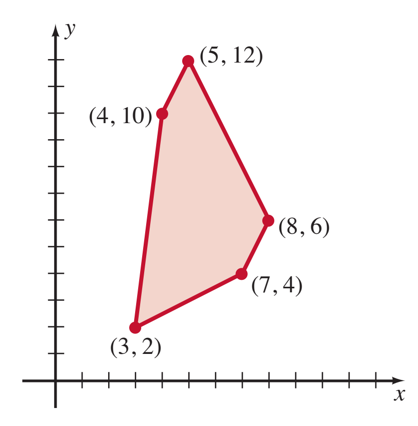


Figura 12.12

29. Maximice la función $f(x, y) = 3x + 7y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$3x + 2y \leq 18$$
$$3x + 4y \geq 12$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

30. Maximice la función $f(x, y) = 1.5x + 2y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$3x + 2y \leq 36$$
$$3x + 10y \leq 60$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

31. Maximice la función $f(x, y) = 40x + 55y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 10$$
$$x + y \leq 7$$
$$2x + 3y \leq 18$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

32. Maximice la función $f(x, y) = 0.08x + 0.09y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$x + y \leq 8000$$
$$y \leq \frac{1}{3}x$$
$$y \geq 500$$
$$x \leq 7000$$
$$x \geq 0$$

33. Minimice la función $f(x, y) = 0.2x + 0.5y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 12$$
$$2x + 5y \geq 20$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

34. Minimice la función $f(x, y) = 3x + 7y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 9$$
$$6x + 11y \geq 84$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

35. Maximice la función $f(x, y) = 9x + 2y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$5y - 4x \leq 20$$
$$4x + 5y \leq 60$$
$$x \geq 0$$
$$x \leq 10$$
$$y \geq 0$$

36. Maximice la función $f(x, y) = 3x + 4y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2y - x \leq 6$$
$$x + y \leq 12$$
$$x \geq 2$$
$$x \leq 8$$
$$y \geq 0$$

Para los problemas 37-42 resuelva cada problema de programación lineal usando el método de graficación que se ilustra en el problema 1 de la página 677.

37. Suponga que un inversionista quiere invertir hasta \$10 000. Planea comprar un tipo especulativo de acción y un tipo conservador. La acción especulativa paga un rendimiento del 12% y la acción conservadora paga un rendimiento del 9%. Decide invertir al menos \$2000 en las acciones conservadoras y no más de \$6000 en las acciones especulativas. Más aún, no quiere que la inversión especulativa supere a la conservadora. ¿Cuánto debe invertir a cada tasa para maximizar su rendimiento?

38. Un fabricante de palos de golf obtiene una ganancia de \$50 por juego en un modelo A y \$45 por juego en un modelo B. La producción diaria del modelo de palos A está entre 30 y 50 juegos y la del modelo de palos B está entre 10 y 20 juegos. La producción diaria total no supera 50 juegos. ¿Cuántos juegos de cada modelo debe fabricar diariamente para maximizar la ganancia?

39. Una compañía fabrica dos tipos de calculadoras. El tipo A se vende por \$12 y el tipo B se vende por \$10. A la compañía le cuesta \$9 producir una calculadora del tipo A y \$8 producir una calculadora del tipo B. En un mes la compañía se equipa para producir entre 200 y 300 de la calculadora del tipo A, y entre 100 y 250 de la calculadora del tipo B, pero no más de 500 en conjunto. ¿Cuántas calculadoras de cada tipo debe producir por mes para maximizar la diferencia entre el precio de venta total y el costo total de producción?

40. Un fabricante de pequeñas copiadoras obtiene una ganancia de \$200 en un modelo de lujo y \$250 en un modelo estándar. La compañía quiere producir al menos 50 modelos de lujo por semana y al menos 75 modelos estándar por semana. Sin embargo, la producción semanal no debe superar 150 copiadoras. ¿Cuántas copiadoras de cada tipo debe producir para maximizar la ganancia?

41. Una compañía fabrica los productos A y B de acuerdo con la siguiente información de producción:

(a) Producir una unidad del producto A requiere 1 hora de tiempo laboral en la máquina I, 2 horas en la máquina II y 1 hora en la máquina III.

(b) Producir una unidad del producto B requiere 1 hora de tiempo laboral en la máquina I, 1 hora en la máquina II y 3 horas en la máquina III.

(c) La máquina I está disponible por no más de 40 horas por semana, la máquina II lo está por no más de 40 horas por semana y la máquina III por no más de 60 horas por semana.

(d) El producto A se puede vender con una ganancia de $2.75 por unidad y el producto B con una ganancia de $3.50 por unidad.

¿Cuántas unidades de cada producto, A y B, deben producirse por semana para maximizar la ganancia?

42. Suponga que la compañía a la que se refiere en el problema 1 también fabrica cosos y chunches, y tiene disponible la siguiente información de producción:

(a) Producir un coso requiere 4 horas de trabajo en la máquina A y 2 horas en la máquina B.

(b) Producir un chunche requiere 5 horas de trabajo en la máquina A y 5 horas en la máquina B.

(c) La máquina A está disponible por no más de 200 horas por mes y la máquina B está disponible por no más de 150 horas por mes.

(d) Los cosos se pueden vender con una ganancia de $7 cada uno y los chunches con una ganancia de $8 cada uno.

¿Cuántos cosos y chunches se deben producir mensualmente para maximizar la ganancia?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. Describa con sus propias palabras el proceso de resolver un sistema de desigualdades.

44. ¿Qué es la programación lineal? Escriba un párrafo o dos que respondan esta pregunta en una forma que puedan entender estudiantes de álgebra elemental.

Capítulo 12 Resumen

(12.1-12.3) Asegúrese que comprende las siguientes ideas sobre el álgebra de matrices.

1. Las matrices de la misma dimensión se adicionan al sumar los elementos en posiciones correspondientes.

2. La suma matricial es una operación conmutativa y asociativa.

3. Las matrices de cualquier dimensión específica tienen un elemento identidad aditivo, que es la matriz de esa misma dimensión que contiene todos los ceros.

4. Toda matriz A tiene un inverso aditivo, $-A$, que se puede encontrar al cambiar el signo de cada elemento de A.

5. Las matrices de la misma dimensión se pueden restar por la definición $A - B = A + (-B)$.

6. El producto escalar de un número real k y una matriz A se puede encontrar al multiplicar cada elemento de A por k.

7. Las siguientes propiedades se sostienen para multiplicación escalar y suma matricial.

$$k(A + B) = kA + kB$$
$$(k + l)A = kA + lA$$
$$(kl)A = k(lA)$$

8. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces el producto AB es una matriz $m \times p$. El término general, c_{ij}, de la matriz producto $C = AB$ se determina mediante la ecuación

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

9. La multiplicación de matrices no es una operación conmutativa, pero sí una operación asociativa.

10. La multiplicación de matrices tiene dos propiedades distributivas:

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{y} \qquad (A + B)C = AC + BC$$

11. El elemento identidad multiplicativo general, I_n, para matrices cuadradas $n \times n$ contiene solamente 1 en la diagonal principal y 0 en cualquier otra parte. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Si una matriz cuadrada A tiene un inverso multiplicativo A^{-1}, entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

13. El inverso multiplicativo de la matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

para $|A| \neq 0$. Si $|A| = 0$, entonces la matriz A no tiene inverso.

14. En la página 665 se describe una técnica general para encontrar el inverso de una matriz cuadrada, cuando existe.

15. El conjunto solución de un sistema de n ecuaciones lineales con n variables se puede encontrar al multiplicar el inverso de la matriz coeficiente por la matriz columna que consiste de los términos constantes. Por ejemplo, el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ 5x - 7y - 4z = -1 \end{pmatrix}$$

se puede encontrar mediante el producto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(12.4) El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales es la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades individuales. Tales conjuntos solución se determinan fácilmente mediante el enfoque de graficación.

Los problemas de programación lineal se tratan con la idea de maximizar o minimizar cierta función lineal que está sujeta a varias restricciones. Las restricciones se expresan como desigualdades lineales. El ejemplo 4 y el problema 1 son un buen resumen del enfoque general a los problemas de programación lineal en este capítulo.

Capítulo 12 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-10 calcule la matriz indicada, si existe, usando las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

1. $A + B$

2. $B - A$

3. $C - F$

4. $2A + 3B$

5. $3C - 2F$

6. CD

7. DC

8. $DC + AB$

9. DE

10. EF

11. Use A y B de los problemas anteriores y demuestre que $AB \neq BA$.

12. Use C, D y F de los problemas anteriores y demuestre que $D(C + F) = DC + DF$.

13. Use C, D y F de los problemas anteriores y demuestre que $(C + F)D = CD + FD$.

Para cada uno de los problemas 14-23 encuentre el inverso multiplicativo, si existe.

14. $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 13 & -7 \\ 5 & 16 & -8 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -5 & 22 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

Para los problemas 24-28 use el enfoque de matriz inversa multiplicativa para resolver cada sistema. Los inversos requeridos se encontraron en los problemas 14-23.

24. $\begin{pmatrix} 9x + 5y = 12 \\ 7x + 4y = 10 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -2x + y = -9 \\ 2x + 3y = 5 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = 7 \\ 2x - 5y + 2z = 17 \\ -3x + 7y + 5z = -32 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} x + 3y - 2z = -7 \\ 4x + 13y - 7z = -21 \\ 5x + 16y - 8z = -23 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -x + 2y + 3z = 22 \\ 2x - 5y - 7z = -51 \\ -3x + 5y + 11z = 71 \end{pmatrix}$

Para los problemas 29-32 indique el conjunto solución para cada sistema de desigualdades lineales al graficar el sistema y sombrear la región adecuada.

29. $\begin{pmatrix} 3x - 4y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 0 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3x - 2y < 6 \\ 2x - 3y < 6 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} x - 4y < 4 \\ 2x + y \geq 2 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{pmatrix}$

33. Maximice la función $f(x, y) = 8x + 5y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$y \leq 4x$$
$$x + y \leq 5$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq 4$$

34. Maximice la función $f(x, y) = 2x + 7y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x + 2y \leq 16$$
$$x + y \leq 9$$
$$3x + 2y \leq 24$$

35. Maximice la función $f(x, y) = 7x + 5y$ en la región determinada por las restricciones del problema 34.

36. Maximice la función $f(x, y) = 150x + 200y$ en la región determinada por las restricciones del problema 34.

37. Un fabricante de congeladores eléctricos para helados obtiene una ganancia de $4.50 en un congelador de un galón y una ganancia de $5.25 en un congelador de dos galones. La compañía quiere producir al menos 75 congeladores de un galón y 100 de dos galones por semana. Sin embargo, la producción semanal no debe superar un total de 250 congeladores. ¿Cuántos congeladores de cada tipo debe producir por semana para maximizar las ganancias?

Capítulo 12 Examen

Para los problemas 1-10 calcule la matriz indicada, si existe, usando las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1. AB **2.** BA **3.** DE

4. BC **5.** EC **6.** $2A - B$

7. $3D + 2F$ **8.** $-3A - 2B$ **9.** EF

10. $AB - EF$

Para los problemas 11-16 encuentre el inverso multiplicativo, si existe.

11. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para los problemas 17-19 use el enfoque de matriz inversa multiplicativa para resolver cada sistema.

17. $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 48 \\ 5x - 3y = 76 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} x - 3y = 36 \\ -2x + 8y = -100 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3x + 5y = 92 \\ x + 4y = 61 \end{pmatrix}$

20. Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{pmatrix}$$

donde la inversa de la matriz coeficiente es

$$\begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

21. Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ -3x + y - 2z = 3 \end{pmatrix}$$

donde la inversa de la matriz coeficiente es

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{24} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Para los problemas 22-24 indique el conjunto solución para cada sistema de desigualdades al graficar el sistema y sombrear la región apropiada.

22. $\begin{pmatrix} 2x - y > 4 \\ x + 3y < 3 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 2x - 3y \leq 6 \\ x + 4y > 4 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} y \leq 2x - 2 \\ y \geq x + 1 \end{pmatrix}$

25. Maximice la función $f(x, y) = 500x + 350y$ en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$3x + 2y \leq 24$$
$$x + 2y \leq 16$$
$$x + y \leq 9$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

13

Secciones cónicas

Ejemplos de secciones cónicas, en particular parábolas y elipses, se pueden encontrar en logotipos corporativos en todo el mundo.

Círculos, elipses, parábolas e hipérbolas se forman al intersecar un plano y una superficie cónica recta circular, como se muestra en la figura 13.1. Estas figuras con frecuencia se conocen como **secciones cónicas**. En este capítulo se definirá cada sección cónica como un conjunto de puntos que satisfacen un conjunto de condiciones. Luego se usarán las definiciones para desarrollar formas estándar para las ecuaciones de las secciones cónicas. A continuación se usarán las formas estándar de las ecuaciones para (1) determinar ecuaciones específicas para cónicas específicas, (2) determinar gráficas de ecuaciones específicas y (3) resolver problemas. Finalmente, se considerarán algunos sistemas de ecuaciones que involucran las secciones cónicas.

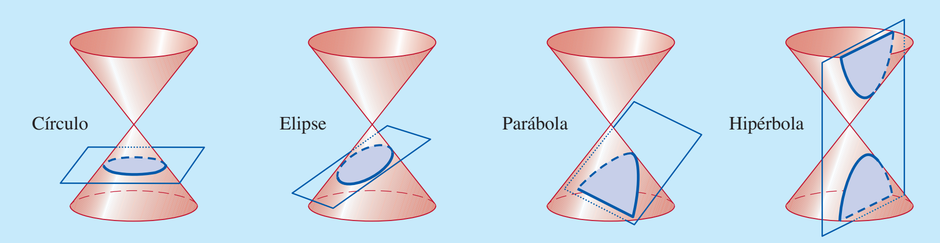


Figura 13.1

13.1 Círculos

La fórmula de distancia $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, que se desarrolló en la sección 7.4 y se aplicó a la definición de círculo, produce lo que se conoce como **forma estándar de la ecuación de un círculo**. Comience con una definición precisa de un círculo.

Definición 13.1

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo dado llamado **centro**. Un segmento de recta determinado por el centro y cualquier punto sobre el círculo se llama **radio**.

Ahora considere un círculo que tenga un radio de longitud r y un centro en (h, k) sobre un sistema coordenado, como se muestra en la figura 13.2. Para cualquier punto P sobre el círculo con coordenadas (x, y), la longitud de un radio, la cual se denota con r, se puede expresar como $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$. Por tanto, al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, se obtiene la **forma estándar** de la ecuación de un círculo:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

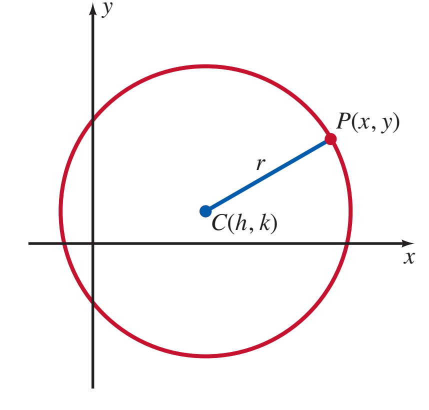
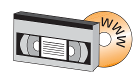


Figura 13.2

La forma estándar de la ecuación de un círculo se puede usar para resolver dos tipos básicos de problemas, a saber: (1) dadas las coordenadas del centro y la longitud de un radio de un círculo, encontrar su ecuación, y (2) dada la ecuación de un círculo, determinar su gráfica. A continuación se ilustra cada uno de estos tipos de problemas.

EJEMPLO 1

Encuentre la ecuación de un círculo que tiene su centro en $(-3, 5)$ y un radio de 4 unidades de longitud.



Solución

Al sustituir h por -3 , k por 5 y r por 4 en la forma estándar y simplificar, se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - (-3))^2 + (y - 5)^2 = 4^2$$
$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4^2$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 16$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$

Note en el ejemplo 1 que la ecuación se simplificó a la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde D, E y F son constantes. Ésta es otra forma que se usa comúnmente cuando se trabaja con círculos.

EJEMPLO 2

Encuentre la ecuación de un círculo que tiene su centro en $(-5, -9)$ y un radio de $2\sqrt{3}$ unidades de longitud. Exprese la ecuación final en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Solución

En la forma estándar, sustituya h por -5 , k por -9 y r por $2\sqrt{3}$.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - (-5))^2 + (y - (-9))^2 = (2\sqrt{3})^2$$
$$(x + 5)^2 + (y + 9)^2 = (2\sqrt{3})^2$$
$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 18y + 81 = 12$$
$$x^2 + y^2 + 10x + 18y + 94 = 0$$

■

EJEMPLO 3

Encuentre la ecuación de un círculo que tiene su centro en el origen y un radio de r unidades de longitud.

Solución

Sustituya h por 0, k por 0 y r por r en la forma estándar de la ecuación de un círculo.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

■

Note en el ejemplo 3 que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la forma estándar de la ecuación de un círculo que tiene su **centro en el origen**. Por tanto, por inspección, puede reconocer que $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo con su centro en el origen y radio de 3 unidades de longitud. Del mismo modo, la ecuación $5x^2 + 5y^2 = 10$ es equivalente a $x^2 + y^2 = 2$, y en consecuencia su gráfica es un círculo con su centro en el origen y un radio de $\sqrt{2}$ unidades de longitud. Más aún,

puede determinar fácilmente que la ecuación del círculo con su centro en el origen y un radio de 8 unidades es $x^2 + y^2 = 64$.

EJEMPLO 4

Encuentre el centro y la longitud de un radio del círculo $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 2 = 0$

Solución

Puede cambiar la ecuación dada en la forma estándar de la ecuación de un círculo al completar el cuadrado en x y y del modo siguiente:

$$x^2 + y^2 - 6x + 12y - 2 = 0$$
$$(x^2 - 6x + __) + (y^2 + 12y + __) = 2$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 12y + 36) = 2 + 9 + 36$$

Sume 9 para completar el cuadrado en *x*.

Sume 36 para completar el cuadrado en *y*.

Sume 9 y 36 para compensar el 9 y el 36 sumados en el lado izquierdo.

$$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 47 \qquad \text{Factorice.}$$
$$(x - 3)^2 + (y - (-6))^2 = (\sqrt{47})^2$$

h *k* *r*

El centro está en (3, –6) y la longitud de un radio es $\sqrt{47}$ unidades. ■

EJEMPLO 5

Grafique $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

Solución

Puede cambiar la ecuación dada en la forma estándar de la ecuación de un círculo al completar el cuadrado en x y y del modo siguiente:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$
$$(x^2 - 6x + __) + (y^2 + 4y + __) = -9$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -9 + 9 + 4$$

Sume 9 para completar el cuadrado en *x*.

Sume 4 para completar el cuadrado en *y*.

Sume 9 y 4 para compensar el 9 y el 4 sumados en el lado izquierdo.

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ h}}{x-3})^2 + (y-(\underset{\substack{\uparrow \\ k}}{-2}))^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ r}}{2}^2$$

El centro está en (3, −2), y la longitud de un radio es 2 unidades. Por tanto, el círculo se puede dibujar como se muestra en la figura 13.3.

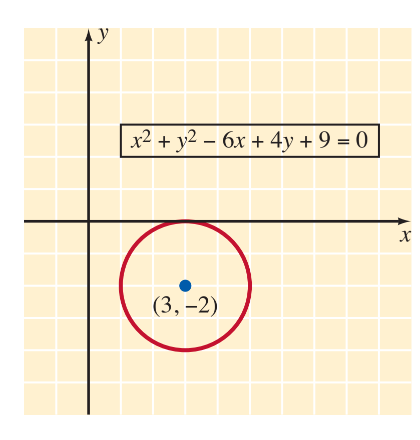


Figura 13.3 ■

Debe ser evidente que, para determinar la ecuación de un círculo específico, necesita los valores de h, k y r. Para determinar estos valores a partir de un conjunto dado de condiciones, con frecuencia se requiere usar algunos de los siguientes conceptos de la geometría elemental.

1. Una tangente a un círculo es una recta que tiene uno y sólo un punto en común con el círculo. Este punto común se llama *punto de tangencia*.
2. Un radio dibujado al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.
3. Tres puntos no colineales en un plano determinan un círculo.
4. El bisector perpendicular de una cuerda contiene el centro de un círculo.

Ahora considere dos problemas que usan algunos de estos conceptos. Se ofrecerá un análisis de estos problemas, pero los detalles se dejarán para que usted los complete.

PROBLEMA 1

Encuentre la ecuación del círculo que tiene su centro en (2, 1) y es tangente a la recta $x - 3y = 9$

Análisis

Bosqueje una figura para auxiliarse con el análisis del problema (figura 13.4). El punto de tangencia (a, b) está sobre la línea $x - 3y = 9$, así que se tiene $a - 3b = 9$. Además, la línea determinada por (2, 1) y (a, b) es perpendicular a la recta $x - 3y = 9$, de modo que sus pendientes son negativos recíprocos una de otra. Esta

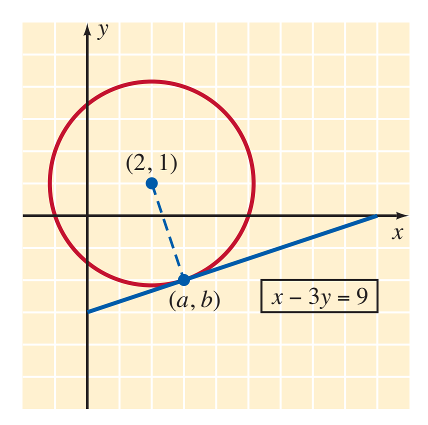


Figura 13.4

relación produce otra ecuación con las variables a y b. (Esta ecuación debe ser $3a + b = 7$.) Resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} a - 3b = 9 \\ 3a + b = 7 \end{pmatrix}$$

producirá los valores para (a, b), y este punto, junto con el centro del círculo, determina la longitud de un radio. Entonces el centro junto con la longitud de un radio determinan la ecuación del círculo. (La ecuación es $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.) ■

PROBLEMA 2

Encuentre la ecuación del círculo que pasa a través de los tres puntos $(2, -4)$, $(-6, 4)$ y $(-2, -8)$

Análisis

Tres cuerdas del círculo se determinan a partir de los tres puntos dados. (Los puntos son no colineales.) El centro del círculo se encuentra en la intersección de los bisectores perpendiculares de cualesquiera dos cuerdas. Entonces el centro y uno de los puntos dados se pueden usar para encontrar la longitud de un radio. La ecuación del círculo se determina a partir del centro y de la longitud de un radio. (La ecuación es $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 20 = 0$.)

O

Puesto que tres puntos no colineales en un plano determinan un círculo, podría sustituir las coordenadas de los tres puntos dados en la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esto producirá un sistema de tres ecuaciones lineales con las tres incógnitas D, E y F. (Tal vez deba hacer esto y comprobar su respuesta a partir de este método.) ■

Cuando usa una herramienta graficadora para bosquejar círculos, necesita resolver la ecuación dada para y en términos de x y luego graficar estas dos ecuaciones. Más aún, puede ser necesario cambiar las fronteras del rectángulo de visualización de modo que se muestre una gráfica completa. Considere un ejemplo.

EJEMPLO 6 Use una herramienta de graficación para dibujar $x^2 - 40x + y^2 + 351 = 0$

Solución

Primero necesita resolver para y en términos de x.

$$x^2 - 40x + y^2 + 351 = 0$$
$$y^2 = -x^2 + 40x - 351$$
$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 40x - 351}$$

Ahora puede hacer las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{-x^2 + 40x - 351}$$
$$Y_2 = -Y_1$$

(Note que se asignó Y_2 en términos de Y_1. Al hacer esto, evitó oprimir teclas repetitivas y, por tanto, redujo la posibilidad de errores. Consulte su manual del usuario para conocer las instrucciones acerca de cómo digitar $-Y_1$.) La figura 13.5 muestra la gráfica.

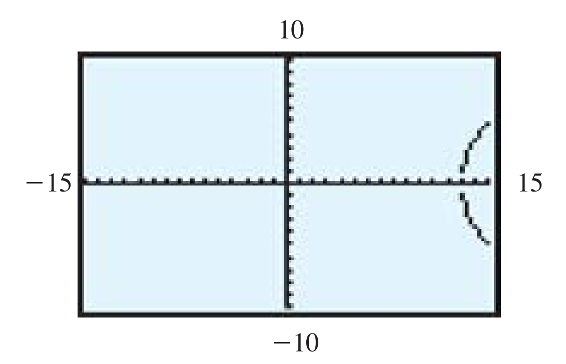


Figura 13.5

De la ecuación original se sabe que esta gráfica es un círculo, así que necesita hacer algunos ajustes en las fronteras del rectángulo de visualización para obtener una gráfica completa. Esto se puede hacer al completar el cuadrado en la ecuación original para cambiar su forma a $(x - 20)^2 + y^2 = 49$, o simplemente mediante un proceso de ensayo y error. Al cambiar las fronteras en x de modo que $-15 \leq x \leq 30$, se obtiene la figura 13.6.

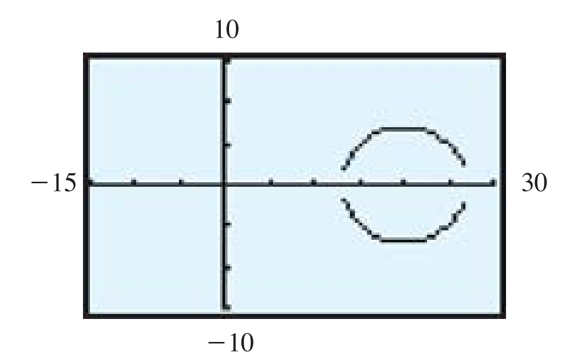


Figura 13.6 ■

Conjunto de problemas 13.1

Para los problemas 1-14 escriba la ecuación de cada uno de los círculos que satisfacen las condiciones establecidas. En algunos casos puede haber más de un círculo que satisfaga las condiciones. Exprese las ecuaciones finales en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

1. Centro en $(2, 3)$ y $r = 5$

2. Centro en $(-3, 4)$ y $r = 2$

3. Centro en $(-1, -5)$ y $r = 3$

4. Centro en $(4, -2)$ y $r = 1$

5. Centro en $(3, 0)$ y $r = 3$

6. Centro en $(0, -4)$ y $r = 6$

7. Centro en el origen y $r = 7$

8. Centro en el origen y $r = 1$

9. Tangente al eje x, un radio de longitud 4 y abscisa del centro en -3

10. Tangente al eje y, radio de longitud 5 y ordenada del centro en 3

11. Tangente a ambos ejes, radio de 6 y el centro en el tercer cuadrante

12. Abscisa al origen de 6, ordenada al origen de -4 y pasa a través del origen

13. Tangente al eje y, abscisas al origen de 2 y 6

14. Tangente al eje x, ordenadas al origen de 1 y 5

Para los problemas 15-32 encuentre el centro y la longitud de un radio de cada uno de los círculos.

15. $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 25$

16. $(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 49$

17. $(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 12$

18. $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 24$

19. $3(x - 10)^2 + 3(y + 5)^2 = 9$

20. $5(x - 3)^2 + 5(y - 3)^2 = 30$

21. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

22. $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 43 = 0$

23. $x^2 + y^2 + 10x + 14y + 73 = 0$

24. $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

25. $x^2 + y^2 - 10x = 0$

26. $x^2 + y^2 + 7x - 2 = 0$

27. $x^2 + y^2 - 5y - 1 = 0$

28. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

29. $x^2 + y^2 = 8$

30. $4x^2 + 4y^2 = 1$

31. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$

32. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 36y - 11 = 0$

33. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente al círculo $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 12 = 0$ en el punto $(4, 1)$.

34. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente al círculo $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ en el punto $(-1, -1)$.

35. Encuentre la ecuación del círculo que pasa a través del origen y tiene su centro en $(-3, -4)$.

36. Encuentre la ecuación del círculo para el cual el segmento de recta determinada por $(-4, 9)$ y $(10, -3)$ es un diámetro.

37. Encuentre la ecuación de los círculos que tienen sus centros sobre la recta $2x + 3y = 10$ y son tangentes a ambos ejes.

38. Encuentre la ecuación del círculo que tiene su centro en $(-2, -3)$ y es tangente a la recta $x + y = -3$.

39. El punto $(-1, 4)$ es el punto medio de una cuerda de un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 30 = 0$. Encuentre la ecuación de la cuerda.

40. Encuentre la ecuación del círculo que es tangente a la recta $3x - 4y = -26$ en el punto $(-2, 5)$ y pasa a través del punto $(5, -2)$.

41. Encuentre la ecuación del círculo que pasa a través de los tres puntos $(1, 2)$, $(-3, -8)$ y $(-9, 6)$.

42. Encuentre la ecuación del círculo que pasa a través de los tres puntos $(3, 0)$, $(6, -9)$ y $(10, -1)$.

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

43. ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 0$? Explique su respuesta.

44. ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = -4$? Explique su respuesta.

45. Su amiga afirma que la gráfica de una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $F = 0$, es un círculo que pasa a través del origen. ¿Tiene razón? Explique por qué sí o por qué no.

MÁS INVESTIGACIÓN

46. Use un enfoque de geometría coordenada para probar que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. (Vea la figura 13.7.)

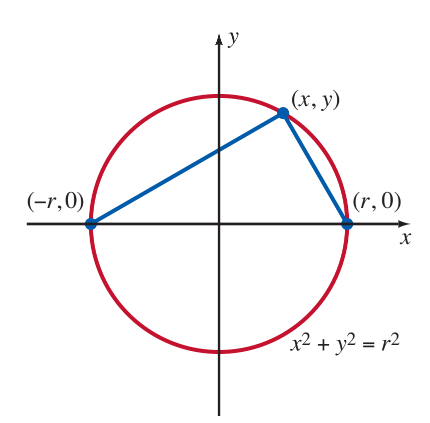


Figura 13.7

47. Use un enfoque de geometría coordenada para probar que un segmento de recta desde el centro de un círculo, que biseca una cuerda, es perpendicular a la cuerda. [*Sugerencia:* Sean $(r, 0)$ y (a, b) los extremos de la cuerda.]

48. Al expandir $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se obtiene $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$. Cuando se compara este resultado con la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se ve que $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$. Por tanto, al resolver estas ecuaciones respectivamente para h, k y r, se puede encontrar el centro y la longitud de un radio de un círculo al usar $h = \frac{D}{-2}$, $k = \frac{E}{-2}$ y $r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$. Use estas relaciones para encontrar el centro y la longitud de un radio de cada uno de los círculos siguientes:

(a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 49 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 12x + 8y - 12 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 16x + 20y + 115 = 0$
(e) $x^2 + y^2 - 12x - 45 = 0$
(f) $x^2 + y^2 + 14x = 0$

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

49. Para cada círculo en los problemas 15-32, se le pide encontrar el centro y la longitud de un radio. Ahora use su calculadora graficadora y grafique cada uno de dichos círculos. Asegúrese que su gráfica sea consistente con la información que obtuvo anteriormente.

50. Para cada uno de las siguientes actividades grafique los dos círculos sobre el mismo conjunto de ejes y determine las coordenadas de los puntos de intersección. Exprese las coordenadas a la décima más cercana. Si los círculos no intersecan, indíquelo así.

(a) $x^2 + 4x + y^2 = 0$ y $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$
(c) $x^2 - 4x + y^2 - 5 = 0$ y $x^2 - 14x + y^2 + 45.4 = 0$
(d) $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 1 = 0$ y $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 = 0$
(e) $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$ y $x^2 - 8x + y^2 + 2y - 8 = 0$

13.2 Parábolas

Las parábolas se estudiaron como las gráficas de las funciones cuadráticas en las secciones 8.3 y 8.4. Todas las parábolas en dichas secciones tenían líneas verticales como ejes de simetría. Más aún, en ese momento no se enunció la definición de parábola. Ahora se definirá una parábola y se derivarán formas estándar de ecuaciones para las que tienen ejes de simetría vertical u horizontal.

Definición 13.2

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la distancia de cada punto desde un punto fijo F (el **foco**) es igual a su distancia desde una recta fija d (la **directriz)** en el plano.

Al usar la definición 13.2 se puede bosquejar una parábola comenzando con una recta fija d (directriz) y un punto fijo F (foco) no sobre d. Entonces un punto P está sobre la parábola si y sólo si $PF = PP'$, donde $\overline{PP'}$ es perpendicular a la directriz d (figura 13.8). La recta curva discontinua en la figura 13.8 indica las posibles posiciones de P; es la parábola. La línea l, a través de F y perpendicular a la directriz, se llama **eje de simetría**. El punto V, sobre el eje de simetría a medio camino desde F hasta la directriz d, es el **vértice** de la parábola.

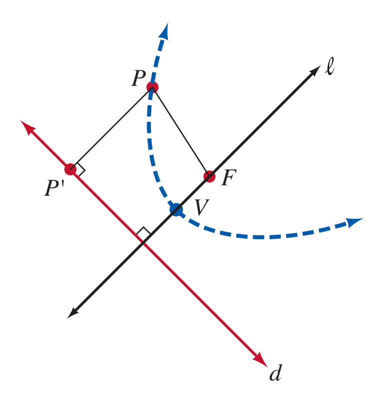


Figura 13.8

Puede deducir una forma estándar para la ecuación de una parábola al superponer coordenadas sobre el plano, tales que el origen esté en el vértice de la parábola y el eje y sea el eje de simetría (figura 13.9). Si el foco está en $(0, p)$, donde $p \neq 0$, entonces la ecuación de la directriz es $y = -p$. Por tanto, para cualquier punto P sobre la parábola, $PF = PP'$,

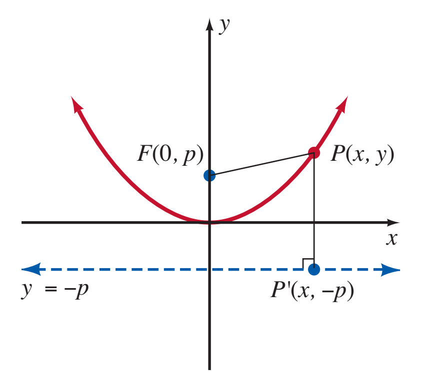


Figura 13.9

y al usar la fórmula de distancia produce

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y simplificar se obtiene

$$(x-0)^2+(y-p)^2=(x-x)^2+(y+p)^2$$
$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$
$$x^2=4py$$

Por tanto, la **forma estándar para la ecuación de una parábola** con su vértice en el origen y el eje y como su eje de simetría es

$$x^2=4py$$

Si $p>0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

Un segmento de recta que contiene el foco y cuyos puntos finales están sobre la parábola se llama **cuerda focal**. La cuerda focal específica que es paralela a la directriz se llamará **cuerda focal primaria**; éste es el segmento de recta $\overline{QP}$ en la figura 13.10. Puesto que $FP=PP'=|2p|$, toda la longitud de la cuerda focal primaria es $|4p|$ unidades. En un momento verá cómo puede usar este hecho cuando grafique parábolas.

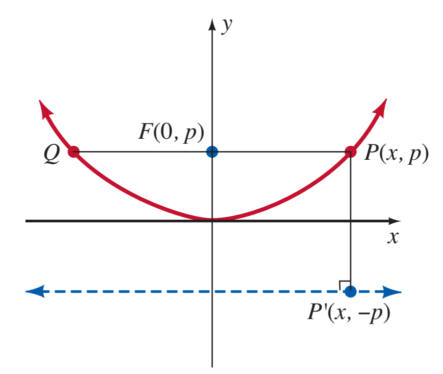


Figura 13.10

En forma similar puede desarrollar la forma estándar para la ecuación de una parábola con su vértice en el origen y el eje x en su eje de simetría. Al elegir un foco en $F(p, 0)$ y una directriz con una ecuación de $x=-p$ (vea la figura 13.11), y al aplicar la definición de una parábola se obtiene la forma estándar de la ecuación:

$$y^2=4px$$

Si $p > 0$, la parábola se abre a la derecha, como en la figura 13.11; si $p < 0$ se abre a la izquierda.

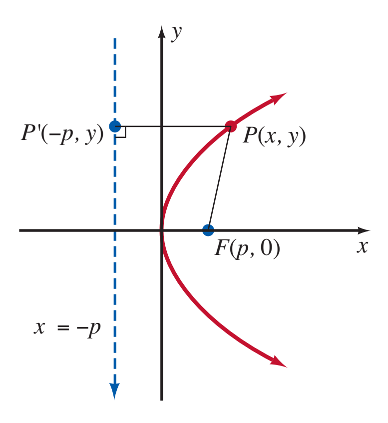


Figura 13.11

El concepto de simetría se puede usar para decidir cuál de las dos ecuaciones usará, $x^2 = 4py$ o $y^2 = 4px$. La gráfica de $x^2 = 4py$ es simétrica con respecto al eje y porque sustituir x con $-x$ no cambia la ecuación. Del mismo modo, la gráfica de $y^2 = 4px$ es simétrica con respecto al eje x porque sustituir y con $-y$ deja la ecuación invariable. A continuación se resumen estas ideas.

Ecuaciones estándar: parábolas con vértices en el origen

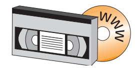
La gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes es una parábola que tiene su vértice en el origen y tiene el foco, directriz y simetría indicada.

1. $x^2 = 4py$ foco $(0, p)$, directriz $y = -p$, simetría con el eje y

2. $y^2 = 4px$ foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$, simetría con el eje x

Ahora se ilustrarán algunos usos de las ecuaciones $x^2 = 4py$ y $y^2 = 4px$.

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $x^2 = -8y$ y bosqueje su gráfica.



Solución

Compare $x^2 = -8y$ con la forma estándar $x^2 = 4py$, y se tiene $4p = -8$. Por tanto, $p = -2$, y la parábola se abre hacia abajo. El foco está en $(0, -2)$, y la ecuación de la directriz es $y = -(-2) = 2$. La cuerda focal primaria tiene $|4p| = |-8| = 8$ unidades de largo. Por tanto, los puntos finales de la cuerda focal primaria están en $(4, -2)$ y $(-4, -2)$. La gráfica se bosqueja en la figura 13.12.

Figura 13.12

■

EJEMPLO 2

Escriba la ecuación de la parábola que es simétrica con respecto al eje y, tiene su vértice en el origen y contiene el punto $P(6, 3)$.

Solución

La forma estándar de la parábola es $x^2 = 4py$. Puesto que P está sobre la parábola, el par ordenado $(6, 3)$ debe satisfacer la ecuación. Por tanto

$$6^2 = 4p(3)$$
$$36 = 12p$$
$$3 = p$$

Si $p = 3$, la ecuación se convierte en

$$x^2 = 4(3)y$$
$$x^2 = 12y$$

■

EJEMPLO 3

Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 = 6x$ y bosqueje su gráfica.

Solución

Compare $y^2 = 6x$ con la forma estándar $y^2 = 4px$; se ve que $4p = 6$ y en consecuencia $p = \frac{3}{2}$. Por tanto, el foco está en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y la ecuación de la directriz es $x = -\frac{3}{2}$. Puesto que $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha. La cuerda focal primaria tiene $|4p| = |6| = 6$ unidades de largo. Por tanto, los puntos finales de la cuerda focal primaria están en $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$. La gráfica se bosqueja en la figura 13.13.

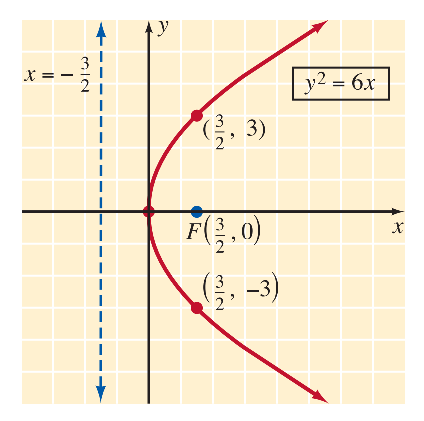


Figura 13.13

Otras parábolas

En forma muy parecida se desarrolla la forma estándar para la ecuación de una parábola que es simétrica con respecto a una recta paralela a un eje coordenado. En la figura 13.14 se tomó el vértice V en (h, k) y el foco F en $(h, k + p)$; la ecuación de la directriz es $y = k - p$. Por la definición de parábola se sabe que $FP = PP'$. Por tanto, puede aplicar la fórmula de distancia del modo siguiente:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + [y - (k - p)]^2}$$

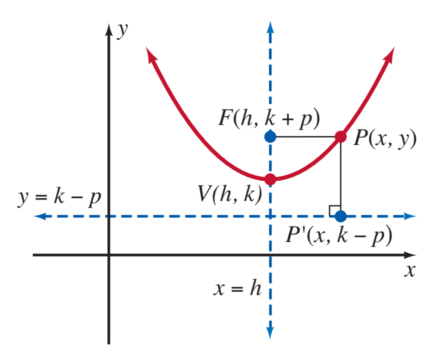


Figura 13.14

Se deja al lector demostrar que esta ecuación se simplifica a

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

que se llama forma estándar de la ecuación de una parábola que tiene su vértice en (h, k) y es simétrica con respecto a la línea $x = h$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

En forma similar, se puede demostrar que la forma estándar de la ecuación de una parábola que tiene su vértice en (h, k) y es simétrica con respecto a la recta $y = k$ es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre a la derecha; si $p < 0$, se abre a la izquierda.

A continuación se resume el análisis de las parábolas que tienen rectas de simetría paralelas al eje x o el eje y.

Ecuaciones estándar: parábolas con vértices fuera del origen

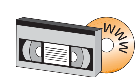
La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una parábola que tiene su vértice en (h, k) y tiene el foco, directriz y simetría indicados.

1. $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ foco $(h, k + p)$, directriz $y = k - p$, recta de simetría $x = h$

2. $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ foco $(h + p, k)$, directriz $x = h - p$, recta de simetría $y = k$

EJEMPLO 4

Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola $y^2 + 4y - 4x + 16 = 0$ y bosqueje su gráfica.



Solución

Escriba la ecuación como $y^2 + 4y = 4x - 16$, y puede completar el cuadrado en el lado izquierdo al sumar 4 a ambos lados.

$$y^2 + 4y + 4 = 4x - 16 + 4$$
$$(y + 2)^2 = 4x - 12$$
$$(y + 2)^2 = 4(x - 3)$$

Ahora compare esta ecuación final con la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$:

$$[y - (-2)]^2 = 4(x - 3)$$

$k = -2$ $4p = 4$, $p = 1$ $h = 3$

El vértice está en $(3, -2)$, y dado que $p > 0$, la parábola se abre a la derecha y el foco está en $(4, -2)$. La ecuación de la directriz es $x = 2$. La cuerda focal primaria tiene $|4p| = |4| = 4$ unidades de largo, y sus puntos finales están en $(4, 0)$ y $(4, -4)$. La gráfica se bosqueja en la figura 13.15.

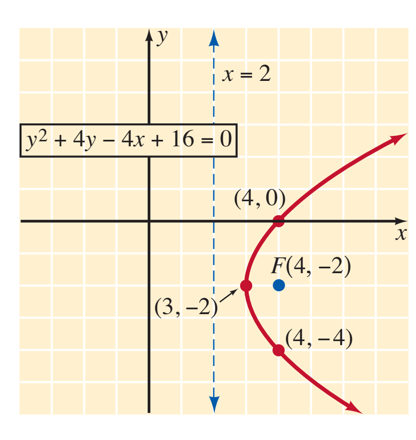


Figura 13.15

■

Observaciones: Si usara una calculadora graficadora para dibujar la parábola en el ejemplo 4, entonces, después del paso $(y + 2)^2 = 4x - 12$, resolvería para y para obtener $y = -2 \pm \sqrt{4x - 12}$. Entonces podría ingresar las dos funciones $Y_1 = -2 + \sqrt{4x - 12}$ y $Y_2 = -2 - \sqrt{4x - 12}$ obtener una figura similar a la figura 13.15. (En las Actividades con calculadora graficadora se le pide hacer esto.) Algunas herramientas de graficación pueden bosquejar la ecuación en el ejemplo 4 sin cambiar su forma.

EJEMPLO 5

Escriba la ecuación de la parábola si su foco está en (−4, 1) y la ecuación de su directriz es $y = 5$

Solución

Puesto que la directriz es una recta horizontal se sabe que la ecuación de la parábola es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. El vértice está a medio camino entre el foco y la directriz, de modo que el vértice está en (−4, 3). Esto significa que $h = -4$ y $k = 3$. La parábola se abre hacia abajo porque el foco está bajo la directriz, y la distancia entre el foco y el vértice es de 2 unidades; por tanto, $p = -2$. Sustituya h por −4 , k por 3 y p por −2 en la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ para obtener

$$(x - (-4))^2 = 4(-2)(y - 3)$$

que se simplifica a

$$(x + 4)^2 = -8(y - 3)$$
$$x^2 + 8x + 16 = -8y + 24$$
$$x^2 + 8x + 8y - 8 = 0$$

■

Observaciones: Para un problema como el del ejemplo 5 puede encontrar útil poner la información dada sobre un conjunto de ejes y dibujar un bosquejo burdo de la parábola para ayudar en su análisis del problema.

Las parábolas poseen varias propiedades que las hacen muy útiles. Por ejemplo, si una parábola gira en torno a su eje, se forma una superficie parabólica. Los rayos de una fuente de luz colocados en el foco de esta superficie se reflejan paralelos al eje de la superficie. Por esta razón se usan reflectores parabólicos en los reflectores, como en la figura 13.16. Del mismo modo, los rayos de luz que llegan a una superficie parabólica paralela al eje se reflejan a través del foco. Esta propiedad de las parábolas es útil en el diseño de espejos para telescopios (vea la figura 13.17) y en la construcción de antenas de radar.

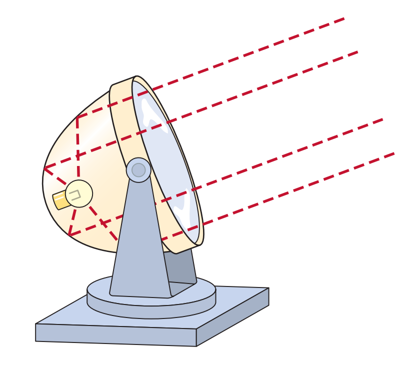


Figura 13.16

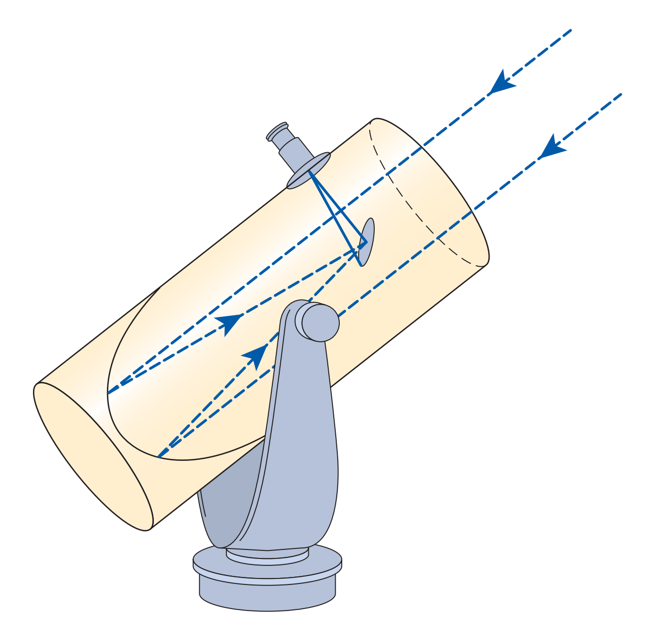


Figura 13.17

Conjunto de problemas 13.2

Para los problemas 1-30 encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola dada y bosqueje su gráfica.

1. $y^2 = 8x$

2. $y^2 = -4x$

3. $x^2 = -12y$

4. $x^2 = 8y$

5. $y^2 = -2x$

6. $y^2 = 6x$

7. $x^2 = 6y$

8. $x^2 = -7y$

9. $x^2 = 12(y + 1)$

10. $x^2 = -12(y - 2)$

11. $y^2 = -8(x - 3)$

12. $y^2 = 4(x + 1)$

13. $x^2 - 4y + 8 = 0$

14. $x^2 - 8y - 24 = 0$

15. $x^2 + 8y + 16 = 0$

16. $x^2 + 4y - 4 = 0$

17. $y^2 - 12x + 24 = 0$

18. $y^2 + 8x - 24 = 0$

19. $(x - 2)^2 = -4(y + 2)$

20. $(x + 3)^2 = 4(y - 4)$

21. $(y + 4)^2 = -8(x + 2)$

22. $(y - 3)^2 = 8(x - 1)$

23. $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$

24. $x^2 + 4x - 8y - 4 = 0$

25. $x^2 + 6x + 8y + 1 = 0$

26. $x^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

27. $y^2 - 2y + 12x - 35 = 0$

28. $y^2 + 4y + 8x - 4 = 0$

29. $y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$

30. $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$

Para los problemas 31-50 encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

31. Foco $(0, 3)$, directriz $y = -3$

32. Foco $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, directriz $y = \frac{1}{2}$

33. Foco $(-1, 0)$, directriz $x = 1$

34. Foco $(5, 0)$, directriz $x = 1$

35. Foco $(0, 1)$, directriz $y = 7$

36. Foco $(0, -2)$, directriz $y = -10$

37. Foco $(3, 4)$, directriz $y = -2$

38. Foco $(-3, -1)$, directriz $y = 7$

39. Foco $(-4, 5)$, directriz $x = 0$

40. Foco $(5, -2)$, directriz $x = -1$

41. Vértice $(0, 0)$, simétrica con respecto al eje x y contiene el punto $(-3, 5)$

42. Vértice (0, 0), simétrica con respecto al eje y y contiene el punto (−2, −4)

43. Vértice (0, 0), foco $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

44. Vértice (0, 0), foco $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$

45. Vértice (7, 3), foco (7, 5) y simétrica con respecto a la recta $x = 7$

46. Vértice (−4, −6), foco (−7, −6) y simétrica con respecto a la recta $y = -6$

47. Vértice (8, −3), foco (11, −3) y simétrica con respecto a la recta $y = -3$

48. Vértice (−2, 9), foco (−2, 5) y simétrica con respecto a la recta $x = -2$

49. Vértice (−9, 1), simétrica con respecto a la recta $x = -9$ y contiene el punto (−8, 0)

50. Vértice (6, −4), simétrica con respecto a la recta $y = -4$ y contiene el punto (8, −3)

Para los problemas 51-55 resuelva cada problema.

51. Una sección de un puente de suspensión cuelga entre dos torres que están 40 pies sobre la superficie y separados 300 pies, como se muestra en la figura 13.18. Un cable ensartado entre las partes superiores de las dos torres tiene forma de parábola, con su vértice 10 pies arriba de la superficie. Con los ejes dibujados como se indica en la figura, encuentre la ecuación de la parábola.

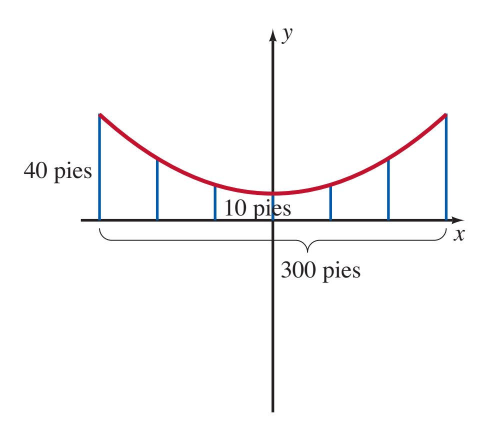


Figura 13.18

52. Suponga que cinco cables verticales igualmente espaciados se usan para sostener el puente en la figura 13.18. Encuentre la longitud total de estos soportes.

53. Suponga que cada arco tiene forma de parábola. Tiene 20 pies de ancho en la base y 100 pies de alto. ¿Cuán ancho es el arco 50 pies sobre el suelo?

54. Un arco parabólico de 27 pies de alto se tiende sobre un bulevar. ¿Cuán ancho es el arco si la sección central del bulevar, una sección de 50 pies de ancho, tiene una altura libre mínima de 15 pies?

55. Un arco parabólico abarca una corriente de 200 pies de ancho. ¿Cuán arriba sobre la corriente debe darse al arco una altura libre mínima de 40 pies sobre un canal en el centro que tiene 120 pies de ancho?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

56. Proporcione una descripción paso a paso de cómo graficaría la parábola $x^2 - 2x - 4y - 7 = 0$.

57. Suponga que alguien graficó la ecuación $y^2 - 6y - 2x + 11 = 0$ y obtuvo la gráfica de la figura 13.19. ¿Cómo sabe, al observar la ecuación, que esta gráfica es incorrecta?

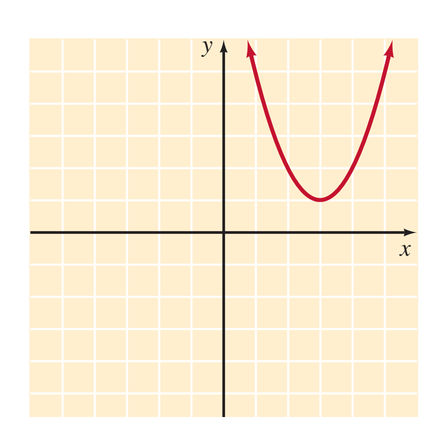


Figura 13.19

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

58. La parábola determinada por la ecuación $x^2 + 4x - 8y - 4 = 0$ (problema 24) es fácil de graficar usando una calculadora graficadora, porque se puede expresar como una función de x sin mucho cálculo. Resuelva la ecuación para y.

$$8y = x^2 + 4x - 4$$

$$y = \frac{x^2 + 4x - 4}{8}$$

Use su calculadora graficadora para dibujar esta función.

Como se anotó en las observaciones posteriores al ejemplo 4, resolver la ecuación $y^2 + 4y - 4x + 16 = 0$ para y produce dos funciones: $Y_1 = -2 + \sqrt{4x - 12}$ y $Y_2 = -2 - \sqrt{4x - 12}$. Grafique estas dos funciones sobre el mismo conjunto de ejes. Su resultado debe parecerse a la figura 13.15.

Use su calculadora graficadora para bosquejar sus gráficas para los problemas 1-30.

13.3 Elipses

Se comienza por definir una elipse.

Definición 13.3

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la suma de las distancias de cada punto desde dos puntos fijos F y F' (los **focos**) en el plano es constante.

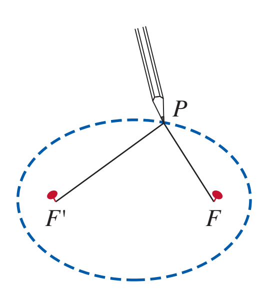


Figura 13.20

Con dos tachuelas, un trozo de cuerda y un lápiz, es fácil dibujar una elipse que satisfaga las condiciones de la definición 13.3. Primero inserte dos tachuelas en un trozo de cartón en los puntos F y F', y sujete los extremos del trozo de cuerda a las tachuelas, como en la figura 13.20. Luego haga un lazo de la cuerda alrededor de la punta de un lápiz y sostenga el lápiz de modo que la cuerda esté tensa. Finalmente, mueva el lápiz en torno a las tachuelas, siempre manteniendo tensa la cuerda. Dibujará una elipse. Los dos puntos F y F' son los focos a los que se hace referencia en la definición 13.3, y la suma de las distancias FP y $F'P$ es constante porque representa la longitud de la pieza de cuerda. Con el mismo trozo de cuerda puede variar la forma de la elipse al cambiar las posiciones de los focos. Separar más F y F' hará más plana la elipse. Del mismo modo, acercar F y F' hará que la elipse parezca un círculo. De hecho, si $F = F'$, obtendrá un círculo.

Es posible deducir una forma estándar para la ecuación de una elipse al superponer coordenadas sobre el plano tales que los focos están sobre el eje x, equidistantes del origen (figura 13.21). Si F tiene coordenadas $(c, 0)$, donde $c > 0$, entonces F' tiene coordenadas $(-c, 0)$, y la distancia entre F y F' es $2c$ unidades.

Sea $2a$ la representación de la suma constante de $FP + F'P$. Note que $2a > 2c$ y, por tanto, $a > c$. Para cualquier punto P sobre la elipse,

$$FP + F'P = 2a$$

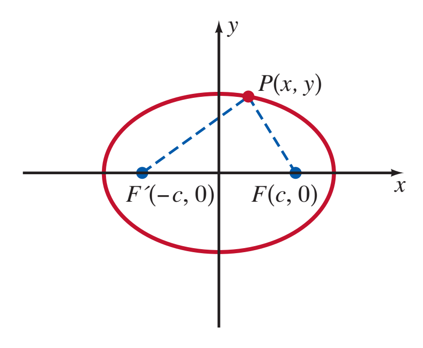


Figura 13.21

Use la fórmula de distancia para escribir esto como

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Cambie la forma de esta ecuación a

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

y eleve al cuadrado ambos lados:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

Esto se puede simplificar a

$$a^2 + cx = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

De nuevo eleve al cuadrado ambos lados para producir

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x + c)^2 + y^2]$$

que se puede escribir en la forma

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Divida ambos lados entre $a^2(a^2 - c^2)$, que producen la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Hacer $b^2 = a^2 - c^2$, donde $b > 0$, se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Puesto que $c > 0$, $a > c$ y $b^2 = a^2 - c^2$, se sigue que $a^2 > b^2$ y por tanto $a > b$. Esta ecuación que se dedujo se llama **forma estándar de la ecuación de una elipse** con sus focos sobre el eje x y su centro en el origen.

Las abscisas al origen de la ecuación (1) se pueden encontrar al hacer $y = 0$. Hacer esto produce $x^2/a^2 = 1$, o $x^2 = a^2$; en consecuencia, las abscisas al origen son a y $-a$. Los puntos correspondientes sobre la gráfica (vea la figura 13.22) son $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$, y el segmento de recta $\overline{A'A}$, que tienen longitud $2a$, se llama **eje mayor** de la elipse. Los puntos finales del eje mayor también se conocen como **vértices** de la elipse. De igual modo, hacer $x = 0$ produce $y^2/b^2 = 1$ o $y^2 = b^2$; en consecuencia, las ordenadas al origen son b y $-b$. Los puntos correspondientes sobre la gráfica son $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$, y el segmento de recta $\overline{BB'}$, que tiene longitud $2b$, se llama **eje menor**. Puesto que $a > b$, el **eje mayor siempre es más grande que el eje menor**. El punto de intersección de los ejes mayor y menor se llama **centro** de la elipse.

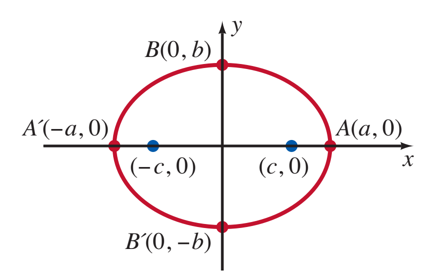


Figura 13.22

Ecuación estándar: elipse con eje mayor en el eje *x*

La ecuación estándar de una elipse con su centro en (0, 0) y su eje mayor sobre el eje x es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b$.

Los vértices son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, y la longitud del eje mayor es $2a$.

Los puntos finales del eje menor son $(0, -b)$ y $(0, b)$, y la longitud del eje menor es $2b$.

Los focos están en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Note que sustituir y con $-y$, o x con $-x$, o tanto x como y con $-x$ y $-y$, deja la ecuación invariable. Por tanto, la gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es simétrica con respecto al eje x, el eje y y el origen.

EJEMPLO 1

Encuentre los vértices, los puntos finales del eje menor y los focos de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, y bosqueje la elipse.

Solución

La ecuación dada cambia a forma estándar al dividir ambos lados entre 36.

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Por tanto, $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$; en consecuencia, los vértices están en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, y los puntos finales del eje menor están en $(0, 2)$ y $(0, -2)$. Puesto que $c^2 = a^2 - b^2$ se tiene

$$c^2 = 9 - 4 = 5$$

Por ende, los focos están en $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$. La elipse se bosqueja en la figura 13.23.

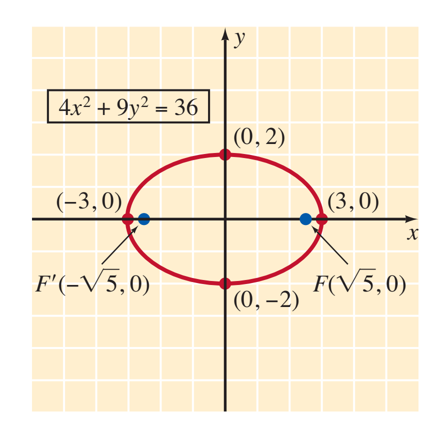


Figura 13.23

■

EJEMPLO 2

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en $(\pm 6, 0)$ y focos en $(\pm 4, 0)$.

Solución

A partir de la información dada se sabe que $a = 6$ y $c = 4$. Por tanto

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$$

Sustituya a^2 por 36 y b^2 por 20 en la forma estándar para producir

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Multiplique ambos lados por 180 para obtener

$$5x^2 + 9y^2 = 180$$

■

Elipses con focos sobre el eje *y*

Una elipse con su centro en el origen también puede tener su eje mayor sobre el eje y, como se muestra en la figura 13.24. En este caso, la suma de las distancias desde cualquier punto P sobre la elipse hasta los focos es igual a la constante $2b$.

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} = 2b$$

Con las condiciones esta vez que $b > a$ y $c^2 = b^2 - a^2$, la ecuación se simplifica a la misma ecuación estándar, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. A continuación se resumen estas ideas.

Figura 13.22

Ecuación estándar: elipse con eje mayor sobre el eje *y*

La ecuación estándar de una elipse con su centro en (0, 0) y su eje mayor sobre el eje y es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b > a$.

Los vértices son $(0, -b)$ y $(0, b)$, y la longitud del eje mayor es $2b$. Los puntos finales del eje menor son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, y la longitud del eje menor es $2a$.

Los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde $c^2 = b^2 - a^2$.

EJEMPLO 3

Encuentre los vértices, los puntos finales del eje menor y los focos de la elipse $18x^2 + 4y^2 = 36$, y bosqueje la elipse.

Solución

La ecuación dada puede cambiar a forma estándar al dividir ambos lados entre 36.

$$\frac{18x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Por tanto, $a^2 = 2$ y $b^2 = 9$; en consecuencia, los vértices están en (0, 3) y (0, −3), y los puntos finales del eje menor están en $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$. A partir de la relación $c^2 = b^2 - a^2$ se obtiene $c^2 = 9 - 2 = 7$; por tanto, los focos están en $(0, \sqrt{7})$ y $(0, -\sqrt{7})$. La elipse se bosqueja en la figura 13.25.

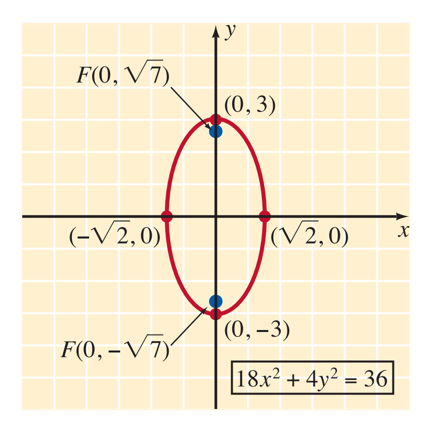


Figura 13.25

Otras elipses

Al aplicar la definición de elipse, también podría desarrollar la ecuación estándar de una elipse cuyo centro no está en el origen, pero cuyos ejes mayor y menor están en los ejes coordenados o en rectas paralelas a los ejes coordenados. En otras palabras, se considerarán elipses que sean traslaciones horizontales y verticales de las dos elipses básicas. En este texto no se demostrarán estos desarrollos, pero se usarán las figuras 13.26 (a) y (b) para indicar los hechos básicos necesarios para desarrollar la ecuación estándar. Note que, en cada figura, el centro de la elipse está en un punto (h, k). Más aún, el significado físico de a, b y c es el mismo que antes, pero dichos valores se usan en relación con el nuevo centro (h, k) para encontrar los focos, los vértices y los puntos finales del eje menor. Vea cómo funciona esto en un ejemplo específico.

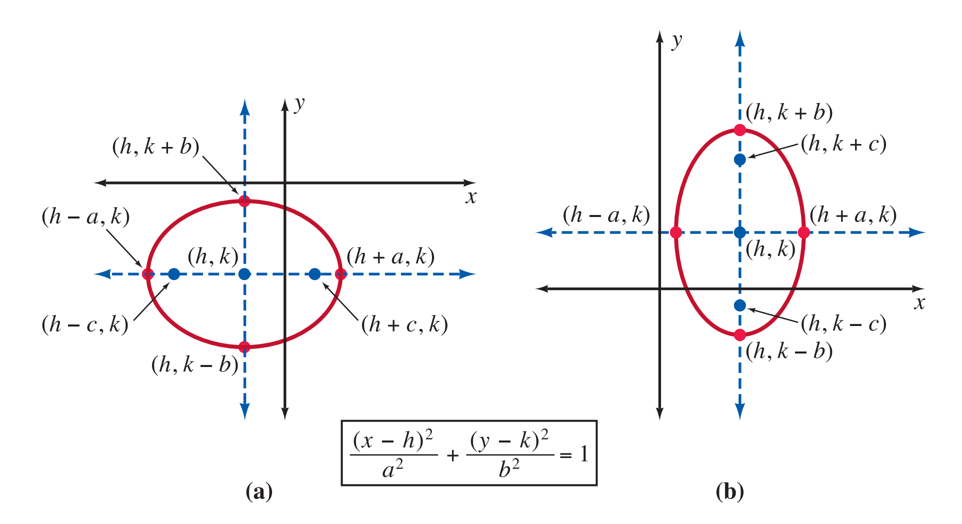
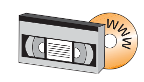


Figura 13.26

EJEMPLO 4

Encuentre los vértices, los puntos finales del eje menor y los focos de la elipse $9x^2 + 54x + 4y^2 - 8y + 49 = 0$ y bosqueje la elipse.



Solución

Primero necesita cambiar a forma estándar para completar el cuadrado en x y y.

$$9(x^2 + 6x + __) + 4(y^2 - 2y + __) = -49$$
$$9(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 2y + 1) = -49 + 9(9) + 4(1)$$
$$9(x + 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$$
$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$

A partir de esta ecuación determina que $h = -3$, $k = 1$, $a = \sqrt{4} = 2$, y $b = \sqrt{9} = 3$. Puesto que $b > a$, los focos y los vértices están sobre la recta vertical $x = -3$. Los vértices están tres unidades arriba y tres unidades abajo del centro $(-3, 1)$, de modo que están en $(-3, 4)$ y $(-3, -2)$. Los puntos finales del eje menor están dos unidades a la derecha y dos unidades a la izquierda del centro, de modo que están en $(-1, 1)$ y $(-5, 1)$. A partir de la relación $c^2 = b^2 - a^2$ se obtiene $c^2 = 9 - 4 = 5$. Por tanto, los focos están en $(-3, 1 + \sqrt{5})$ y $(-3, 1 - \sqrt{5})$. La elipse se bosqueja en la figura 13.27.

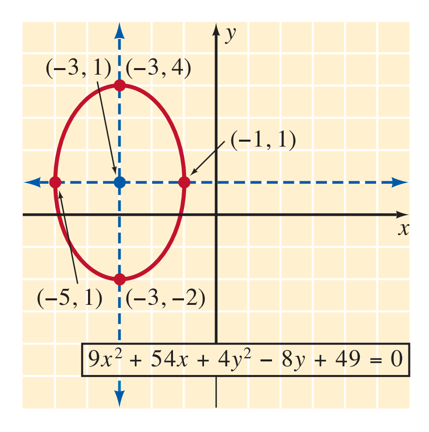


Figura 13.27

■

EJEMPLO 5

Escriba la ecuación de la elipse que tiene vértices en $(-3, -5)$ y $(7, -5)$ y focos en $(-1, -5)$ y $(5, -5)$.

Solución

Puesto que los vértices y los focos están sobre la misma recta horizontal ($y = -5$), la ecuación de esta elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b$. El centro de la elipse está en el punto medio del eje mayor:

$$h = \frac{-3 + 7}{2} = 2 \quad \text{y} \quad k = \frac{-5 + (-5)}{2} = -5$$

La distancia entre el centro $(2, -5)$ y un vértice $(7, -5)$ es 5 unidades; por tanto, $a = 5$. La distancia entre el centro $(2, -5)$ y un foco $(5, -5)$ es 3 unidades; por tanto, $c = 3$. Al usar la relación $c^2 = a^2 - b^2$ se obtiene

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

Ahora sustituya h por 2 , k por -5 , a^2 por 25 y b^2 por 16 en la forma estándar y luego simplifique

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{16}=1$$

$$16(x-2)^2+25(y+5)^2=400$$

$$16(x^2-4x+4)+25(y^2+10y+25)=400$$

$$16x^2-64x+64+25y^2+250y+625=400$$

$$16x^2-64x+25y^2+250y+289=0$$

■

Observaciones: De nuevo, para un problema como el del ejemplo 5, puede ser útil comenzar por registrar la información dada en un conjunto de ejes y dibujar un bosquejo burdo de la figura.

Como las parábolas, las elipses poseen propiedades que las hacen muy útiles. Por ejemplo, la superficie elíptica que se forma al girar una elipse en torno a su eje mayor tiene las siguientes propiedades: las ondas sonoras o luminosas emitidas en un foco se reflejan de la superficie y convergen en el otro foco. Éste es el principio detrás de las “galerías susurrantes” como la Rotonda en el Capitolio de Washington, D.C. En tales edificios, dos personas paradas en dos puntos específicos, que son los focos del techo elíptico, pueden susurrar y escucharse uno a otro con claridad, aun cuando puedan estar muy alejados.

Un uso muy importante de una superficie elíptica está en la construcción de un dispositivo médico llamado litotriptor. Este dispositivo se usa para romper cálculos renales. Una fuente que emite ondas de choque de ultraaltafrecuencia se coloca en un foco, y el cálculo renal se coloca en el otro.

Las elipses también juegan un importante papel en astronomía. Johannes Kepler (1571-1630) demostró que la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco. Por ejemplo, la órbita de la Tierra es elíptica pero casi circular; al mismo tiempo, la Luna se mueve en torno a la Tierra en una trayectoria elíptica (vea la figura 13.28).

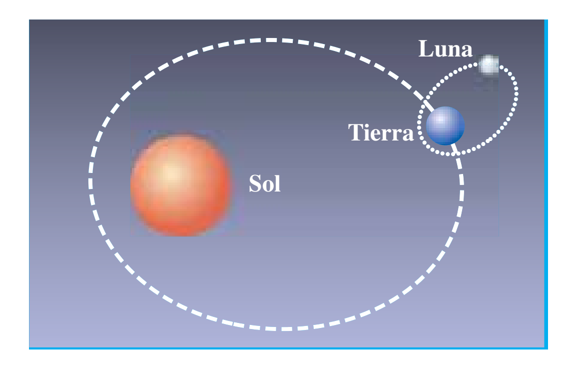


Figura 13.28

Los arcos para los puentes de concreto en ocasiones son elípticos. (Un ejemplo se muestra en la figura 13.30, en el siguiente conjunto de problemas.) Además, los engranes elípticos se usan en ciertos tipos de maquinaria que requiere una fuerza de impacto lenta pero poderosa, como en un punzón para trabajo pesado (vea la figura 13.29).

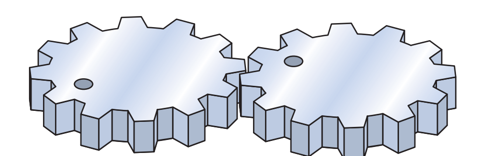


Figura 13.29

Conjunto de problemas 13.3

Para los problemas 1-26 encuentre los vértices, los puntos finales del eje menor y los focos de la elipse dada, y bosqueje su gráfica.

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

5. $9x^2 + 3y^2 = 27$

6. $4x^2 + 3y^2 = 36$

7. $2x^2 + 5y^2 = 50$

8. $5x^2 + 36y^2 = 180$

9. $12x^2 + y^2 = 36$

10. $8x^2 + y^2 = 16$

11. $7x^2 + 11y^2 = 77$

12. $4x^2 + y^2 = 12$

13. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

14. $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

15. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

16. $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

17. $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$

18. $x^2 + 6x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$

19. $4x^2 + 16x + y^2 + 2y + 1 = 0$

20. $9x^2 - 36x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$

21. $x^2 - 6x + 4y^2 + 5 = 0$

22. $16x^2 + 9y^2 + 36y - 108 = 0$

23. $9x^2 - 72x + 2y^2 + 4y + 128 = 0$

24. $5x^2 + 10x + 16y^2 + 160y + 325 = 0$

25. $2x^2 + 12x + 11y^2 - 88y + 172 = 0$

26. $9x^2 + 72x + y^2 + 6y + 135 = 0$

Para los problemas 27-40 encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

27. Vértices $(\pm 5, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$

28. Vértices $(\pm 4, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$

29. Vértices $(0, \pm 6)$, focos $(0, \pm 5)$

30. Vértices $(0, \pm 3)$, focos $(0, \pm 2)$

31. Vértices $(\pm 3, 0)$, longitud de eje menor 2

32. Vértices $(0, \pm 5)$, longitud de eje menor 4

33. Focos $(0, \pm 2)$, longitud de eje menor 3

34. Focos $(\pm 1, 0)$, longitud de eje menor 2

35. Vértices $(0, \pm 5)$, contiene el punto $(3, 2)$

36. Vértices $(\pm 6, 0)$, contiene el punto $(5, 1)$

37. Vértices $(5, 1)$ y $(-3, 1)$, focos $(3, 1)$ y $(-1, 1)$

38. Vértices $(2, 4)$ y $(2, -6)$, focos $(2, 3)$ y $(2, -5)$

39. Centro $(0, 1)$, un foco en $(-4, 1)$, longitud de eje menor 6

40. Centro $(3, 0)$, un foco en $(3, 2)$, longitud de eje menor 4

Para los problemas 41-44 resuelva cada problema.

41. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano tales que la suma de las distancias entre cada punto del conjunto y los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ sea 8 unidades.

42. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano tales que la suma de las distancias entre cada punto del conjunto y los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ sea 10 unidades.

43. Un arco del puente que se muestra en la figura 13.30 es semielíptico y el eje mayor es horizontal. El arco tiene 30 pies de ancho y 10 pies de alto. Encuentre la altura del arco a 10 pies desde el centro de la base.

44. En la figura 13.30, ¿cuánta altura libre hay a 10 pies desde el banco?

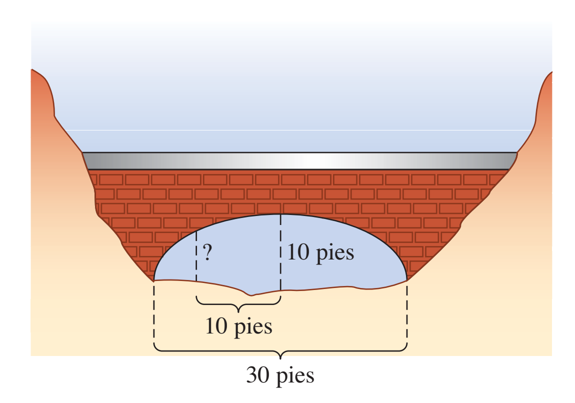


Figura 13.30

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

45. ¿Qué tipo de figura es la gráfica de la ecuación $x^2 + 6x + 2y^2 - 20y + 59 = 0$? Explique su respuesta.

46. Suponga que alguien graficó la ecuación $4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y - 11 = 0$ y obtuvo la gráfica que se muestra en la figura 13.31. ¿Cómo sabe, al observar la ecuación, que la gráfica es incorrecta?

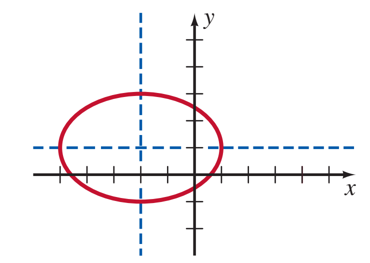


Figura 13.31

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

47. Use su calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 17-26.

48. Use su calculadora graficadora para bosquejar cada una de las siguientes elipses:

(a) $2x^2 - 40x + y^2 + 2y + 185 = 0$
(b) $x^2 - 4x + 2y^2 - 48y + 272 = 0$
(c) $4x^2 - 8x + y^2 - 4y - 136 = 0$
(d) $x^2 + 6x + 2y^2 + 56y + 301 = 0$

13.4 Hipérbolas

Una hipérbola y una elipse son similares por definición; sin embargo, una elipse implica la *suma* de distancias, y una hipérbola implica la *diferencia* de distancias.

Definición 13.4

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que la diferencia de las distancias de cada punto desde dos puntos fijos F y F' (los **focos**) en el plano es una constante positiva.

Al usar la definición 13.4 puede bosquejar una hipérbola al comenzar con dos puntos fijos F y F', como se muestra en la figura 13.32. Luego localice todos los puntos P tales que $PF' - PF$ sea una constante positiva. Del mismo modo, como se muestra en la figura 13.32, todos los puntos Q se ubican tales que $QF - QF'$ es la misma constante positiva. Las dos líneas curvas rayadas en la figura 13.32 constituyen la hipérbola. A las dos curvas en ocasiones se les refiere como las *ramas* de la hipérbola.

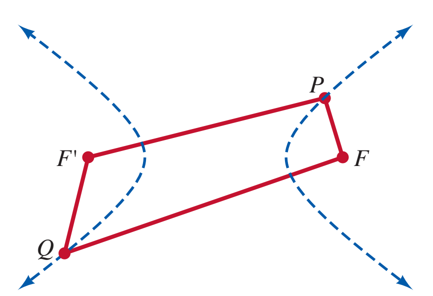


Figura 13.32

Para desarrollar una forma estándar para la ecuación de una hipérbola, superponga coordenadas sobre el plano tales que los focos se ubiquen en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, como se indica en la figura 13.33. Al usar la fórmula de distancia e igualar $2a$ con la diferencia de las distancias desde cualquier punto P sobre la hipérbola a los focos, se tiene la siguiente ecuación:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

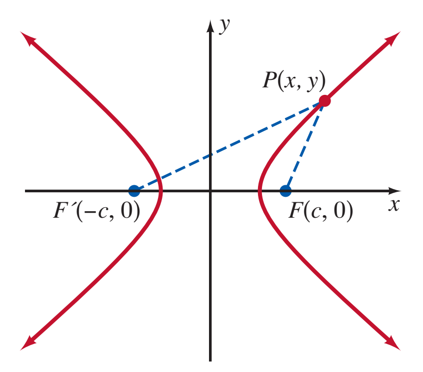


Figura 13.33

(El signo de valor absoluto se usa para permitir que el punto P esté en cualquier rama de la hipérbola.) Al usar el mismo tipo de procedimiento de simplificación que se utilizó para deducir la forma estándar para la ecuación de una elipse, se encuentra que esta ecuación se simplifica a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Al hacer $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$, se obtiene la forma estándar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La ecuación (1) indica que esta hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y el origen. Más aún, al hacer $y = 0$ se obtiene $x^2/a^2 = 1$, o $x^2 = a^2$, de modo que las abscisas al origen son a y $-a$. Los puntos correspondientes $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola, y el segmento de recta $\overline{AA'}$ se llama **eje transversal**; es de longitud $2a$ (vea la figura 13.34). El punto medio del eje transversal se llama **centro** de la hipérbola; se ubica en el origen. Al hacer $x = 0$ en la ecuación (1) se obtiene $-y^2/b^2 = 1$, o $y^2 = -b^2$. Esto implica que no hay ordenadas al origen, como se indica en la figura 13.34.

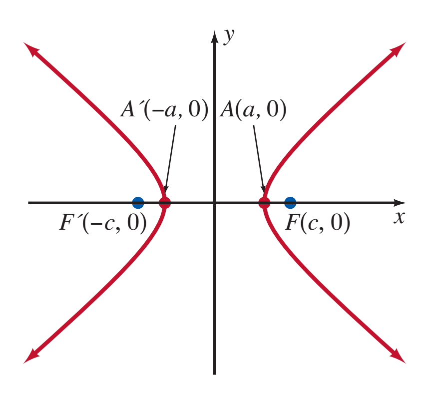


Figura 13.34

Ecuación estándar: hipérbola con eje transversal en el eje *x*

La ecuación estándar de una hipérbola con su centro en $(0, 0)$ y su eje transversal sobre el eje x es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde los focos están en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, los vértices están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, y $c^2 = a^2 + b^2$.

En conjunción con toda hipérbola hay dos rectas intersecantes que pasan a través del centro de la hipérbola. Estas rectas, conocidas como *asíntotas*, son muy

útiles cuando se bosqueja una hipérbola. Sus ecuaciones son fáciles de determinar usando el siguiente tipo de razonamiento. Al resolver la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

para y se produce $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. A partir de esta forma, es evidente que no hay puntos sobre la gráfica para $x^2 - a^2 < 0$; esto es, si $-a < x < a$. Sin embargo, hay puntos sobre la gráfica si $x \geq a$ o $x \leq -a$. Si $x \geq a$, entonces $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se puede escribir

$$\begin{aligned} y &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \\ &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \\ &= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \end{aligned}$$

Ahora suponga que tiene que determinar algunos valores y para valores muy grandes de x. (Recuerde que a y b son constantes arbitrarias; tienen valores específicos para una hipérbola particular.) Cuando x es muy grande, a^2/x^2 estará cerca de cero, de modo que el radicando estará cerca de 1. Por tanto, el valor y estará cerca de $(b/a)x$ o $-(b/a)x$. En otras palabras, conforme x se vuelve cada vez más grande, el punto $P(x, y)$ se acerca cada vez más a la recta $y = (b/a)x$ o a la recta $y = -(b/a)x$. Una situación correspondiente ocurre cuando $x \leq a$. Las rectas con ecuaciones

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

son las **asíntotas** de la hipérbola.

Como se mencionó anteriormente, las asíntotas son muy útiles para bosquejar hipérbolas. Una forma sencilla de bosquejar las asíntotas es primero graficar los vértices $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$ y los puntos $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$, como en la figura 13.35.

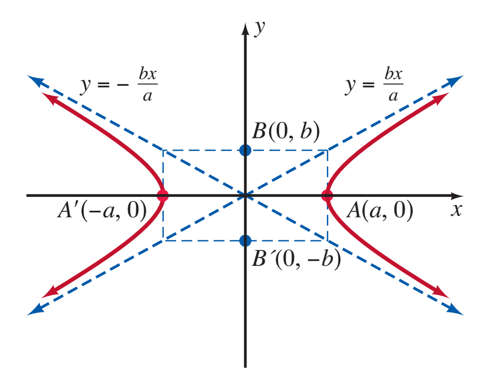


Figura 13.35

El segmento de recta $\overline{BB'}$ es de longitud $2b$ y se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Los segmentos de recta horizontales dibujados a través de B y B', junto con los segmentos de recta verticales dibujados a través de A y A', forman un rectángulo. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes b/a y $-(b/a)$. Por tanto, al extender las diagonales se obtienen las asíntotas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$. Las dos ramas de la hipérbola se pueden bosquejar usando las asíntotas como guías, como se muestra en la figura 13.35.

EJEMPLO 1

Encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, y bosqueje la hipérbola.

Solución

Al dividir ambos lados de la ecuación dada por 36 y simplificar se cambia la ecuación a la forma estándar

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

donde $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$. Por tanto, $a = 2$ y $b = 3$. Los vértices son $(\pm 2, 0)$ y los puntos finales del eje conjugado son $(0, \pm 3)$; estos puntos determinan el rectángulo cuyas diagonales se extienden para convertirse en las asíntotas. Con $a = 2$ y $b = 3$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$. Entonces, al usar la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se obtiene $c^2 = 4 + 9 = 13$. Por tanto, los focos están en $(\sqrt{13}, 0)$ y $(-\sqrt{13}, 0)$. (Los focos no se muestran en la figura 13.36.) Al usar los vértices y las asíntotas, se bosquejó la hipérbola de la figura 13.36.

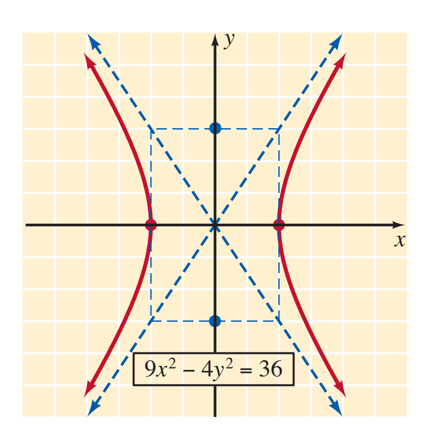


Figura 13.35

EJEMPLO 2

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices en $(\pm 4, 0)$ y focos en $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$.

Solución

A partir de la información dada se sabe que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{5}$. Entonces, al usar la relación $b^2 = c^2 - a^2$ se obtiene

$$b^2 = (2\sqrt{5})^2 - 4^2 = 20 - 16 = 4$$

La sustitución de a^2 por 16 y b^2 por 4 en la forma estándar produce

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Multiplicar ambos lados de esta ecuación por 16 produce

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

■

Hipérbolas con focos sobre el eje *y*

En forma similar, podría desarrollar una forma estándar para la ecuación de una hipérbola cuyos focos están en el eje *y*. El siguiente enunciado resume los resultados de tal desarrollo.

Ecuación estándar: hipérbola con eje transversal sobre el eje *y*

La ecuación estándar de una hipérbola con su centro en (0, 0) y su eje transversal sobre el eje *y* es

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

donde los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$, los vértices están en $(0, -b)$ y $(0, b)$, y $c^2 = a^2 + b^2$.

Los puntos finales del eje conjugado están en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. De nuevo, puede determinar las asíntotas al extender las diagonales del rectángulo formado por las líneas horizontales a través de los vértices y las líneas verticales a través de los puntos finales del eje conjugado. Las ecuaciones de las asíntotas de nuevo son $y = \pm\frac{b}{a}x$. Estas ideas se resumen con la figura 13.37.

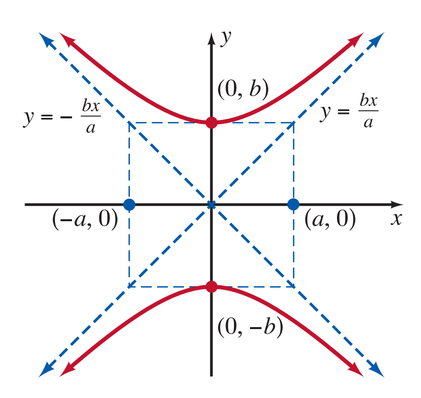


Figura 13.37

EJEMPLO 3

Encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $4y^2 - x^2 = 12$, y bosqueje la hipérbola.

Solución

Divida ambos lados de la ecuación dada entre 12 para cambiar la ecuación a la forma estándar:

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{12} = 1$$

donde $b^2 = 3$ y $a^2 = 12$. Por tanto, $b = \sqrt{3}$ y $a = 2\sqrt{3}$. Los vértices, $(0, \pm\sqrt{3})$, y los puntos finales del eje conjugado, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$, determinan el rectángulo cuyas diagonales se extienden para convertirse en las asíntotas. Con $b = \sqrt{3}$ y $a = 2\sqrt{3}$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$. Entonces, usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se obtiene $c^2 = 12 + 3 = 15$. Por ende, los focos están en $(0, \sqrt{15})$ y $(0, -\sqrt{15})$. La hipérbola se bosqueja en la figura 13.38.

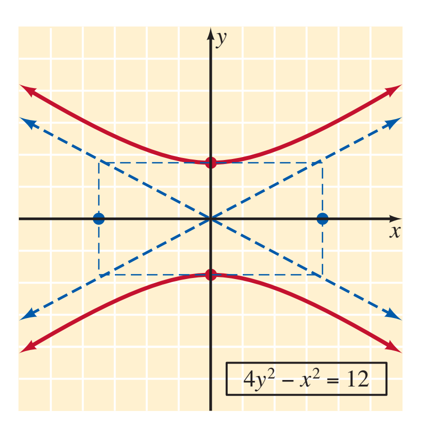


Figura 13.38

Otras hipérbolas

En la misma forma puede desarrollar la forma estándar para la ecuación de una hipérbola que sea simétrica con respecto a una recta paralela a un eje coordenado. En este texto no se demostrarán tales desarrollos, simplemente se enunciarán y usarán los resultados.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ Una hipérbola con centro en (h, k) y eje transversal sobre la recta horizontal $y = k$.

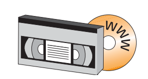
$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$ Una hipérbola con centro en (h, k) y eje transversal sobre la recta vertical $x = h$.

La relación $c^2 = a^2 + b^2$ todavía se sostiene, y el significado físico de a, b y c sigue siendo el mismo. No obstante, estos valores se usan en relación con el centro (h, k) para encontrar los puntos finales de los ejes transversal y conjugado y encontrar los

focos. Más aún, las pendientes de las asíntotas son como antes, pero estas rectas ahora contienen el nuevo centro, (h, k). Vea cómo funciona todo esto en un ejemplo específico.

EJEMPLO 4

Encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 36x - 16y^2 + 96y - 252 = 0$, y bosqueje la hipérbola.



Solución

Primero necesita cambiar a la forma estándar al completar el cuadrado tanto en x como en y.

$$9(x^2 - 4x + __) - 16(y^2 - 6y + __) = 252$$
$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 252 + 9(4) - 16(9)$$
$$9(x - 2)^2 - 16(y - 3)^2 = 144$$
$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

El centro está en (2, 3), y el eje transversal está sobre la recta $y = 3$. Puesto que $a^2 = 16$, se sabe que $a = 4$. Por tanto, los vértices están cuatro unidades a la derecha y cuatro unidades a la izquierda del centro, (2, 3), de modo que están en (6, 3) y (−2, 3). Del mismo modo, puesto que $b^2 = 9$, o $b = 3$, los puntos finales del eje conjugado están tres unidades arriba y tres unidades abajo desde el centro, de modo que están en (2, 6) y (2, 0). Con $a = 4$ y $b = 3$, las pendientes de las asíntotas son $\frac{3}{4}$ y $-\frac{3}{4}$. Entonces, usando las pendientes, el centro (2, 3), y la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de una recta, puede determinar las ecuaciones de las asíntotas como $3x - 4y = -6$ y $3x + 4y = 18$. A partir de la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se obtiene $c^2 = 16 + 9 = 25$. Por ende, los focos están en (7, 3) y (−3, 3). La hipérbola se bosqueja en la figura 13.39.

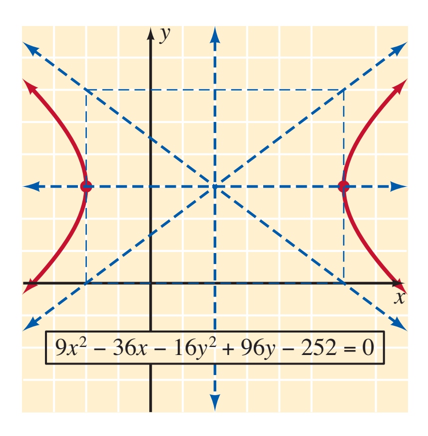
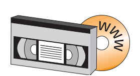


Figura 13.39 ■

EJEMPLO 5

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices en (−4, 2) y (−4, −4) con focos en (−4, 3) y (−4, −5).



Solución

Puesto que los vértices y los focos están sobre la misma recta vertical ($x = -4$), esta hipérbola tiene una ecuación de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$$

El centro de la hipérbola está en el punto medio del eje transversal. Por tanto

$$h = \frac{-4 + (-4)}{2} = -4 \qquad \text{y} \qquad k = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

La distancia entre el centro, (–4, –1), y un vértice, (–4, 2), es tres unidades, de modo que $b = 3$. La distancia entre el centro, (–4, –1), y un foco, (–4, 3), es cuatro unidades, así que $c = 4$. Entonces, usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se obtiene

$$a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

Ahora puede sustituir h por –4, k por –1, b^2 por 9 y a^2 por 7 en la forma general y simplificar.

$$\frac{(y + 1)^2}{9} - \frac{(x + 4)^2}{7} = 1$$

$$7(y + 1)^2 - 9(x + 4)^2 = 63$$

$$7(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 8x + 16) = 63$$

$$7y^2 + 14y + 7 - 9x^2 - 72x - 144 = 63$$

$$7y^2 + 14y - 9x^2 - 72x - 200 = 0$$

■

La hipérbola también tiene numerosas aplicaciones, incluidas muchas de las que tal vez no esté al tanto. Por ejemplo, un método de artillería para encontrar el rango se basa en el concepto de hipérbola. Si cada uno de los postes de escucha, P_1 y P_2 en la figura 13.40, registra el tiempo cuando se escucha un estallido de artillería, entonces la diferencia entre los tiempos multiplicada por la rapidez del sonido proporciona la diferencia de las distancias del arma de los dos puntos fijos. Por

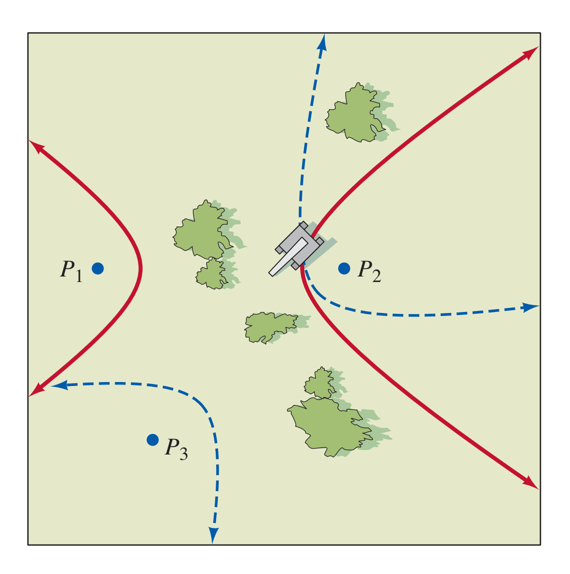


Figura 13.40

tanto, el arma se ubica en algún lugar sobre la hipérbola cuyos focos son los dos postes de escucha. Al colocar un tercer poste de escucha, P_3, se puede formar otra hipérbola con focos en P_2 y P_3. Entonces la ubicación del arma debe estar en una de las intersecciones de las dos hipérbolas.

Este mismo principio de intersección de hipérbolas se usa en un sistema de navegación de largo alcance conocido como LORAN. Las estaciones de radar sirven como los focos de las hipérbolas y, desde luego, se usan computadoras para los muchos cálculos que se necesitan para fijar la posición de un avión o barco. En la actualidad LORAN se usa principalmente para navegación costera en conexión con pequeños botes de placer.

Algunas creaciones arquitectónicas únicas usaron el concepto de paraboloide hiperbólico, que se muestra en la figura 13.41. Por ejemplo, el edificio TWA en el aeropuerto Kennedy está diseñado de esta forma. Algunos cometas, al entrar al campo gravitacional del Sol, siguen una trayectoria hiperbólica, con el Sol como uno de los focos (vea la figura 13.42).

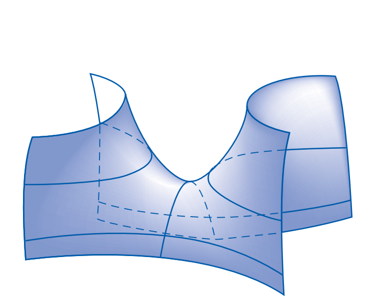


Figura 13.41

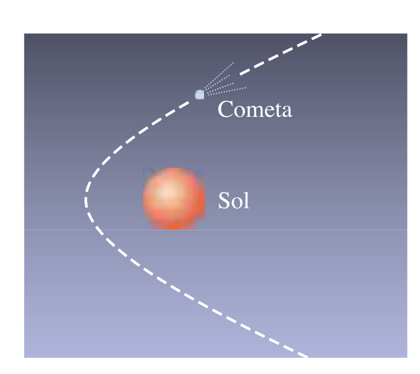


Figura 13.42

Conjunto de problemas 13.4

Para los problemas 1-26 encuentre los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas y bosqueje cada parábola.

1. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

3. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

4. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

5. $9y^2 - 16x^2 = 144$

6. $4y^2 - x^2 = 4$

7. $x^2 - y^2 = 9$

8. $x^2 - y^2 = 1$

9. $5y^2 - x^2 = 25$

10. $y^2 - 2x^2 = 8$

11. $y^2 - 9x^2 = -9$

12. $16y^2 - x^2 = -16$

13. $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

14. $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

15. $\dfrac{(y-2)^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{16} = 1$

16. $\dfrac{(y+1)^2}{1} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

17. $4x^2 - 24x - 9y^2 - 18y - 9 = 0$

18. $9x^2 + 72x - 4y^2 - 16y + 92 = 0$

19. $y^2 - 4y - 4x^2 - 24x - 36 = 0$

20. $9y^2 + 54y - x^2 + 6x + 63 = 0$

21. $2x^2 - 8x - y^2 + 4 = 0$

22. $x^2 + 6x - 3y^2 = 0$

23. $y^2 + 10y - 9x^2 + 16 = 0$

24. $4y^2 - 16y - x^2 + 12 = 0$

25. $x^2 + 4x - y^2 - 4y - 1 = 0$

26. $y^2 + 8y - x^2 + 2x + 14 = 0$

Para los problemas 27-42 encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

27. Vértices $(\pm 2, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$

28. Vértices $(\pm 1, 0)$, focos $(\pm 4, 0)$

29. Vértices $(0, \pm 3)$, focos $(0, \pm 5)$

30. Vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 6)$

31. Vértices $(\pm 1, 0)$, contiene el punto $(2, 3)$

32. Vértices $(0, \pm 1)$, contiene el punto $(-3, 5)$

33. Vértices $(0, \pm\sqrt{3})$, longitud del eje conjugado 4

34. Vértices $(\pm\sqrt{5}, 0)$, longitud del eje conjugado 6

35. Focos $(\pm\sqrt{23}, 0)$, longitud del eje conjugado 8

36. Focos $(0, \pm 3\sqrt{2})$, longitud del eje conjugado 4

37. Vértices $(6, -3)$ y $(2, -3)$, focos $(7, -3)$ y $(1, -3)$

38. Vértices $(-7, -4)$ y $(-5, -4)$, focos $(-8, -4)$ y $(-4, -4)$

39. Vértices $(-3, 7)$ y $(-3, 3)$, focos $(-3, 9)$ y $(-3, 1)$

40. Vértices $(7, 5)$ y $(7, -1)$, focos $(7, 7)$ y $(7, -3)$

41. Vértices $(0, 0)$ y $(4, 0)$, focos $(5, 0)$ y $(-1, 0)$

42. Vértices $(0, 0)$ y $(0, -6)$, focos $(0, 2)$ y $(0, -8)$

Para los problemas 43-52 identifique la gráfica de cada una de las ecuaciones como una línea recta, un círculo, una parábola, una elipse o una hipérbola. No bosqueje las gráficas.

43. $x^2 - 7x + y^2 + 8y - 2 = 0$

44. $x^2 - 7x - y^2 + 8y - 2 = 0$

45. $5x - 7y = 9$

46. $4x^2 - x + y^2 + 2y - 3 = 0$

47. $10x^2 + y^2 = 8$

48. $-3x - 2y = 9$

49. $5x^2 + 3x - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

50. $x^2 + y^2 - 3y - 6 = 0$

51. $x^2 - 3x + y - 4 = 0$

52. $5x + y^2 - 2y - 1 = 0$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

53. ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 0$ y $x^2 - y^2 = 0$?

54. ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas de las ecuaciones $4x^2 + 9y^2 = 0$ y $9x^2 + 4y^2 = 0$?

55. Una linterna produce un "cono de luz" que se puede cortar con el plano de una pared para ilustrar las secciones cónicas. Intente hacer brillar una linterna contra una pared (parado dentro de un metro de la pared) a diferentes ángulos para producir un círculo, una elipse, una parábola y una rama de una hipérbola. (Acaso encuentre difícil distinguir entre una parábola y una rama de una hipérbola.) Escriba un párrafo a alguien más explicando este experimento.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

56. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 17-26. Asegúrese de graficar las asíntotas para cada hipérbola.

57. Use una calculadora graficadora para comprobar sus respuestas para los problemas 43-52.

13.5 Sistemas que implican ecuaciones no lineales

En los capítulos 11 y 12 se usaron varias técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se usarán dos de estas técnicas en esta sección para resolver algunos sistemas que contienen al menos una ecuación no lineal. Más aún, usará su conocimiento de la graficación de rectas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas para obtener una imagen visual del sistema. Esto le brindará la base para predecir soluciones aproximadas en números reales, si existe alguna. En otras palabras, una vez más se llegó a un tema que ilustra vívidamente la fusión de las ideas matemáticas. Comience por considerar un sistema que contiene una ecuación lineal y una no lineal.

EJEMPLO 1

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x + 2y = 0 \end{pmatrix}$

Solución

A partir de las experiencias de graficación previas debe reconocer que $x^2 + y^2 = 13$ es un círculo y $3x + 2y = 0$ es una línea recta. Por tanto, el sistema se puede dibujar como en la figura 13.43. La gráfica indica que el conjunto solución de este sistema debe consistir de dos pares ordenados de números reales que representen los puntos de intersección en el segundo y cuarto cuadrantes.

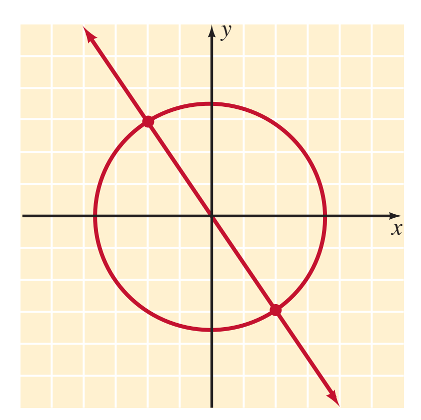


Figura 13.43

Ahora resuelva el sistema analíticamente usando el *método de sustitución*. Cambie la forma de $3x + 2y = 0$ a $y = -3x/2$, y luego sustituya y por $-3x/2$ en la otra ecuación para producir

$$x^2 + \left(-\frac{3x}{2}\right)^2 = 13$$

Ahora esta ecuación se puede resolver para x.

$$x^2 + \frac{9x^2}{4} = 13$$
$$4x^2 + 9x^2 = 52$$
$$13x^2 = 52$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

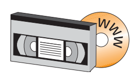
Sustituya x por 2 y luego x por -2 en la segunda ecuación del sistema para producir dos valores para y.

$$3x + 2y = 0 \qquad\qquad 3x + 2y = 0$$
$$3(2) + 2y = 0 \qquad\qquad 3(-2) + 2y = 0$$
$$2y = -6 \qquad\qquad 2y = 6$$
$$y = -3 \qquad\qquad y = 3$$

Por tanto, el conjunto solución del sistema es $\{(2, -3), (-2, 3)\}$. ■

Observaciones: No olvide que, como siempre, puede comprobar las soluciones al sustituirlas de vuelta en las ecuaciones originales. Graficar el sistema le permite aproximar algunas posibles soluciones en números reales antes de resolver el sistema. Entonces, después de resolver el sistema, puede usar nuevamente la gráfica para comprobar que las respuestas son razonables.

EJEMPLO 2 Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 - x^2 = 4 \end{pmatrix}$



Solución

Graficar el sistema produce la figura 13.44. Esta figura indica que debe haber cuatro pares ordenados de números reales en el conjunto solución del sistema. Resolver el sistema usando el *método de eliminación* funciona bastante bien. Simplemente puede sumar las dos ecuaciones, lo que elimina las x.

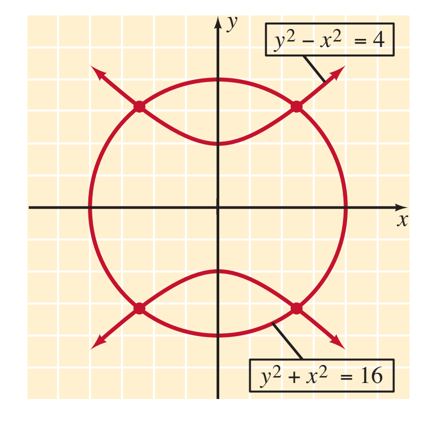


Figura 13.43

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$-x^2 + y^2 = 4$$
$$2y^2 = 20$$
$$y^2 = 10$$
$$y = \pm\sqrt{10}$$

Sustituir y por $\sqrt{10}$ en la primera ecuación produce

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$x^2 + (\sqrt{10})^2 = 16$$

$$x^2 + 10 = 16$$
$$x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

Por tanto, $(\sqrt{6}, \sqrt{10})$ y $(-\sqrt{6}, \sqrt{10})$ son soluciones. Sustituir y por $-\sqrt{10}$ en la primera ecuación produce

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$x^2 + (-\sqrt{10})^2 = 16$$
$$x^2 + 10 = 16$$
$$x^2 = 6$$
$$x = \pm\sqrt{6}$$

En consecuencia, $(\sqrt{6}, -\sqrt{10})$ y $(-\sqrt{6}, -\sqrt{10})$ también son soluciones. El conjunto solución es $\{(-\sqrt{6}, \sqrt{10}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{10}), (\sqrt{6}, \sqrt{10}), (\sqrt{6}, -\sqrt{10})$. ■

En ocasiones un bosquejo de la gráfica de un sistema puede no indicar claramente si el sistema contiene algunas soluciones en números reales. El siguiente ejemplo ilustra tal situación.

EJEMPLO 3

Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} y = x^2 + 2 \\ 6x - 4y = -5 \end{pmatrix}$

Solución

A partir de las experiencias de graficación anteriores se reconoce que $y = x^2 + 2$ es la parábola básica corrida hacia arriba dos unidades y que $6x - 4y = -5$ es una línea recta (vea la figura 13.45). Debido a la cercana proximidad de las curvas es difícil decir si se intersecan. En otras palabras, la gráfica no indica de manera definitiva alguna solución en números reales para el sistema.

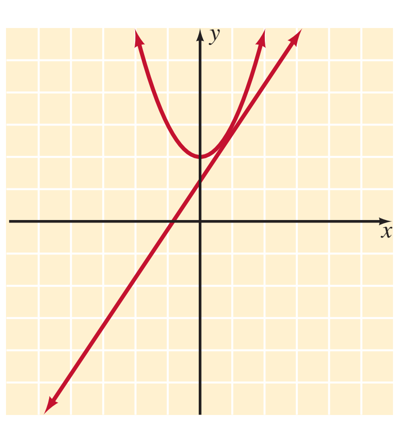


Figura 13.45

Resuelva el sistema usando el método de sustitución. Puede sustituir y con $x^2 + 2$ en la segunda ecuación, lo que produce dos valores para x.

$$6x - 4(x^2 + 2) = -5$$
$$6x - 4x^2 - 8 = -5$$
$$-4x^2 + 6x - 3 = 0$$
$$4x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{8}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{8}$$
$$= \frac{6 \pm 2i\sqrt{3}}{8}$$
$$= \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

Ahora es obvio que el sistema no tiene soluciones en números reales. Esto es, la recta y la parábola no intersecan en el plano de los números reales. Sin embargo, habrá dos pares de números complejos en el conjunto solución. Puede sustituir x por $(3 + i\sqrt{3})/4$ para x en la primera ecuación.

$$y = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 2$$
$$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{16} + 2$$
$$= \frac{6 + 6i\sqrt{3} + 32}{16}$$
$$= \frac{38 + 6i\sqrt{3}}{16}$$
$$= \frac{19 + 3i\sqrt{3}}{8}$$

Del mismo modo, puede sustituir x por $(3 - i\sqrt{3})/4$ en la primera ecuación.

$$y = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 2$$
$$= \frac{6 - 6i\sqrt{3}}{16} + 2$$
$$= \frac{6 - 6i\sqrt{3} + 32}{16}$$
$$= \frac{38 - 6i\sqrt{3}}{16}$$
$$= \frac{19 - 3i\sqrt{3}}{8}$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}, \frac{19 + 3i\sqrt{3}}{8}\right), \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}, \frac{19 - 3i\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$. ■

En el ejemplo 3 el uso de la herramienta de graficación puede, en principio, no indicar si el sistema tiene alguna solución en números reales. Suponga que grafica el sistema usando un rectángulo de visualización tal que $-15 \leq x \leq 15$ y $-10 \leq y \leq 10$. Como se muestra en la representación en la figura 13.46, no se puede decir si la recta y la parábola intersecan. Sin embargo, si cambia el rectángulo de visualización de modo que $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 4$, como se muestra en la figura 13.47, se vuelve evidente que las dos gráficas no intersecan.

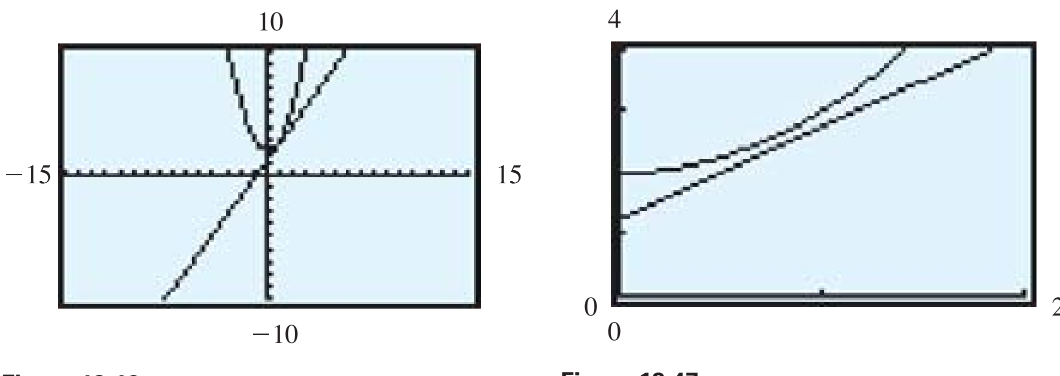


Figura 13.46

Figura 13.47

EJEMPLO 4

Encuentre las soluciones en los números reales para el sistema $\begin{pmatrix} y = \log_2(x-3) - 2 \\ y = -\log_2 x \end{pmatrix}$

Solución

Primero use una calculadora graficadora para obtener una gráfica del sistema, como se muestra en la figura 13.48. Las dos curvas parecen intersecar en aproximadamente $x = 4$ y $y = -2$.

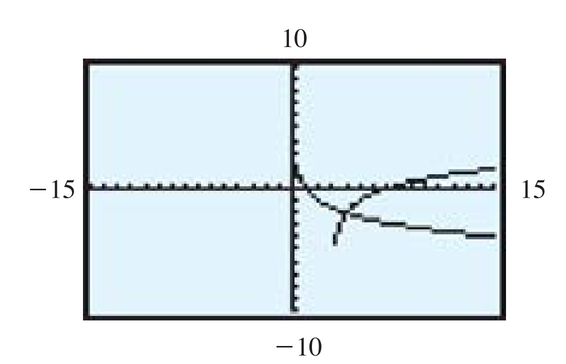


Figura 13.48

Para resolver el sistema algebraicamente puede igualar las dos expresiones para y y resolver la ecuación resultante para x.

$$\log_2(x-3) - 2 = -\log_2 x$$

$$\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$$

$$\log_2 x(x-3) = 2$$

En este paso puede cambiar a forma exponencial o reescribir 2 como $\log_2 4$.

$$\log_2 x(x - 3) = \log_2 4$$

$$x(x - 3) = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Puesto que los logaritmos no están definidos para números negativos se descarta -1. Por tanto, si $x = 4$, entonces

$$y = -\log_2 x$$

se convierte en

$$y = -\log_2 4$$

$$= -2$$

En consecuencia, el conjunto solución es $\{(4, -2)\}$. ■

Conjunto de problemas 13.5

Para los problemas 1-30, (a) grafique el sistema de modo que se puedan predecir soluciones aproximadas en números reales (si existen), y (b) resuelva el sistema mediante el método de sustitución o el de eliminación.

1. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 5 \\ x + 2y = 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x + 3y = 13 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 26 \\ x + y = -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 3 \\ x - y = -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} y = x^2 + 6x + 7 \\ 2x + y = -5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} y = x^2 - 4x + 5 \\ y - x = 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2x + y = -2 \\ y = x^2 + 4x + 7 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2x + y = 0 \\ y = -x^2 + 2x - 4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} y = x^2 - 3 \\ x + y = -4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} y = -x^2 + 1 \\ x + y = 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 = 9 \\ x - 4y = -9 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2x - y = 7 \\ 3x^2 + y^2 = 21 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} x + y = -3 \\ x^2 + 2y^2 - 12y - 18 = 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4x^2 + 9y^2 = 25 \\ 2x + 3y = 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} x^2 - 4y^2 = 16 \\ 2y - x = 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} y = x^2 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = x^2 + 4x + 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} y = -x^2 + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 8y^2 - 9x^2 = 6 \\ 8x^2 - 3y^2 = 7 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2x^2 + y^2 = 11 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 2x^2 - 3y^2 = -1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 5 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 4x^2 + 3y^2 = 9 \\ y^2 - 4x^2 = 7 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} xy = 3 \\ 2x + 2y = 7 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{pmatrix}$

Para los problemas 31-36 resuelva cada sistema para todas las soluciones en números reales.

31. $\begin{pmatrix} y = \log_3(x - 6) - 3 \\ y = -\log_3 x \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} y = \log_{10}(x - 9) - 1 \\ y = -\log_{10} x \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} y = e^x - 1 \\ y = 2e^{-x} \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} y = 28 - 11e^x \\ y = -e^{2x} \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} y = x^3 \\ y = x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} y = 3(4^x) - 8 \\ y = 4^{2x} - 2(4^x) - 4 \end{pmatrix}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

37. ¿Qué ocurre si intenta graficar el sistema

$$\begin{pmatrix} 7x^2 + 8y^2 = 36 \\ 11x^2 + 5y^2 = -4 \end{pmatrix}?$$

38. ¿Para qué valores de k la recta $x + y = k$ tocará la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ en uno y sólo un punto? Defienda su respuesta.

39. El sistema

$$\begin{pmatrix} x^2 - 6x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 + 8y - 5 = 0 \end{pmatrix}$$

representa dos círculos que intersecan en dos puntos. Es posible formar un sistema equivalente al remplazar la segunda ecuación con el resultado de sumar -1 por la primera ecuación a la segunda ecuación. Por ende, se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} x^2 - 6x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\ 2x + 12y - 9 = 0 \end{pmatrix}$$

Explique por qué la ecuación lineal en este sistema es la ecuación de la cuerda común de los dos círculos originales que intersecan.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

40. Grafique el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} y = x^2 + 2 \\ 6x - 4y = -5 \end{pmatrix}$ y use las características TRACE y ZOOM de su calculadora para demostrar que este sistema no tiene soluciones en números reales.

41. Use una calculadora graficadora para dibujar los sistemas de los problemas 31-36 y compruebe lo razonable de sus respuestas a dichos problemas.

Para los problemas 42-47 use una calculadora graficadora para aproximar, a la décima más cercana, las soluciones en números reales para cada sistema de ecuaciones.

42. $\begin{pmatrix} y = e^x + 1 \\ y = x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} y = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \\ y = -x^3 - x^2 + 1 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} y = 2^x + 1 \\ y = 2^{-x} + 2 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} y = \ln(x - 1) \\ y = x^2 - 16x + 64 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} x = y^2 - 2y + 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} y^2 - x^2 = 16 \\ 2y^2 - x^2 = 8 \end{pmatrix}$

Capítulo 13 Resumen

En este capítulo se desarrollaron las siguientes formas estándar para las ecuaciones de las secciones cónicas.

(13.1) Círculos

$x^2 + y^2 = r^2$
centro en (0, 0) y radio de longitud r

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
centro en (h, k) y radio de longitud r

(13.2) Parábolas

$x^2 = 4py$
foco $(0, p)$, directriz $y = -p$, simetría con el eje y

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
foco $(h, k + p)$, directriz $y = k - p$, simétrica con respecto a la recta $x = h$

$y^2 = 4px$
foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$, simetría con el eje x

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
foco $(h + p, k)$, directriz $x = h - p$, simétrica con respecto a la recta $y = k$

(13.3) Elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2$$

centro (0, 0), vértices $(\pm a, 0)$, puntos finales de eje menor $(0, \pm b)$, focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2$$

centro (h, k), vértices $(h \pm a, k)$, puntos finales de eje menor $(h, k \pm b)$, focos $(h \pm c, k)$, $c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 > a^2$$

centro (0, 0), vértices $(0, \pm b)$, puntos finales de eje menor $(\pm a, 0)$, focos $(0, \pm c)$, $c^2 = b^2 - a^2$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad b^2 > a^2$$

centro (h, k), vértices $(h, k \pm b)$, puntos finales de eje menor $(h \pm a, k)$, focos $(h, k \pm c)$, $c^2 = b^2 - a^2$

(13.4) Hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

centro (0, 0), vértices $(\pm a, 0)$, puntos finales de eje conjugado $(0, \pm b)$, focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$,

asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

centro (h, k), vértices $(h \pm a, k)$, puntos finales de eje conjugado $(h, k \pm b)$, focos $(h \pm c, k)$, $c^2 = a^2 + b^2$,

asíntotas $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

centro (0, 0), vertices $(0, \pm b)$, puntos finales de eje conjugado $(\pm a, 0)$, focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$,

asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$$

centro (h, k), vértices $(h, k \pm b)$, puntos finales de eje conjugado $(h \pm a, k)$, focos $(h, k \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$,

asíntotas $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

(13.5) Los sistemas que contienen al menos una ecuación no lineal con frecuencia se resuelven mediante el método de sustitución o el de eliminación. Graficar el sistema con frecuencia proporcionará una base para predecir soluciones aproximadas en números reales, si es que existen.

Capítulo 13 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-14, (a) identifique la sección cónica como círculo, parábola, elipse o hipérbola. (b) Si es un círculo, encuentre su centro y la longitud de un radio; si es una parábola, encuentre su vértice, foco y directriz; si es una elipse, encuentre sus vértices, los puntos finales de su eje menor y sus focos; si es una hipérbola, encuentre sus vértices, los puntos finales de su eje conjugado, sus focos y sus asíntotas. (c) Bosqueje cada una de las curvas.

1. $x^2 + 2y^2 = 32$

2. $y^2 = -12x$

3. $3y^2 - x^2 = 9$

4. $2x^2 - 3y^2 = 18$

5. $5x^2 + 2y^2 = 20$

6. $x^2 = 2y$

7. $x^2 + y^2 = 10$

8. $x^2 - 8x - 2y^2 + 4y + 10 = 0$

9. $9x^2 - 54x + 2y^2 + 8y + 71 = 0$

10. $y^2 - 2y + 4x + 9 = 0$

11. $x^2 + 2x + 8y + 25 = 0$

12. $x^2 + 10x + 4y^2 - 16y + 25 = 0$

13. $3y^2 + 12y - 2x^2 - 8x - 8 = 0$

14. $x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0$

Para los problemas 15-28 encuentre la ecuación de la sección cónica indicada que satisfaga las condiciones dadas.

15. Círculo con centro en $(-8, 3)$ y un radio de $\sqrt{5}$ unidades de longitud

16. Parábola con vértice $(0, 0)$, foco $(-5, 0)$, directriz $x = 5$

17. Elipse con vértice $(0, \pm 4)$, focos $(0, \pm\sqrt{15})$

18. Hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud de eje conjugado 10

19. Círculo con centro en $(5, -12)$, pasa a través del origen

20. Elipse con vértices $(\pm 2, 0)$, contiene el punto $(1, -2)$

21. Parábola con vértice $(0, 0)$, simétrica con respecto al eje y, contiene el punto $(2, 6)$

22. Hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$, focos $(0, \pm\sqrt{10})$

23. Elipse con vértices $(6, 1)$ y $(6, 7)$, longitud de eje menor 2 unidades

24. Parábola con vértice $(4, -2)$, foco $(6, -2)$

25. Hipérbola con vértices $(-5, -3)$ y $(-5, -5)$, focos $(-5, -2)$ y $(-5, -6)$

26. Parábola con vértice $(-6, -3)$, simétrica con respecto a la línea $x = -6$, contiene el punto $(-5, -2)$

27. Elipse con puntos finales de eje menor $(-5, 2)$ y $(-5, -2)$, longitud de eje mayor 10 unidades

28. Hipérbola con vértices $(2, 0)$ y $(6, 0)$, longitud de eje conjugado 8 unidades

Para los problemas 29-34 (a) grafique el sistema y (b) resuelva el sistema usando el método de sustitución o el de eliminación.

29. $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 17 \\ x - 4y = -17 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} x^2 - y^2 = 8 \\ 3x - y = 8 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} x - y = 1 \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 4x^2 - y^2 = 16 \\ 9x^2 + 9y^2 = 16 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 + 3y^2 = 12 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} y^2 - x^2 = 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{pmatrix}$

Capítulo 13 Examen

1. Encuentre el foco de la parábola $x^2 = -20y$.

2. Encuentre el vértice de la parábola $y^2 - 4y - 8x - 20 = 0$.

3. Encuentre la ecuación de la directriz para la parábola $2y^2 = 24x$.

4. Encuentre el foco de la parábola $y^2 = 24x$.

5. Encuentre el vértice de la parábola $x^2 + 4x - 12y - 8$.

6. Encuentre el centro del círculo $x^2 + 6x + y^2 + 18y + 87 = 0$.

7. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, es simétrica con respecto al eje x y contiene el punto $(-2, 4)$.

8. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y su foco en $(3, 1)$.

9. Encuentre la ecuación del círculo que tiene su centro en $(-1, 6)$ y tiene un radio de longitud de 5 unidades.

10. Encuentre la longitud del eje mayor de la elipse $x^2 - 4x + 9y^2 - 18y + 4 = 0$.

11. Encuentre los puntos finales del eje menor de la elipse $9x^2 + 90x + 4y^2 - 8y + 193 = 0$.

12. Encuentre los focos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

13. Encuentre el centro de la elipse $3x^2 + 30x + y^2 - 16y + 79 = 0$.

14. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene los puntos finales de su eje mayor en $(0, \pm 10)$ y sus focos en $(0, \pm 8)$.

15. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene los puntos finales de su eje mayor en $(2, -2)$ y $(10, -2)$ y los puntos finales de su eje menor en $(6, 0)$ y $(6, -4)$.

16. Encuentre la ecuación de las asíntotas de la hipérbola $4y^2 - 9x^2 = 32$.

17. Encuentre los vértices de la hipérbola $y^2 - 6y - 3x^2 - 6x - 3 = 0$.

18. Encuentre los focos de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 20$.

19. Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene sus vértices en $(\pm 6, 0)$ y sus focos en $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$.

20. Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene sus vértices en $(0, 4)$ y $(-2, 4)$ y sus focos en $(2, 4)$ y $(-4, 4)$.

21. ¿Cuántas soluciones en números reales hay para el sistema $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 - 4y = 8 \end{pmatrix}$?

22. Resuelva el sistema $\begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{pmatrix}$

Para los problemas 23-25 grafique cada sección cónica.

23. $y^2 + 4y + 8x - 4 = 0$

24. $9x^2 - 36x + 4y^2 + 16y + 16 = 0$

25. $x^2 + 6x - 3y^2 = 0$

14

Secuencias e inducción matemática

Cuando los objetos se ordenan en una secuencia, el número total de objetos es la suma de los términos de la secuencia.

Suponga que un auditorio tiene 35 asientos en la primera fila, 40 asientos en la segunda fila, 45 asientos en la tercera fila, etc. Hasta la décima fila. Los números 35, 40, 45, 50, . . . , 80 representan el número de asientos por fila, de la fila 1 a la fila 10. Esta lista de números tiene una diferencia constante de 5 entre cualesquiera dos números sucesivos en la lista; tal lista se llama **secuencia aritmética**.

Suponga que un cultivo de hongos, que crece bajo condiciones controladas, duplica su tamaño cada día. Si hoy el tamaño del cultivo es de 6 unidades, entonces los números 12, 24, 48, 96, 192 representan el tamaño del cultivo para los próximos 5 días. En esta lista de números, cada número después del primero es el doble del número anterior; tal lista se llama **secuencia geométrica**. Las secuencias aritméticas y las secuencias geométricas serán el centro de atención en este capítulo.

14.1 Secuencias aritméticas

Una **secuencia infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por ejemplo, considere la función definida por la ecuación

$$f(n) = 5n + 1$$

donde el dominio es el conjunto de los enteros positivos. Si sustituye los números del dominio en orden, comenzando con 1, puede hacer una lista de los pares ordenados resultantes:

$$(1, 6) \qquad (2, 11) \qquad (3, 16) \qquad (4, 21) \qquad (5, 26)$$

etcétera. Sin embargo, como sabe que usa el dominio de los enteros positivos en orden, comenzando con 1, no hay necesidad de usar pares ordenados. Simplemente puede expresar la secuencia infinita como

$$6, 11, 16, 21, 26, \ldots$$

Con frecuencia se usa la letra a para representar funciones secuenciales y el valor secuencial de a en n se escribe a_n (esto se lee "a subíndice n" o "a sub n") en lugar de $a(n)$. Entonces la secuencia se expresa como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

donde a_1 es el **primer término**, a_2 es el **segundo término**, a_3 es el **tercer término**, etc. La expresión a_n, que define la secuencia, se llama **término general** de la secuencia. Conocer el término general de una secuencia permite encontrar tantos términos de la secuencia según se necesite y también encontrar cualesquiera términos específicos. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1

Encuentre los primeros cinco términos de la secuencia donde $a_n = 2n^2 - 3$; encuentre el vigésimo término.

Solución

Los primeros cinco términos se generan al sustituir n con 1, 2, 3, 4 y 5.

$$a_1 = 2(1)^2 - 3 = -1 \qquad a_2 = 2(2)^2 - 3 = 5$$

$$a_3 = 2(3)^2 - 3 = 15 \qquad a_4 = 2(4)^2 - 3 = 29$$

$$a_5 = 2(5)^2 - 3 = 47$$

Los primeros cinco términos son, por tanto, −1, 5, 15, 29 y 47. El vigésimo término es

$$a_{20} = 2(20)^2 - 3 = 797$$

■

Secuencias aritméticas

Una **secuencia aritmética** (también llamada **progresión aritmética**) es una secuencia que tiene una diferencia común entre términos sucesivos. Los siguientes son ejemplos de secuencias aritméticas:

$$1, 8, 15, 22, 29, \ldots$$

$$4, 7, 10, 13, 16, \ldots$$

$$4, 1, -2, -5, -8, \ldots$$
$$-1, -6, -11, -16, -21, \ldots$$

La diferencia común en la primera secuencia es 7. Esto es, $8 - 1 = 7$, $15 - 8 = 7$, $22 - 15 = 7$, $29 - 22 = 7$, etc. Las diferencias comunes para las siguientes tres secuencias son 3, –3 y –5, respectivamente.

En un escenario más general, se dice que la secuencia

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

es una secuencia aritmética si y sólo si hay un número real d tal que

$$a_{k+1} - a_k = d$$

para todo entero positivo k. El número d se llama **diferencia común**.

A partir de la definición, se ve que $a_{k+1} = a_k + d$. En otras palabras, puede generar una secuencia aritmética que tenga una diferencia común de d comenzando con un primer término a_1 y luego simplemente agregar d a cada término sucesivo.

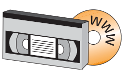
Primer término:	a_1	
Segundo término:	$a_1 + d$	
Tercer término:	$a_1 + 2d$	$(a_1 + d) + d = a_1 + 2d$
Cuarto término:	$a_1 + 3d$	
.		
.		
.		
n-ésimo término:	$a_1 + (n - 1)d$	

Por tanto, el **término general** de una secuencia aritmética está dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia común. Esta fórmula para el término general se puede usar para resolver varios problemas que implican secuencias aritméticas.

EJEMPLO 2 Encuentre el término general de la secuencia aritmética 6, 2, –2, –6, . . .



Solución

La diferencia común, d, es $2 - 6 = -4$, y el primer término, a_1, es 6. Sustituya con estos valores $a_n = a_1 + (n - 1)d$ y simplifique para obtener

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ &= 6 + (n - 1)(-4) \\ &= 6 - 4n + 4 \\ &= -4n + 10 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3

Encuentre el 40o. término de la secuencia aritmética 1, 5, 9, 13, . . .

Solución

Usando $a_n = a_1 + (n - 1)d$ se obtiene

$$\begin{aligned} a_{40} &= 1 + (40 - 1)4 \\ &= 1 + (39)(4) \\ &= 157 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4

Encuentre el primer término de la secuencia aritmética donde el cuarto término es 26 y el noveno término es 61.

Solución

Al usar $a_n = a_1 + (n - 1)d$, con $a_4 = 26$ (el cuarto término es 26) y $a_9 = 61$ (el noveno término es 61), se tiene

$$26 = a_1 + (4 - 1)d = a_1 + 3d$$

$$61 = a_1 + (9 - 1)d = a_1 + 8d$$

Resolver el sistema de ecuaciones

$$(a_1 + 3d = 26)$$

$$(a_1 + 8d = 61)$$

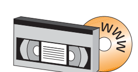
produce $a_1 = 5$ y $d = 7$. Por tanto, el primer término es 5. ■

Sumas de secuencias aritméticas

Con frecuencia, las secuencias se usan para resolver problemas, así que es necesario encontrar la suma de cierto número de términos de la secuencia. Antes de desarrollar una fórmula general de suma para secuencias aritméticas, considere un enfoque para un problema específico que puede usarse después en un escenario general.

EJEMPLO 5

Encuentre la suma de los primeros 100 enteros positivos.



Solución

Se pide encontrar la suma de $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$. En lugar de sumar en la forma usual, se encontrará la suma en la forma siguiente: simplemente escriba la suma indicada hacia delante y hacia atrás, y luego sume en forma de columna.

$$\begin{array}{rcrcrcrcccr} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array}$$

Se produjeron 100 sumas de 101. Sin embargo, este resultado es el doble de la cantidad que se quiere, porque se escribió la suma dos veces. Para encontrar la suma de sólo los números 1 a 100 es necesario multiplicar 100 por 101 y luego dividir entre 2.

$$\frac{100(101)}{2} = \frac{\overset{50}{\cancel{100}}(101)}{\cancel{2}} = 5050$$

Por tanto, la suma de los primeros 100 enteros positivos es 5050. ■

El enfoque *adelante-atrás* que se usó en el ejemplo 5 se puede utilizar para desarrollar una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de cualquier secuencia aritmética. Considere una secuencia aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ con una diferencia común de d. Use S_n para representar la suma de los primeros n términos y proceda del modo siguiente:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Ahora escriba la suma en reversa,

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

Sume las dos ecuaciones para producir

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Esto es, se tienen n sumas $a_1 + a_n$, de modo que

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

de donde se obtiene una **fórmula de suma**:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Al usar la fórmula del n-ésimo término y/o la fórmula de suma, puede resolver varios problemas que implican secuencias aritméticas.

EJEMPLO 6

Encuentre la suma de los primeros 30 términos de la secuencia aritmética 3, 7, 11, 15, . . .

Solución

Para usar la fórmula $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ es necesario conocer el número de términos (n), el primer término (a_1) y el último término (a_n). Se proporciona el número de términos y el primer término, de modo que es necesario encontrar el último término. Al usar $a_n = a_1 + (n - 1)d$ puede encontrar el 30o. término.

$$a_{30} = 3 + (30 - 1)4 = 3 + 29(4) = 119$$

Ahora puede usar la fórmula de suma.

$$S_{30} = \frac{30(3 + 119)}{2} = 1830$$

■

EJEMPLO 7 Encuentre la suma $7 + 10 + 13 + \cdots + 157$

Solución

Para usar la fórmula de suma, necesita conocer el número de términos. Aplicar la fórmula del n-ésimo término proporcionará dicha información.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 157 &= 7 + (n - 1)3 \\ 157 &= 7 + 3n - 3 \\ 157 &= 3n + 4 \\ 153 &= 3n \\ 51 &= n \end{aligned}$$

Ahora puede usar la fórmula de suma.

$$S_{51} = \frac{51(7 + 157)}{2} = 4182$$

■

Tenga en mente que la fórmula de suma se desarrolló para una secuencia aritmética usando la técnica adelante-atrás, que anteriormente se utilizó en un problema específico. Ahora que se tiene la fórmula de suma, tiene dos opciones cuando resuelva problemas. Puede memorizar la fórmula y usarla, o simplemente emplear la técnica adelante-atrás. Si elige usar la fórmula y algún día la olvida, no tenga miedo. Sólo use la técnica adelante-atrás. En otras palabras, comprender el desarrollo de una fórmula con frecuencia la permite resolver problemas aun cuando olvide la fórmula misma.

■ Notación sumatoria

En ocasiones se usa una notación especial para indicar la suma de cierto número de términos de una secuencia. La letra griega mayúscula *sigma*, Σ, se usa como **símbolo de sumatoria**. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} a_i$$

representa la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. La letra i se usa frecuentemente como el **índice de sumatoria**; la letra i toma todos los valores enteros desde el límite inferior hasta el límite superior, inclusive. Por tanto

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$\sum_{i=1}^{15} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 15^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ representa una secuencia aritmética, ahora puede escribir la fórmula de suma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

EJEMPLO 8

Encuentre la suma $\sum_{i=1}^{50}(3i + 4)$

Solución

Esta suma indicada significa

$$\sum_{i=1}^{50}(3i + 4) = [3(1) + 4] + [3(2) + 4] + [3(3) + 4] + \cdots + [3(50) + 4]$$
$$= 7 + 10 + 13 + \cdots + 154$$

Puesto que es una suma indicada de una secuencia aritmética, puede utilizar su fórmula de suma.

$$S_{50} = \frac{50}{2}(7 + 154) = 4025$$

■

EJEMPLO 9

Encuentre la suma $\sum_{i=2}^{7} 2i^2$

Solución

Esta suma indicada significa

$$\sum_{i=2}^{7} 2i^2 = 2(2)^2 + 2(3)^2 + 2(4)^2 + 2(5)^2 + 2(6)^2 + 2(7)^2$$
$$= 8 + 18 + 32 + 50 + 72 + 98$$

Esta no es la suma indicada de una secuencia *aritmética*; por tanto, simplemente sume los números en la forma usual. La suma es 278. ■

El ejemplo 9 sugiere una advertencia. Asegúrese de analizar la secuencia de números que se representa mediante el símbolo sumatorio. Puede o no usar una fórmula para sumar los números.

Conjunto de problemas 14.1

Para los problemas 1-10 escriba los primeros cinco términos de la secuencia que tienen el término general indicado.

1. $a_n = 3n - 7$

2. $a_n = 5n - 2$

3. $a_n = -2n + 4$

4. $a_n = -4n + 7$

5. $a_n = 3n^2 - 1$

6. $a_n = 2n^2 - 6$

7. $a_n = n(n - 1)$

8. $a_n = (n + 1)(n + 2)$

9. $a_n = 2^{n+1}$

10. $a_n = 3^{n-1}$

11. Encuentre los términos 15o. y 30o. de la secuencia donde $a_n = -5n - 4$.

12. Encuentre los términos 20o. y 50o. de la secuencia donde $a_n = -n - 3$.

13. Encuentre los términos 25o. y 50o. de la secuencia donde $a_n = (-1)^{n+1}$.

14. Encuentre los términos 10o. y 15o. de la secuencia donde $a_n = -n^2 - 10$.

Para los problemas 15-24 encuentre el término general (el n-ésimo término) para cada secuencia aritmética.

15. $11, 13, 15, 17, 19, \ldots$

16. $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$

17. $2, -1, -4, -7, -10, \ldots$

18. $4, 2, 0, -2, -4, \ldots$

19. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

20. $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

21. $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$

22. $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$

23. $-3, -6, -9, -12, -15, \ldots$

24. $-4, -8, -12, -16, -20, \ldots$

Para los problemas 25-30 encuentre el término requerido para cada secuencia aritmética.

25. El 15o. término de $3, 8, 13, 18, \ldots$

26. El 20o. término de $4, 11, 18, 25, \ldots$

27. El 30o. término de $15, 26, 37, 48, \ldots$

28. El 35o. término de $9, 17, 25, 33, \ldots$

29. El 52o. término de $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots$

30. El 47o. término de $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \ldots$

Para los problemas 31-42 resuelva cada problema.

31. Si el 6o. término de una secuencia aritmética es 12 y el 10o. término es 16, encuentre el primer término.

32. Si el 5o. término de una secuencia aritmética es 14 y el 12o. término es 42, encuentre el primer término.

33. Si el 3er. término de una secuencia aritmética es 20 y el 7o. término es 32, encuentre el 25o. término.

34. Si el 5o. término de una secuencia aritmética es -5 y el 15o. término es -25, encuentre el 50o. término.

35. Encuentre la suma de los primeros 50 términos de la secuencia aritmética $5, 7, 9, 11, 13, \ldots$.

36. Encuentre la suma de los primeros 30 términos de la secuencia aritmética $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$.

37. Encuentre la suma de los primeros 40 términos de la secuencia aritmética $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$.

38. Encuentre la suma de los primeros 60 términos de la secuencia aritmética $-2, 3, 8, 13, 18, \ldots$.

39. Encuentre la suma de los primeros 75 términos de la secuencia aritmética $5, 2, -1, -4, -7, \ldots$.

40. Encuentre la suma de los primeros 80 términos de la secuencia aritmética $7, 3, -1, -5, -9, \ldots$.

41. Encuentre la suma de los primeros 50 términos de la secuencia aritmética $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$.

42. Encuentre la suma de los primeros 100 términos de la secuencia aritmética $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$.

Para los problemas 43-50 encuentre la suma indicada.

43. $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 197$

44. $3 + 8 + 13 + 18 + \cdots + 398$

45. $2 + 8 + 14 + 20 + \cdots + 146$

46. $6 + 9 + 12 + 15 + \cdots + 93$

47. $(-7) + (-10) + (-13) + (-16) + \cdots + (-109)$

48. $(-5) + (-9) + (-13) + (-17) + \cdots + (-169)$

49. $(-5) + (-3) + (-1) + 1 + \cdots + 119$

50. $(-7) + (-4) + (-1) + 2 + \cdots + 131$

Para los problemas 51-58 resuelva cada uno de ellos.

51. Encuentre la suma de los primeros 200 números enteros positivos impares.

52. Encuentre la suma de los primeros 175 números enteros positivos pares.

53. Encuentre la suma de todos los números pares entre 18 y 482, inclusive.

54. Encuentre la suma de todos los números impares entre 17 y 379, inclusive.

55. Encuentre la suma de los primeros 30 términos de la secuencia aritmética con término general $a_n = 5n - 4$.

56. Encuentre la suma de los primeros 40 términos de la secuencia aritmética con el término general $a_n = 4n - 7$.

57. Encuentre la suma de los primeros 25 términos de la secuencia aritmética con el término general $a_n = -4n - 1$.

58. Encuentre la suma de los primeros 35 términos de la secuencia aritmética con el término general $a_n = -5n - 3$.

Para los problemas 59-70 encuentre cada suma.

59. $\sum_{i=1}^{45} (5i + 2)$

60. $\sum_{i=1}^{38} (3i + 6)$

61. $\sum_{i=1}^{30} (-2i + 4)$

62. $\sum_{i=1}^{40} (-3i + 3)$

63. $\sum_{i=4}^{32} (3i - 10)$

64. $\sum_{i=6}^{47} (4i - 9)$

65. $\sum_{i=10}^{20} 4i$

66. $\sum_{i=15}^{30} (-5i)$

67. $\sum_{i=1}^{5} i^2$

68. $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$

69. $\sum_{i=3}^{8} (2i^2 + i)$

70. $\sum_{i=4}^{7} (3i^2 - 2)$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

71. Antes de desarrollar la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$ se enunció la ecuación $a_{k+1} - a_k = d$. Con sus palabras, explique qué dice esta ecuación.

72. Explique cómo encontrar la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 175$ sin usar la fórmula de suma.

73. Explique cómo encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética.

74. Explique cómo puede decir que una secuencia particular es una secuencia aritmética.

MÁS INVESTIGACIÓN

El término general de una secuencia puede consistir de una expresión para ciertos valores de n y otra expresión (o expresiones) para otros valores de n. Esto es, se puede proporcionar una **expresión múltiple** de la secuencia. Por ejemplo,

$$a_n = \begin{cases} 2n + 3 & \text{para } n \text{ impar} \\ 3n - 2 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

significa que se usa $a_n = 2n + 3$ para $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, y se usa $a_n = 3n - 2$ para $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$. Los primeros seis términos de esta secuencia son 5, 4, 9, 10, 13 y 16.

Para los problemas 75-78 escriba los primeros seis términos de cada secuencia.

75. $a_n = \begin{cases} 2n + 1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 2n - 1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$

76. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{para } n \text{ impar} \\ n^2 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$

77. $a_n = \begin{cases} 3n + 1 & \text{para } n \leq 3 \\ 4n - 3 & \text{para } n > 3 \end{cases}$

78. $a_n = \begin{cases} 5n - 1 & \text{para } n \text{ un múltiplo de 3} \\ 2n & \text{para cualquiera otro} \end{cases}$

El enfoque de descripción múltiple también se puede usar para dar una **descripción recursiva** de una secuencia. Se dice que una secuencia se **describe recursivamente** si se enuncian los primeros n términos y luego cada término sucesivo se define como función de uno o más de los términos precedentes. Por ejemplo,

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

significa que el primer término, a_1, es 2 y cada término sucesivo es dos veces el término previo. Por ende, los primeros seis términos son 2, 4, 8, 16, 32 y 64.

Para los problemas 79-84, escriba los primeros seis términos de cada secuencia.

79. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 3a_{n-1} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

80. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

81. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$

82. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-2} + 3a_{n-1} & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$

83. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \\ a_n = (a_{n-1} - a_{n-2})^2 & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$

84. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{para } n \geq 4 \end{cases}$

14.2 Secuencias geométricas

Una **secuencia geométrica** o **progresión geométrica** es una secuencia en la que se obtiene cada término después del primero al multiplicar el término precedente por un multiplicador común llamado **razón común** de la secuencia. Puede encontrar la razón común de una secuencia geométrica al dividir cualquier término (distinto al primero) por el término precedente. La siguiente secuencia geométrica tiene razones comunes de 3, 2, $\frac{1}{2}$ y −4, respectivamente:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots$$

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

$$16, 8, 4, 2, 1, \ldots$$

$$-1, 4, -16, 64, -256, \ldots$$

En un escenario más general, se dice que la secuencia $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una secuencia geométrica si y sólo si hay un número real distinto de cero r tal que

$$a_{k+1} = ra_k$$

para todo entero positivo k. El número real distinto de cero r se llama razón común de la secuencia.

La ecuación anterior se puede usar para generar una secuencia geométrica general que tenga a_1 como primer término y r como una razón común. Puede proceder del modo siguiente:

Primer término:	a_1	
Segundo término:	$a_1 r$	
Tercer término:	$a_1 r^2$	$(a_1 r)(r) = a_1 r^2$
Cuarto término:	$a_1 r^3$	
.		
.		
.		
n-ésimo término:	$a_1 r^{n-1}$	

Por tanto, el **término general** de una secuencia geométrica está dado por

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término y r es la razón común.

EJEMPLO 1 Encuentre el término general para la secuencia geométrica 8, 16, 32, 64, ...

Solución

La razón común (r) es $\frac{16}{8} = 2$ y el primer término (a_1) es 8. Sustituya estos valores en $a_n = a_1 r^{n-1}$y simplifique para obtener

$$a_n = 8(2)^{n-1} = (2^3)(2)^{n-1} = 2^{n+2}$$

■

EJEMPLO 2 Encuentre el noveno término de la secuencia geométrica 27, 9, 3, 1, ...

Solución

La razón común (r) es $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$, y el primer término ($a_1$) es 27. Usando $a_n = a_1 r^{n-1}$, se obtiene

$$a_9 = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{9-1} = 27\left(\frac{1}{3}\right)^8$$
$$= \frac{3^3}{3^8}$$
$$= \frac{1}{3^5}$$
$$= \frac{1}{243}$$

■

Sumas de secuencias geométricas

Al igual que en las secuencias aritméticas, con frecuencia es necesario encontrar la suma de cierto número de términos de una secuencia geométrica. Antes de desarrollar una fórmula de suma general para las secuencias geométricas, considere un método a un problema específico que entonces se puede usar en un escenario general.

EJEMPLO 3

Encuentre la suma de $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 6561$.

Solución

Sea S la suma y proceda del modo siguiente:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 6561 \quad (1)$$

$$3S = \quad 3 + 9 + 27 + \cdots + 6561 + 19\,683 \quad (2)$$

La ecuación (2) es el resultado de multiplicar la ecuación (1) por la razón común 3. Al restar la ecuación (1) de la ecuación (2) se produce

$$2S = 19\,683 - 1 = 19\,682$$

$$S = 9841$$

Ahora considere una secuencia geométrica general $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$. Al aplicar un procedimiento similar al utilizado en el ejemplo 3, puede desarrollar una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de cualquier secuencia geométrica. Sea S_n la suma de los primeros n términos

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} \quad (3)$$

A continuación, multiplique ambos lados de la ecuación (3) por la razón común r.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^n \quad (4)$$

Luego reste la ecuación (3) de la ecuación (4).

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

Cuando aplica la propiedad distributiva al lado izquierdo y luego resuelve para S_n, obtiene

$$S_n(r - 1) = a_1r^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1r^n - a_1}{r - 1}, \qquad r \neq 1$$

Por tanto, la suma de los primeros n términos de una secuencia geométrica con un primer término a_1 y razón común r está dada por

$$S_n = \frac{a_1r^n - a_1}{r - 1}, \qquad r \neq 1$$

EJEMPLO 4

Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la secuencia geométrica 1, 2, 4, 8, . . .

Solución

Para usar la fórmula de suma $S_n = \frac{a_1r^n - a_1}{r - 1}$ necesita conocer el número de términos (n), el primer término (a_1) y la razón común (r). Se proporciona el número de términos y el primer término, y puede determinar que $r = \frac{2}{1} = 2$. Al utilizar la fórmula de suma se obtiene

$$S_8 = \frac{1(2)^8 - 1}{2 - 1} = \frac{2^8 - 1}{1} = 255$$ ■

Si la razón común de una secuencia geométrica es menos que 1, puede ser más conveniente cambiar la forma de la fórmula de suma. Esto es, la fracción

$$\frac{a_1r^n - a_1}{r - 1}$$

se puede cambiar a

$$\frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$$

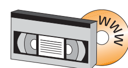
al multiplicar tanto numerador como denominador por −1. Por tanto, al usar

$$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$$

en ocasiones puede evitar trabajo innecesario con números negativos cuando $r < 1$, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Encuentre la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{256}$



Solución A

Para usar la fórmula de suma, necesita conocer el número de términos, que encuentra al contarlos o al aplicar la fórmula del n-ésimo término, del modo siguiente:

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

$$\frac{1}{256} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$8 = n - 1 \qquad \text{Si } b^n = b^m \text{, entonces } n = m.$$

$$9 = n$$

Ahora use $n = 9$, $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$ en la fórmula de suma de la forma

$$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$$

$$S_9 = \frac{1 - 1\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = 1\frac{255}{256}$$

■

También se puede resolver un problema como el del ejemplo 5 sin encontrar el número de términos; se usa el método general que se ilustra en el ejemplo 3. La solución B demuestra esta idea.

Solución B

Sea S la suma deseada.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{256}$$

Multiplique ambos lados por la razón común $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}$$

Reste la segunda ecuación de la primera y resuelva para S.

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$$

$$S = \frac{511}{256} = 1\frac{255}{256}$$

■

La notación sumatoria también se puede usar para indicar la suma de cierto número de términos de una secuencia geométrica.

EJEMPLO 6

Encuentre la suma $\sum_{i=1}^{10} 2^i$

Solución

Esta suma indicada significa

$$\sum_{i=1}^{10} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$$
$$= 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$$

■

Ésta es la suma indicada de una secuencia geométrica, así que puede utilizar la fórmula de suma con $a_1 = 2$, $r = 2$ y $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{2(2)^{10} - 2}{2 - 1} = \frac{2(2^{10} - 1)}{1} = 2046$$

■

La suma de una secuencia geométrica infinita

Tome la fórmula

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

y reescriba el lado derecho al aplicar la propiedad

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Por tanto, se obtiene

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

Ahora examine el comportamiento de r^n para $|r| < 1$; esto es, para $-1 < r < 1$. Por ejemplo, suponga que $r = \frac{1}{2}$. Entonces

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad r^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$r^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad r^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

etcétera. Puede hacer $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tan cercano a cero como quiera al elegir valores suficientemente grandes de n. En general, para valores de r tales que $|r| < 1$, la expresión r^n tiende a cero conforme n se hace cada vez más grande. Por tanto, la fracción $a_1 r^n/(1 - r)$ en la ecuación (1) tiende a cero conforme n aumenta. Se dice que la **suma de la secuencia geométrica infinita** está dada por

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}, \qquad |r| < 1$$

EJEMPLO 7

Encuentre la suma de la secuencia geométrica infinita

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Solución

Puesto que $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$ se obtiene

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

■

Cuando se afirma que $S_\infty = 2$ en el ejemplo 7, significa que, conforme se suman más y más términos, la suma tiende a 2. Observe lo que ocurre cuando se calcula la suma hasta cinco términos.

Primer término:	1
Suma de los primeros dos términos:	$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
Suma de los primeros tres términos:	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$
Suma de los primeros cuatro términos:	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$
Suma de los primeros cinco términos:	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16}$

Si $|r| > 1$, el valor absoluto de r^n aumenta sin cota conforme n aumenta. En la siguiente tabla observe el crecimiento sin cota del valor absoluto de r^n.

Sea $r = 3$	Sea $r = -2$	
$r^2 = 3^2 = 9$	$r^2 = (-2)^2 = 4$	
$r^3 = 3^3 = 27$	$r^3 = (-2)^3 = -8$	$\lvert -8 \rvert = 8$
$r^4 = 3^4 = 81$	$r^4 = (-2)^4 = 16$	
$r^5 = 3^5 = 243$	$r^5 = (-2)^5 = -32$	$\lvert -32 \rvert = 32$

Si $r = 1$, entonces $S_n = na_1$, y conforme n aumenta sin cota, $|S_n|$ también aumenta sin cota. Si $r = -1$, entonces S_n será a_1 o 0. Por tanto, se dice que la suma de cualquier secuencia geométrica infinita donde $|r| \geq 1$ *no existe*.

Decimales repetitivos como sumas de secuencias geométricas infinitas

En la sección 1.1 los números racionales se definieron como los números que tienen una terminación o una representación decimal repetitiva. Por ejemplo,

$$2.23 \qquad 0.147 \qquad 0.\overline{3} \qquad 0.\overline{14} \qquad \text{y} \qquad 0.5\overline{6}$$

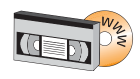
son números racionales. (Recuerde que $0.\overline{3}$ significa 0.3333 . . . .) El valor posicional proporciona la base para cambiar los decimales terminales como 2.23 y 0.147 a la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

$$2.23 = \frac{223}{100} \qquad \text{y} \qquad 0.147 = \frac{147}{1000}$$

Sin embargo, cambiar decimales repetitivos a la forma a/b requiere una técnica diferente, y el trabajo con sumas de secuencias geométricas infinitas proporciona la base para tal método. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8

Cambie $0.\overline{14}$ a la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.



Solución

El decimal repetitivo $0.\overline{14}$ se puede escribir como la suma indicada de una secuencia geométrica infinita con primer término 0.14 y razón común 0.01.

$$0.14 + 0.0014 + 0.000014 + \cdots$$

Al usar $S_\infty = a_1/(1 - r)$ se obtiene

$$S_\infty = \frac{0.14}{1 - 0.01} = \frac{0.14}{0.99} = \frac{14}{99}$$

Por tanto, $0.\overline{14} = \dfrac{14}{99}$ ■

Si el bloque de dígitos repetitivos no comienza inmediatamente después del punto decimal, como en $0.5\overline{6}$, puede hacer un ajuste en la técnica utilizada en el ejemplo 8.

EJEMPLO 9

Cambie $0.5\overline{6}$ a la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Solución

El decimal repetitivo $0.5\overline{6}$ se puede escribir

$$(0.5) + (0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots)$$

donde

$$0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

es la suma indicada de la secuencia geométrica infinita con $a_1 = 0.06$ y $r = 0.1$. Por tanto

$$S_\infty = \frac{0.06}{1 - 0.1} = \frac{0.06}{0.9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

Ahora puede sumar 0.5 y $\dfrac{1}{15}$.

$$0.5\overline{6} = 0.5 + \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{15}{30} + \frac{2}{30} = \frac{17}{30}$$ ■

Conjunto de problemas 14.2

Para los problemas 1-12 encuentre el término general (el término n-ésimo) para cada secuencia geométrica.

1. $3, 6, 12, 24, \ldots$

2. $2, 6, 18, 54, \ldots$

3. $3, 9, 27, 81, \ldots$

4. $2, 6, 18, 54, \ldots$

5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

6. $8, 4, 2, 1, \ldots$

7. $4, 16, 64, 256, \ldots$

8. $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

9. $1, 0.3, 0.09, 0.027, \ldots$

10. $0.2, 0.04, 0.008, 0.0016, \ldots$

11. $1, -2, 4, -8, \ldots$

12. $-3, 9, -27, 81, \ldots$

Para los problemas 13-20 encuentre el término requerido para cada secuencia geométrica.

13. El 8o. término de $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$

14. El 7o. término de $2, 6, 18, 54, \ldots$

15. El 9o. término de $729, 243, 81, 27, \ldots$

16. El 11o. término de $768, 384, 192, 96, \ldots$

17. El 10o. término de $1, -2, 4, -8, \ldots$

18. El 8o. término de $-1, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$

19. El 8o. término de $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots$

20. El 9o. término de $\frac{16}{81}, \frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \ldots$

Para los problemas 21-32 resuelva cada uno de ellos.

21. Encuentre el primer término de la secuencia geométrica con el 5o. término $\frac{32}{3}$ y razón común 2.

22. Encuentre el primer término de la secuencia geométrica con el 4o. término $\frac{27}{128}$ y razón común $\frac{3}{4}$.

23. Encuentre la razón común de la secuencia geométrica con el 3er. término 12 y el 6o. término 96.

24. Encuentre la razón común de la secuencia geométrica con el 2o. término $\frac{8}{3}$ y el 5o. término $\frac{64}{81}$.

25. Encuentre la suma de los primeros diez términos de la secuencia geométrica $1, 2, 4, 8, \ldots$.

26. Encuentre la suma de los primeros siete términos de la secuencia geométrica $3, 9, 27, 81, \ldots$.

27. Encuentre la suma de los primeros nueve términos de la secuencia geométrica $2, 6, 18, 54, \ldots$.

28. Encuentre la suma de los primeros diez términos de la secuencia geométrica $5, 10, 20, 40, \ldots$.

29. Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la secuencia geométrica $8, 12, 18, 27, \ldots$.

30. Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la secuencia geométrica $9, 12, 16, \frac{64}{3}, \ldots$.

31. Encuentre la suma de los primeros diez términos de la secuencia geométrica $-4, 8, -16, 32, \ldots$.

32. Encuentre la suma de los primeros nueve términos de la secuencia geométrica $-2, 6, -18, 54, \ldots$.

Para los problemas 33-38 encuentre cada suma indicada.

33. $9 + 27 + 81 + \cdots + 729$

34. $2 + 8 + 32 + \cdots + 8192$

35. $4 + 2 + 1 + \cdots + \frac{1}{512}$

36. $1 + (-2) + 4 + \cdots + 256$

37. $(-1) + 3 + (-9) + \cdots + (-729)$

38. $16 + 8 + 4 + \cdots + \frac{1}{32}$

Para los problemas 39-44 encuentre cada suma indicada.

39. $\sum_{i=1}^{9} 2^{i-3}$

40. $\sum_{i=1}^{6} 3^{i}$

41. $\sum_{i=2}^{5} (-3)^{i+1}$

42. $\sum_{i=3}^{8} (-2)^{i-1}$

43. $\sum_{i=1}^{6} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$

44. $\sum_{i=1}^{5} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}$

Para los problemas 45-56 encuentre la suma de cada secuencia geométrica infinita. Si la secuencia no tiene suma, enúncielo así.

45. $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

46. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$

47. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

48. $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \ldots$

49. $4, 8, 16, 32, \ldots$

50. $32, 16, 8, 4, \ldots$

51. $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

52. $2, -6, 18, -54, \ldots$

53. $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}, \frac{27}{128}, \ldots$

54. $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$

55. $8, -4, 2, -1, \ldots$

56. $7, \frac{14}{5}, \frac{28}{25}, \frac{56}{125}, \ldots$

Para los problemas 57-68 cambie cada decimal repetitivo a la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Exprese a/b en la forma reducida.

57. $0.\overline{3}$

58. $0.\overline{4}$

59. $0.\overline{26}$

60. $0.\overline{18}$

61. $0.\overline{123}$

62. $0.\overline{273}$

63. $0.2\overline{6}$

64. $0.4\overline{3}$

65. $0.\overline{214}$

66. $0.3\overline{71}$

67. $2.\overline{3}$

68. $3.\overline{7}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

69. Explique la diferencia entre una secuencia aritmética y una secuencia geométrica.

70. ¿Qué significa decir que la suma de la secuencia geométrica infinita $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es 2?

71. ¿Qué significa decir que la secuencia geométrica infinita 1, 2, 4, 8, . . . no tiene suma?

72. ¿Por qué no se analiza la suma de una secuencia aritmética infinita?

14.3 Otro vistazo a la resolución de problemas

En las dos secciones previas muchos de los ejercicios cayeron en una de las siguientes cuatro categorías:

1. Encontrar el n-ésimo término de una secuencia aritmética.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

2. Encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

3. Encontrar el n-ésimo término de una secuencia geométrica.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

4. Encontrar la suma de los primeros n términos de una secuencia geométrica.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$$

En esta sección se quiere usar este conocimiento de las secuencias aritméticas y las secuencias geométricas para ampliar sus habilidades de resolución de problemas. Se comienza por replantear algunas de las anteriores sugerencias de resolución de problemas que continúan aplicándose aquí; también se considerarán algunas otras sugerencias que se relacionan directamente con problemas que involucran secuencias de números. (Las nuevas sugerencias se indicarán con un asterisco.)

Sugerencias para resolución de problemas verbales

1. Lea cuidadosamente el problema y asegúrese de que entiende los significados de todas las palabras. Tenga especial cuidado con cualquier término técnico utilizado en el enunciado del problema.

2. Lea el problema una segunda vez (acaso incluso una tercera) para obtener un panorama de la situación que se describe y determinar los hechos conocidos, así como lo que debe encontrar.

3. Bosqueje una figura, diagrama o tabla que pueda ayudarle a analizar el problema.

***4.** Escriba los primeros términos de la secuencia para describir lo que tiene lugar en el problema. Asegúrese de entender, término a término, lo que representa la secuencia en el problema.

***5.** Determine si la secuencia es aritmética o geométrica.

***6.** Determine si el problema pide un término específico de la secuencia o la suma de cierto número de términos.

7. Realice los cálculos necesarios y compruebe su respuesta para ver si es razonable.

Conforme resuelva problemas, estas sugerencias se volverán más significativas.

PROBLEMA 1

Domenica comenzó a trabajar en 1990, con un salario anual de $22 500. Ella recibió un aumento de $1200 cada año. ¿Cuál fue su salario anual en 1999?

Solución

La siguiente secuencia representa su salario anual comenzando en 1990:

$$22\,500, \quad 23\,700, \quad 24\,900, \quad 26\,100, \quad \ldots$$

Es una secuencia aritmética con $a_1 = 22\,500$ y $d = 1200$. Su salario en 1990 es el 1er. término de la secuencia y su salario en 1999 es el 10o. término de la secuencia. De modo que, usando $a_n = a_1 + (n - 1)d$ se obtiene el 10o. término de la secuencia aritmética.

$$a_{10} = 22\,500 + (10 - 1)1200 = 22\,500 + 9(1200) = 33\,300$$

Su salario anual en 1999 fue de $33 300. ■

PROBLEMA 2

Un auditorio tiene 20 asientos en la primera fila, 24 asientos en la segunda, 28 asientos en la tercera, etc. a lo largo de 15 filas. ¿Cuántos asientos hay en el auditorio?

Solución

La siguiente secuencia representa el número de asientos por fila, comenzando con la primera fila:

$$20, 24, 28, 32, \ldots$$

Es una secuencia aritmética con $a_1 = 20$ y $d = 4$. Por tanto, el 15o. término, que representa el número de asientos en la 15a. fila, está dado por

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)4 = 20 + 14(4) = 76$$

El número total de asientos en el auditorio se representa mediante

$$20 + 24 + 28 + \cdots + 76$$

Use la fórmula de suma para una secuencia aritmética y obtener

$$S_{15} = \frac{15}{2}(20 + 76) = 720$$

Existen 720 asientos en el auditorio. ■

PROBLEMA 3

Suponga que usted ahorra 25 centavos el primer día de una semana, 50 centavos el segundo día, y un dólar el tercer día, y que continúa duplicando sus ahorros cada día. ¿Cuánto ahorrará en el séptimo día? ¿Cuáles serán sus ahorros totales por la semana?

Solución

La siguiente secuencia representa sus ahorros por día, expresados en centavos:

$$25, 50, 100, \ldots$$

Es una secuencia geométrica con $a_1 = 25$ y $r = 2$. Sus ahorros en el séptimo día es el séptimo término de esta secuencia. Por tanto, al usar $a_n = a_1 r^{n-1}$, obtiene

$$a_7 = 25(2)^6 = 1600$$

Usted ahorrará \$16 en el séptimo día. Sus ahorros totales por los siete días están dados por

$$25 + 50 + 100 + \cdots + 1600$$

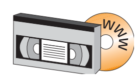
Use la fórmula de suma para una secuencia geométrica y obtener

$$S_7 = \frac{25(2)^7 - 25}{2 - 1} = \frac{25(2^7 - 1)}{1} = 3175$$

Por tanto, sus ahorros por toda la semana son de \$31.75. ■

PROBLEMA 4

Una bomba se conecta a un contenedor con el propósito de crear un vacío. Por cada golpe de la bomba, se remueve $\frac{1}{4}$ del aire que permanece en el contenedor. A la décima porcentual más cercana, ¿cuánto del aire permanece en el contenedor después de seis golpes?



Solución

Dibuje una tabla para auxiliarse con el análisis de este problema.

Primer golpe:	$\frac{1}{4}$ del aire se remueve	$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del aire permanece
Segundo golpe:	$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$ del aire se remueven	$\frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$ del aire permanece
Tercer golpe:	$\frac{1}{4}\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{9}{64}$ del aire se remueven	$\frac{9}{16} - \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$ del aire permanece

El diagrama sugiere dos métodos al problema.

Método A La secuencia $\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \ldots$ representa, término a término, la cantidad fraccionaria de aire que se remueve con cada golpe sucesivo. Por tanto, puede encontrar la cantidad total removida y restarla de 100%. La secuencia es geométrica con $a_1 = \frac{1}{4}$ y $r = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{1} = \frac{3}{4}$. Al usar la fórmula de suma $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ se obtiene

$$S_6 = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^6}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6\right]}{\frac{1}{4}}$$

$$= 1 - \frac{729}{4096} = \frac{3367}{4096} = 82.2\%$$

Por tanto, $100\% - 82.2\% = 17.8\%$ del aire permanece después de seis golpes. ■

Método B La secuencia

$$\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \ldots$$

representa, término a término, la cantidad de aire en el contenedor después de cada golpe. Por tanto, al hallar el sexto término de esta secuencia geométrica, tendrá la

respuesta al problema. Puesto que $a_1 = \frac{3}{4}$ y $r = \frac{3}{4}$, se obtiene

$$a_6 = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096} = 17.8\%$$

En consecuencia, 17.8% del aire permanece después de seis golpes. ■

Le será de utilidad echar otro vistazo a los dos métodos que se usaron para resolver el problema 4. Note que, en el método B, encontrar el sexto término de la secuencia produjo la respuesta al problema sin algún otro cálculo. En el método A tuvo que encontrar la suma de seis términos de la secuencia y luego restar dicha cantidad de 100%. Conforme resuelva problemas que implican secuencias, debe entender que cada secuencia particular representa una base término por término.

Conjunto de problemas 14.3

Use su conocimiento de las secuencias aritméticas y las secuencias geométricas para resolver los problemas 1-28.

1. Un hombre comenzó a trabajar en 1980 con un salario anual de \$9500. Cada año recibió un aumento de \$700. ¿Cuánto fue su salario anual en 2001?

2. Una mujer comenzó a trabajar en 1985 con un salario anual de \$13 400. Cada año recibió un aumento de \$900. ¿Cuánto fue su salario anual en 2000?

3. State University tenía una matrícula de 9600 estudiantes en 1992. Cada año la matriculación aumentó en 150 estudiantes. ¿Cuál fue la matriculación en 2005?

4. Math University tenía una matrícula de 12 800 estudiantes en 1998. Cada año la matriculación disminuyó en 75 estudiantes. ¿Cuál fue su matrícula en 2005?

5. La matriculación en la Universidad X se predice aumentará a la tasa de 10% anual. Si la matriculación durante 2001 fue de 5000 estudiantes, encuentre la matriculación predicha para 2005. Exprese su respuesta al número entero positivo más cercano.

6. Si usted paga \$12 000 por un automóvil y éste se deprecia 20% por año, ¿cuánto valdrá en 5 años? Exprese su respuesta al dólar más cercano.

7. Un tanque contiene 16 000 litros de agua. Cada día se usa la mitad del agua en el tanque y no se sustituye. ¿Cuánta agua queda en el tanque al final de 7 días?

8. Si el precio de una libra de café es \$3.20 y la tasa de inflación proyectada es 5% anual, ¿cuánto espera que cueste la libra de café en 5 años? Exprese su respuesta al centavo más cercano.

9. Un tanque contiene 5832 galones de agua. Cada día se usa un tercio del agua del tanque y no se sustituye. ¿Cuánta agua queda en el tanque al final de 6 días?

10. Un cultivo de hongos crece bajo condiciones controladas al doble de su tamaño cada día. ¿Cuántas unidades contendrá el cultivo después de 7 días, si originalmente contenía 4 unidades?

11. Sue ahorra monedas de 25 centavos. Ella ahorra una moneda el primer día, dos monedas el segundo día, 3 monedas el tercer día y así durante 30 días. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado?

12. Suponga que usted ahorra un centavo el primer día de un mes, 2 centavos el segundo día, 3 centavos el tercer día y así durante 31 días. ¿Cuánto suman sus ahorros?

13. Suponga que usted ahorra un centavo el primer día de un mes, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día y continúa duplicando sus ahorros cada día. ¿Cuánto ahorrará en el 15o. día del mes? ¿Cuáles serán sus ahorros totales por los 15 días?

14. Eric ahorró una moneda de cinco centavos el primer día de un mes, una moneda de diez centavos el segundo día y 20 centavos el tercer día y luego continuó duplicando sus ahorros diarios cada día durante 14 días. ¿Cuáles fueron sus ahorros diarios al día 14? ¿Cuáles fueron sus ahorros para los 14 días?

15. Bryan invirtió $1500 a 12% de interés simple al comienzo de cada año por un periodo de 10 años. Encuentre el valor total acumulado de todas las inversiones al final del periodo.

16. El señor Woodley invirtió $1200 a 11% de interés simple al comienzo de cada año por un periodo de 8 años. Encuentre el valor total acumulado de todas las inversiones al final del periodo.

17. Un objeto que cae desde el reposo en un vacío cae aproximadamente 16 pies el primer segundo, 48 pies el segundo segundo, 80 pies el tercer segundo, 112 pies el cuarto segundo, etc. ¿Cuánto caerá en 11 segundos?

18. Una rifa se organiza de modo que la cantidad pagada por cada boleto se determina por el número en el boleto. Los boletos se numeran con los números naturales impares consecutivos 1, 3, 5, 7, ... Cada concursante paga tantos centavos como indica el número del boleto. ¿Cuánto dinero tendrá la rifa si se venden 1000 boletos?

19. Suponga que un elemento tiene una vida media de 4 horas. Esto significa que, si n gramos del elemento existen en un momento específico, entonces 4 horas después sólo permanecerán $\frac{1}{2}n$ gramos. Si en un momento particular se tienen 60 gramos del elemento, ¿cuántos gramos del elemento permanecerán 24 horas después?

20. Suponga que un elemento tiene una vida media de 3 horas. (Vea el problema 19 para una definición de vida media.) Si en un momento particular se tienen 768 gramos del elemento, ¿cuántos gramos del elemento permanecerán 24 horas después?

21. Una bola de caucho se suelta desde una altura de 1458 pies y al caer cada vez rebota un tercio de la altura desde la que cayó la última vez. ¿Cuánto ha recorrido la bola cuando golpea el suelo por sexta ocasión?

22. Una bola de caucho se suelta desde una altura de 100 pies y en cada rebote alcanza la mitad de la altura desde la que cayó la última vez. ¿Qué distancia recorre la bola en el instante que golpea el suelo por octava ocasión?

23. Una pila de leños tiene 25 leños en la primera cama, 24 leños en la siguiente cama, 23 leños en la siguiente, etc., hasta la cama superior que tiene un leño. ¿Cuántos leños hay en la pila?

24. Un excavador de pozos cobra $9.00 por pie los primeros 10 pies, $9.10 por pie los siguientes 10 pies, $9.20 por pie los siguientes 10 pies y así sucesivamente, con un aumento de precio de $0.10 por pie cada intervalo sucesivo de 10 pies. ¿Cuánto cuesta excavar un pozo a una profundidad de 150 pies?

25. Una bomba se conecta a un contenedor con el propósito de crear un vacío. Por cada golpe de la bomba se quita un tercio del aire que permanece en el contenedor. A la décima porcentual más cercana, ¿cuánto del aire permanece en el contenedor después de siete golpes?

26. Suponga que, en el problema 25, cada golpe de la bomba quita la mitad del aire que permanece en el contenedor. ¿Qué parte fraccionaria del aire se quitó después de seis golpes?

27. Un tanque contiene 20 galones de agua. La mitad del agua se quita y sustituye con anticongelante. Luego la mitad de esta mezcla se remueve y sustituye con anticongelante. Este proceso se realiza ocho veces. ¿Cuánta agua permanece en el tanque después del octavo proceso de sustitución?

28. El radiador de un camión contiene 10 galones de agua. Suponga que se quita 1 galón de agua y se le sustituye con anticongelante. Luego se quita 1 galón de esta mezcla y se sustituye con anticongelante. Este proceso se lleva a cabo siete veces. A la décima de galón más cercana, ¿cuánto anticongelante hay en la mezcla final?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

29. Su amigo resuelve el problema 6 del modo siguiente: si el automóvil se deprecia a 20% por año, entonces al final de 5 años se habrá depreciado 100% y valdrá cero dólares. ¿Cómo lo convencería de que su razonamiento es incorrecto?

30. Un contratista quiere limpiar cierto terreno para un proyecto de vivienda. Él anticipa que tardará 20 días en hacer el trabajo. Ofrece pagarle en una de dos formas: (1) una cantidad fija de $3000 o (2) un centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, etc., duplicando su salario diario cada día durante 20 días. ¿Qué ofrecimiento aceptaría y por qué?

14.4 Inducción matemática

¿Es $2^n > n$ para todos los valores enteros positivos de n? Con la intención de responder esta pregunta puede proceder del modo siguiente:

Si $n = 1$, entonces $2^n > n$ se convierte en $2^1 > 1$, un enunciado verdadero.
Si $n = 2$, entonces $2^n > n$ se convierte en $2^2 > 2$, un enunciado verdadero.
Si $n = 3$, entonces $2^n > n$ se convierte en $2^3 > 3$, un enunciado verdadero.

Puede continuar de esta forma tanto como quiera, pero obviamente nunca podrá demostrar de esta forma que $2^n > n$ para *todo* entero positivo n. Sin embargo, sí hay una forma de probarlo, llamada **prueba de inducción matemática**, que se puede usar para verificar la certeza de muchos enunciados matemáticos que implican enteros positivos. Esta forma de prueba se basa en el siguiente principio.

Principio de inducción matemática

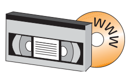
Sea P_n un enunciado en términos de n, donde n es un entero positivo. Si

1. P_1 es verdadero, y
2. la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1} para todo entero positivo k, entonces P_n es verdadero para todo entero positivo n.

El principio de inducción matemática, una prueba de que algún enunciado es verdadero para todos los enteros positivos, consiste de dos partes. Primero, debe demostrar que el enunciado es verdadero para el entero positivo 1. Segundo, debe demostrar que, si el enunciado es verdadero para algún entero positivo, entonces se sigue que también es verdadero para el siguiente entero positivo. A continuación se ilustra lo que esto significa.

EJEMPLO 1

Pruebe que $2^n > n$ para todo valor entero positivo de n.



Prueba

Parte 1 Si $n = 1$, entonces $2^n > n$ se convierte en $2^1 > 1$, que es un enunciado verdadero.

Parte 2 Debe probar que, si $2^k > k$, entonces $2^{k+1} > k + 1$ para todo valor entero positivo de k. En otras palabras, debe comenzar con $2^k > k$ y a partir de ahí deducir $2^{k+1} > k + 1$. Esto se puede hacer del modo siguiente:

$$2^k > k$$

$$2(2^k) > 2(k) \qquad \text{Multiplique ambos lados por 2.}$$

$$2^{k+1} > 2k$$

Se sabe que $k \geq 1$ puesto que se trabaja con enteros positivos. Por tanto

$$k + k \geq k + 1 \qquad \text{Sume } k \text{ a ambos lados.}$$
$$2k \geq k + 1$$

Puesto que $2^{k+1} > 2k$ y $2k \geq k + 1$, por la propiedad transitiva se concluye que

$$2^{k+1} > k + 1$$

En consecuencia, al usar las partes 1 y 2 se probó que $2^n > n$ para *todo* entero positivo. ■

Será útil que revise de nuevo la prueba del ejemplo 1. Note que en la parte 1 se estableció que $2^n > n$ es verdadero para $n = 1$. Luego, en la parte 2, se estableció que, si $2^n > n$ es verdadero para cualquier entero positivo, entonces debe ser verdadero para el siguiente entero positivo consecutivo. Por tanto, puesto que $2^n > n$ es verdadero para $n = 1$, debe ser verdadero para $n = 2$. Del mismo modo, si $2^n > n$ es verdadero para $n = 2$, entonces debe ser verdadero para $n = 3$, etc., para *todo* entero positivo.

La prueba de la inducción matemática se puede representar con fichas de dominó. Suponga que, en la figura 14.1, se tienen infinitas fichas de dominó alineadas. Si puede empujar la primera ficha (parte 1 de una prueba de inducción matemática) y si las fichas están espaciadas de modo que cada vez que una cae hace que la siguiente también caiga (parte 2 de una prueba de inducción matemática), entonces empujar la primera causará una reacción en cadena que derrumbará todas las fichas (figura 14.2).

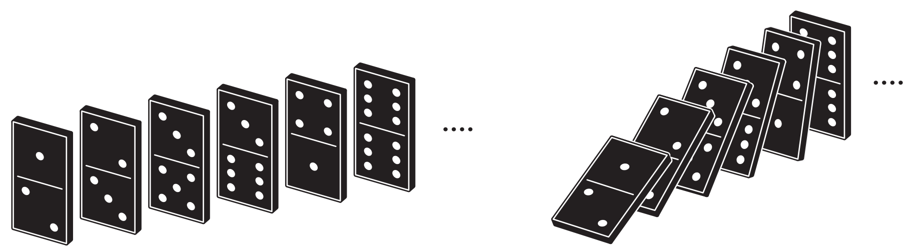


Figura 14.1 **Figura 14.2**

Recuerde que, en las primeras tres secciones de este capítulo, se usó a_n para representar el n-ésimo término de una secuencia y S_n para representar la suma de los primeros n términos de una secuencia. Por ejemplo, si $a_n = 2n$, entonces los primeros tres términos de la secuencia son $a_1 = 2(1) = 2$, $a_2 = 2(2) = 4$ y $a_3 = 2(3) = 6$. Más aún, el k-ésimo término es $a_k = 2(k) = 2k$, y el $(k + 1)$ término es $a_{k+1} = 2(k + 1) = 2k + 2$. En relación con esta misma secuencia, puede afirmarse que $S_1 = 2$, $S_2 = 2 + 4 = 6$ y $S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$.

Existen numerosas fórmulas de suma para secuencias que se pueden verificar mediante inducción matemática. Para tales pruebas se usa la siguiente propiedad de secuencias:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

Esta propiedad afirma que **la suma de los primeros $k + 1$ términos es igual a la suma de los primeros k términos más el término $(k + 1)$**. Vea cómo se puede usar esto en un ejemplo específico.

EJEMPLO 2

Pruebe que $S_n = n(n + 1)$ para la secuencia $a_n = 2n$, donde n es cualquier entero positivo.

Prueba

Parte 1 Si $n = 1$, entonces $S_1 = 1(1 + 1) = 2$ y 2 es el primer término de la secuencia $a_n = 2n$, de modo que $S_1 = a_1 = 2$.

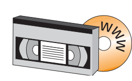
Parte 2 Ahora necesita probar que, si $S_k = k(k + 1)$, entonces $S_{k+1} = (k + 1)(k + 2)$. Al usar la propiedad $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ puede proceder del modo siguiente:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Por tanto, al usar las partes 1 y 2, se probó que $S_n = n(n + 1)$ producirá la suma correcta para cualquier número de términos de la secuencia $a_n = 2n$. ■

EJEMPLO 3

Pruebe que $S_n = 5n(n + 1)/2$ para la secuencia $a_n = 5n$, donde n es cualquier entero positivo.



Prueba

Parte 1 Puesto que $S_1 = 5(1)(1 + 1)/2 = 5$, y 5 es el primer término de la secuencia $a_n = 5n$, se tiene $S_1 = a_1 = 5$.

Parte 2 Es necesario probar que, si $S_k = 5k(k + 1)/2$, entonces $S_{k+1} = \dfrac{5(k + 1)(k + 2)}{2}$.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\ &= \frac{5k(k + 1)}{2} + 5(k + 1) \\ &= \frac{5k(k + 1)}{2} + 5k + 5 \\ &= \frac{5k(k + 1) + 2(5k + 5)}{2} \\ &= \frac{5k^2 + 5k + 10k + 10}{2} \\ &= \frac{5k^2 + 15k + 10}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{5(k^2 + 3k + 2)}{2}$$
$$= \frac{5(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Por tanto, al usar las partes 1 y 2, se probó que $S_n = 5n(n + 1)/2$ produce la suma correcta para cualquier número de términos de la secuencia $a_n = 5n$. ■

EJEMPLO 4

Pruebe que $S_n = (4^n - 1)/3$ para la secuencia $a_n = 4^{n-1}$, donde n es cualquier entero positivo.

Prueba

Parte 1 Puesto que $S_1 = (4^1 - 1)/3 = 1$, y 1 es el primer término de la secuencia $a_n = 4^{n-1}$, se tiene $S_1 = a_1 = 1$.

Parte 2 Es necesario probar que, si $S_k = (4^k - 1)/3$, entonces $S_{k+1} = (4^{k+1} - 1)/3$.

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$
$$= \frac{4^k - 1}{3} + 4^k$$
$$= \frac{4^k - 1 + 3(4^k)}{3}$$
$$= \frac{4^k + 3(4^k) - 1}{3}$$
$$= \frac{4^k(1 + 3) - 1}{3}$$
$$= \frac{4^k(4) - 1}{3}$$
$$= \frac{4^{k+1} - 1}{3}$$

Por tanto, al usar las partes 1 y 2, se probó que $S_n = (4^n - 1)/3$ produce la suma correcta para cualquier número de términos de la secuencia $a_n = 4^{n-1}$. ■

Como ejemplo final de esta sección considere una prueba mediante inducción matemática que implica el concepto de divisibilidad.

EJEMPLO 5

Pruebe que para todos los enteros positivos n, el número $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8.

Prueba

Parte 1 Si $n = 1$, entonces $3^{2n} - 1$ se convierte en $3^{2(1)} - 1 = 3^2 - 1 = 8$, y desde luego 8 es divisible entre 8.

Parte 2 Necesita probar que, si $3^{2k} - 1$ es divisible entre 8, entonces $3^{2k+2} - 1$ es divisible entre 8 para todo valor entero de k. Esto se puede verificar del modo siguiente. Si $3^{2k} - 1$ es divisible entre 8, entonces para algún entero x, se tiene $3^{2k} - 1 = 8x$. Por tanto

$$3^{2k} - 1 = 8x$$

$$3^{2k} = 1 + 8x$$

$$3^2(3^{2k}) = 3^2(1 + 8x) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } 3^2$$

$$3^{2k+2} = 9(1 + 8x)$$

$$3^{2k+2} = 9 + 9(8x)$$

$$3^{2k+2} = 1 + 8 + 9(8x) \qquad 9 = 1 + 8$$

$$3^{2k+2} = 1 + 8(1 + 9x) \qquad \text{Aplique propiedad distributiva a } 8 + 9(8x).$$

$$3^{2k+2} - 1 = 8(1 + 9x)$$

Por tanto, $3^{2k+2} - 1$ es divisible entre 8.

En consecuencia, al usar las partes 1 y 2, se probó que $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para todo entero positivo n. ■

Esta sección concluye con algunos comentarios finales acerca de la prueba por inducción matemática. Toda prueba de inducción matemática es una prueba de dos partes y ambas partes son absolutamente necesarias. Puede haber enunciados matemáticos que apliquen para una o la otra de las partes, mas no para ambas. Por ejemplo, $(a + b)^n = a^n + b^n$ es verdadera para $n = 1$, pero es falsa para todo entero positivo mayor que 1. Por tanto, si intentara una prueba de inducción matemática para $(a + b)^n = a^n + b^n$, podría establecer la parte 1 mas no la parte 2. Otro ejemplo de este tipo es el enunciado de que $n^2 - n + 41$ produce un número primo para todo valor entero positivo de n. Este enunciado es verdadero para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 40$, pero es falso cuando $n = 41$ (porque $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que no es un número primo).

También es posible que la parte 2 de una prueba de inducción matemática pueda establecerse, mas no la parte 1. Por ejemplo, considere la secuencia $a_n = n$ y la fórmula de suma $S_n = (n + 3)(n - 2)/2$. Si $n = 1$, entonces $a_1 = 1$, mas $S_1 = (4)(-1)/2 = -2$, de modo que la parte 1 no aplica. Sin embargo, es posible demostrar que $S_k = (k + 3)(k - 2)/2$ implica $S_{k+1} = (k + 4)(k - 1)/2$. Los detalles se dejarán para que usted los resuelva.

Finalmente, es importante darse cuenta de que algunos enunciados matemáticos son verdaderos para todos los enteros positivos mayores que algunos enteros positivos fijos distintos a 1. (De regreso en la figura 14.1, tal vez no pueda derribar las primeras cuatro fichas, mientras que sí pueda derribar de la quinta ficha en adelante.) Por ejemplo, puede probar por inducción matemática que $2^n > n^2$ para todo entero positivo $n > 4$. Requiere una ligera variación en el enunciado del principio de inducción matemática. Este texto no se preocupa por tales problemas, pero es necesario que esté al tanto de su existencia.

Conjunto de problemas 14.4

Para los problemas 1-10 use inducción matemática para probar cada una de las fórmulas de suma para las secuencias indicadas. Deben aplicar para todos los enteros positivos n.

1. $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para $a_n = n$

2. $S_n = n^2$ para $a_n = 2n - 1$

3. $S_n = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ para $a_n = 3n - 1$

4. $S_n = \dfrac{n(5n+9)}{2}$ para $a_n = 5n + 2$

5. $S_n = 2(2^n - 1)$ para $a_n = 2^n$

6. $S_n = \dfrac{3(3^n - 1)}{2}$ para $a_n = 3^n$

7. $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para $a_n = n^2$

8. $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ para $a_n = n^3$

9. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ for $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

10. $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para $a_n = n(n+1)$

En los problemas 11-20 use inducción matemática para probar que cada enunciado es verdadero para todo entero positivo n.

11. $3^n \geq 2n + 1$

12. $4^n \geq 4n$

13. $n^2 \geq n$

14. $2^n \geq n + 1$

15. $4^n - 1$ es divisible entre 3

16. $5^n - 1$ es divisible entre 4

17. $6^n - 1$ es divisible entre 5

18. $9^n - 1$ es divisible entre 4

19. $n^2 + n$ es divisible entre 2

20. $n^2 - n$ es divisible entre 2

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

21. ¿Cómo describiría la prueba de inducción matemática?

22. Compare el razonamiento inductivo con la prueba mediante inducción matemática.

Capítulo 14 Resumen

Existen cuatro temas principales en este capítulo; secuencias aritméticas, secuencias geométricas, resolución de problemas e inducción matemática.

(14.1) Secuencias aritméticas

La secuencia $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ se llama **aritmética** si y sólo si

$$a_{k+1} - a_k = d$$

para todo entero positivo k. En otras palabras, hay una **diferencia común**, d, entre términos sucesivos.

El **término general** de una secuencia aritmética está dado por la fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

donde a_1 es el primer término, n es el número de términos y d es la diferencia común.

La **suma** de los primeros n términos de una secuencia aritmética está dada por la fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

La **notación sumatoria** se puede usar para indicar la suma de cierto número de términos de una secuencia. Por ejemplo,

$$\sum_{i-1}^{5} 4^i = 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$$

(14.2) Secuencias geométricas

La secuencia $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ se llama **geométrica** si y sólo si

$$a_{k+1} = ra_k$$

para todo entero positivo k. Hay una **razón común**, r, entre términos sucesivos.

El **término general** de una secuencia geométrica está dado por la fórmula

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término, n es el número de términos y r es la razón común.

La **suma** de los primeros n términos de una secuencia geométrica está dada por la fórmula

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \qquad r \neq 1$$

La **suma de una secuencia geométrica infinita** está dada por la fórmula

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \qquad \text{para } |r| < 1$$

Si $|r| \geq 1$, la secuencia no tiene suma.

Los decimales repetitivos $0.\overline{4}$ se pueden cambiar a la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$, al tratarlos como la suma de una secuencia geométrica infinita. Por ejemplo, el decimal repetitivo $0.\overline{4}$ se puede escribir $0.4 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots$.

(14.3) Resolución de problemas

Muchas de las sugerencias para resolver problemas ofrecidos anteriormente en este texto todavía son adecuadas cuando se resuelven problemas que tratan con secuencias. Sin embargo, también existen algunas sugerencias especiales pertenecientes a problemas de secuencia:

1. Escriba los primeros términos de la secuencia para describir qué tiene lugar en el problema. Dibujar una imagen o diagrama puede ayudar con este paso.
2. Asegúrese de que entiende, término por término, lo que representa la secuencia en el problema.
3. Determine si la secuencia es aritmética o geométrica. (Los únicos tipos de secuencias con los que se trabaja en este texto.)
4. Determine si el problema pide un término especial o la suma de cierto número de términos.

(14.4) Inducción matemática

La prueba por inducción matemática se apoya en el siguiente **principio de inducción**: sea P_n un enunciado en términos de n, donde n es un entero positivo. Si

1. P_1 es verdadero, y
2. la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1} para todo entero positivo k, entonces P_n es verdadero para todo entero positivo n.

Capítulo 14 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-10 encuentre el término general (el n-ésimo término) para cada secuencia. Estos problemas incluyen secuencias tanto aritméticas como geométricas.

1. $3, 9, 15, 21, \ldots$

2. $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

3. $10, 20, 40, 80, \ldots$

4. $5, 2, -1, -4, \ldots$

5. $-5, -3, -1, 1, \ldots$

6. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$

7. $-1, 2, -4, 8, \ldots$

8. $12, 15, 18, 21, \ldots$

9. $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots$

10. $1, 4, 16, 64, \ldots$

Para los problemas 11-16 encuentre el término requerido de cada una de las secuencias.

11. El 19o. término de $1, 5, 9, 13, \ldots$

12. El 28o. término de $-2, 2, 6, 10, \ldots$

13. El 9o. término de $8, 4, 2, 1, \ldots$

14. El 8o. término de $\frac{243}{32}, \frac{81}{16}, \frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \ldots$

15. El 34o. término de $7, 4, 1, -2, \ldots$

16. El 10o. término de $-32, 16, -8, 4, \ldots$

Para los problemas 17-29 resuelva cada problema.

17. Si el 5o. término de una secuencia aritmética es -19 y el 8o. término es -34, encuentre la diferencia común de la secuencia.

18. Si el 8o. término de una secuencia aritmética es 37 y el 13o. término es 57, encuentre el 20o. término.

19. Encuentre el 1er. término de una secuencia geométrica si el 3er. término es 5 y el 6o. término es 135.

20. Encuentre la razón común de una secuencia geométrica si el 2o. término es $\frac{1}{2}$ y el 6o. término es 8.

21. Encuentre la suma de los primeros nueve términos de la secuencia $81, 27, 9, 3, \ldots$.

22. Encuentre la suma de los primeros 70 términos de la secuencia $-3, 0, 3, 6, \ldots$.

23. Encuentre la suma de los primeros 75 términos de la secuencia $5, 1, -3, -7, \ldots$.

24. Encuentre la suma de los primeros diez términos de la secuencia donde $a_n = 2^{5-n}$.

25. Encuentre la suma de los primeros 95 términos de la secuencia donde $a_n = 7n + 1$.

26. Encuentre la suma $5 + 7 + 9 + \cdots + 137$.

27. Encuentre la suma $64 + 16 + 4 + \cdots + \frac{1}{64}$.

28. Encuentre la suma de todos los números pares entre 8 y 384, inclusive.

29. Encuentre la suma de todos los múltiplos de 3 entre 27 y 276, inclusive.

Para los problemas 30-33, encuentre cada suma indicada.

30. $\sum_{i=1}^{45}(-2i + 5)$

31. $\sum_{i=1}^{5} i^3$

32. $\sum_{i=1}^{8} 2^{8-i}$

33. $\sum_{i=4}^{75}(3i - 4)$

Para los problemas 34-36 resuelva cada problema.

34. Encuentre la suma de la secuencia geométrica infinita $64, 16, 4, 1, \ldots$.

35. Cambie $0.\overline{36}$ a la forma reducida a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

36. Cambie $0.4\overline{5}$ a la forma reducida a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Resuelva cada uno de los problemas 37-40 usando su conocimiento de las secuencias aritméticas y las secuencias geométricas.

37. Suponga que su cuenta de ahorros contiene \$3750 al comienzo del año. Si de la cuenta retira \$250 por mes, ¿cuánto contendrá al final del año?

38. Sonya decide comenzar a ahorrar monedas de diez centavos. Ella planea ahorrar una moneda el primer día de abril, 2 monedas el segundo día, 3 monedas el tercer día, 4 monedas el cuarto día, y así durante los 30 días de abril. ¿Cuánto dinero ahorrará en abril?

39. Nancy decide comenzar a ahorrar monedas de 10 centavos. Ella planea ahorrar una moneda el primer día de abril, 2 monedas el segundo día, 4 monedas el tercer día, 8 monedas el cuarto día, y así durante los primeros 15 días de abril. ¿Cuánto ahorrará en 15 días?

40. Un tanque contiene 61 440 galones de agua. Cada día se drena un cuarto del agua. ¿Cuánta agua permanece en el tanque al final de 6 días?

Para los problemas 41-43 demuestre una prueba de inducción matemática.

41. Pruebe que $5^n > 5n - 1$ para todos los valores enteros positivos de n.

42. Pruebe que $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3 para todos los valores enteros positivos de n.

43. Pruebe que

$$S_n = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$$

es la fórmula de suma para la secuencia

$$a_n = \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)}$$

donde n es cualquier entero positivo.

Capítulo 14 Examen

1. Encuentre el 15o. término de la secuencia para la cual $a_n = -n^2 - 1$.

2. Encuentre el 5o. término de la secuencia para la cual $a_n = 3(2)^{n-1}$.

3. Encuentre el término general de la secuencia $-3, -8, -13, -18, \ldots$.

4. Encuentre el término general de la secuencia $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$.

5. Encuentre el término general de la secuencia 10, 16, 22, 28, ...

6. Encuentre el séptimo término de la secuencia 8, 12, 18, 27, ...

7. Encuentre el 75o. término de la secuencia 1, 4, 7, 10, ...

8. Encuentre el número de términos en la secuencia 7, 11, 15, . . . , 243.

9. Encuentre la suma de los primeros 40 términos de la secuencia 1, 4, 7, 10, ...

10. Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la secuencia 3, 6, 12, 24, ...

11. Encuentre la suma de los primeros 45 términos de la secuencia para la cual $a_n = 7n - 2$.

12. Encuentre la suma de los primeros diez términos de la secuencia para la cual $a_n = 3(2)^n$.

13. Encuentre la suma de los primeros 150 números enteros positivos pares.

14. Encuentre la suma de los números enteros positivos impares entre 11 y 193, inclusive.

15. Encuentre la suma indicada $\sum_{i=1}^{50}(3i + 5)$.

16. Encuentre la suma indicada $\sum_{i=1}^{10}(-2)^{i-1}$.

17. Encuentre la suma de la secuencia geométrica infinita $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$.

18. Encuentre la suma de la secuencia geométrica infinita para la cual $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

19. Cambie $0.\overline{18}$ a la forma reducida a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

20. Cambie $0.2\overline{6}$ a la forma reducida a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Para los problemas 21-23 resuelva cada uno de ellos.

21. Un tanque contiene 49 152 litros de gasolina. Cada día, tres cuartos de la gasolina que permanece en el tanque se bombean y no se sustituyen. ¿Cuánta gasolina permanece en el tanque al final de 7 días?

22. Suponga que usted ahorra una moneda de 10 centavos el primer día de un mes, \$0.20 el segundo día y \$0.40 el tercer día, y que continúa duplicando sus ahorros cada día durante 14 días. Encuentre la cantidad total que ahorrará al final de 14 días.

23. Una mujer invierte \$350 a 12% de interés simple al comienzo de cada año durante un periodo de 10 años. Encuentre el valor total acumulado de todas las inversiones al final del periodo de 10 años.

Para los problemas 24 y 25 demuestre una prueba de inducción matemática.

24. $S_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$ para $a_n = 3n - 2$

25. $9^n - 1$ es divisible entre 8 para todos los valores enteros positivos de n.

15

Técnicas de conteo, probabilidad y teorema del binomio

La teoría de la probabilidad determina la probabilidad de ganar un juego de azar, como la lotería.

En un grupo de 30 personas hay aproximadamente una oportunidad de 70% de que al menos 2 de ellas tengan el mismo cumpleaños (mismo mes y mismo día del mes). En un grupo de 60 personas hay aproximadamente una oportunidad de 99% de que al menos 2 de ellas tengan el mismo cumpleaños.

Con un mazo ordinario de 52 cartas hay una oportunidad en 54 145 de que tendrá los cuatro ases en una mano de cinco cartas. La radio predice una posibilidad de 40% de severas tormentas locales en la tarde. Las probabilidades en favor de que los Cachorros de Chicago ganen el campeonato son de 2 a 3. Suponga que en una caja que contiene 50 bombillas, 45 están bien y 5 están quemadas. Si 2 bombillas se eligen al azar, la probabilidad de obtener al menos 1 bombilla buena es $\frac{243}{245}$.

Históricamente, muchos conceptos básicos de probabilidad se desarrollaron como resultado de estudiar varios juegos de azar. Sin embargo, en años recientes, las aplicaciones de la probabilidad se amplían a un ritmo fenomenal en gran variedad de campos, como física, biología, psicología, economía, seguros, ciencia militar, industria y política. El propósito de este capítulo es, primero, introducir algunas técnicas de conteo y, después, usar dichas técnicas para explorar algunos conceptos básicos de la probabilidad. La última sección del capítulo se dedicará al teorema del binomio.

15.1 Principio fundamental de conteo

Un principio de conteo muy útil se conoce como **principio fundamental de conteo**. Se ofrecerán algunos ejemplos, se enunciará la propiedad y luego se usará para resolver varios problemas de conteo. Considere dos problemas para esbozar el enunciado de la propiedad.

PROBLEMA 1

Una mujer tiene cuatro faldas y cinco blusas. Si supone que cada blusa se puede poner con cada falda, ¿cuántas diferentes combinaciones falda-blusa tiene?

Solución

Para *cada una* de las cuatro faldas, tiene una opción de cinco blusas. Por tanto, tiene $4(5) = 20$ diferentes combinaciones falda-blusa de dónde elegir. ■

PROBLEMA 2

Eric compra una nueva bicicleta y tiene dos diferentes modelos (5 velocidades o 10 velocidades) y cuatro diferentes colores (rojo, blanco, azul o plata) de dónde elegir. ¿Cuántas diferentes opciones tiene?

Solución

Sus diferentes opciones se pueden contar con la ayuda de un **diagrama de árbol**.

Modelos	Colores	Opciones
5 velocidades	rojo	5 velocidades roja
	blanco	5 velocidades blanca
	azul	5 velocidades azul
	plata	5 velocidades plata
10 velocidades	rojo	10 velocidades roja
	blanco	10 velocidades blanca
	azul	10 velocidades azul
	plata	10 velocidades plata

Para cada una de las dos opciones de modelo hay cuatro opciones de color. En conjunto, entonces, Eric tiene $2(4) = 8$ opciones. ■

Estos dos problemas ejemplifican el siguiente principio general:

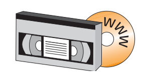
Principio fundamental de conteo

Si una tarea se puede realizar en x diferentes formas y, después de esta tarea, una segunda tarea se puede realizar en y diferentes formas, entonces la primera tarea seguida por la segunda tarea se pueden realizar en $x \cdot y$ formas diferentes. (Este principio de conteo se puede extender a cualquier número finito de tareas.)

Conforme aplique el principio fundamental de conteo es útil analizar sistemáticamente un problema en términos de las tareas a realizar. Considere algunos ejemplos.

PROBLEMA 3

¿Cuántos números de tres dígitos diferentes cada uno se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?



Solución

Analice este problema en términos de tres tareas.

Tarea 1 Elija el dígito de centenas, para el cual hay seis opciones.

Tarea 2 Ahora elija el dígito de decenas, para el cual hay sólo cinco opciones, porque un dígito se usó en el lugar de las centenas.

Tarea 3 Ahora elija el dígito de unidades, para el cual sólo hay cuatro opciones porque dos dígitos se usaron para los otros lugares.

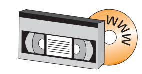
Por tanto, la tarea 1 seguida por la tarea 2 seguida por la tarea 3 se puede realizar en $(6)(5)(4) = 120$ formas. En otras palabras, hay 120 números de tres dígitos diferentes que se pueden formar al elegir de los seis dígitos dados. ■

Ahora observe de nuevo la solución al problema 3 y piense acerca de cada una de las siguientes preguntas:

1. ¿Puede resolver el problema al elegir primero el dígito de unidades, luego el dígito de decenas y finalmente el dígito de centenas?
2. ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar a partir de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si no requiere que cada número tenga tres dígitos *diferentes*? (Su respuesta debería ser 216.)
3. Suponga que los dígitos a elegir son 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Ahora, ¿cuántos números de tres dígitos diferentes puede formar, si supone que no quiere cero en el lugar de centenas? (Su respuesta debería ser 100.)
4. Suponga que quiere saber cuántos números *pares* con tres dígitos diferentes cada uno se pueden formar al elegir de 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuántos hay? (Su respuesta debería ser 60.)

PROBLEMA 4

Los números de identificación (ID) de empleado en cierta fábrica consisten de una letra mayúscula seguida por un número de tres dígitos que no contiene dígitos repetidos. Por ejemplo, A-014 es un número ID. ¿Cuántos de tales números ID se pueden formar? ¿Cuántos se pueden formar si se permiten dígitos repetidos?



Solución

De nuevo, analice el problema en términos de tareas a completar.

Tarea 1 Elija la letra del número ID: hay 26 opciones.

Tarea 2 Elija el primer dígito del número de tres dígitos: hay 10 opciones.

Tarea 3 Elija el segundo dígito: hay nueve opciones.

Tarea 4 Elija el tercer dígito: hay ocho opciones.

Por tanto, al aplicar el principio fundamental, se obtienen $(26)(10)(9)(8) = 18\,720$ posibles números ID.

Si se permiten dígitos repetidos, entonces habría $(26)(10)(10)(10) = 26\,000$ posibles números ID. ■

PROBLEMA 5

¿En cuántas formas pueden sentarse Al, Barb, Chad, Dan y Edna en una fila de cinco asientos, de modo que Al y Barb se sienten lado a lado?

Solución

Este problema se puede analizar en términos de tres tareas.

Tarea 1 Elija los dos asientos adyacentes a ocupar por Al y Barb. Una ilustración como la figura 15.1 le ayudará a ver que hay cuatro opciones para los dos asientos adyacentes.

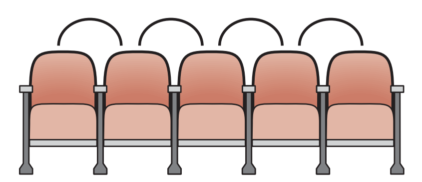


Figura 15.1

Tarea 2 Determine el número de formas en las que se pueden sentar Al y Barb. Puesto que Al se puede sentar a la izquierda y Barb a la derecha, o viceversa, hay dos formas para sentar a Al y Barb por cada par de asientos adyacentes.

Tarea 3 Las tres personas restantes se deben sentar en los tres asientos restantes. Esto se puede hacer en $(3)(2)(1) = 6$ formas diferentes.

Por tanto, por el principio fundamental, la tarea 1 seguida por la tarea 2 seguida por la tarea 3 se puede hacer en $(4)(2)(6) = 48$ formas. ■

Suponga que en el problema 5, en vez de ello se quiere el número de formas en las que se pueden sentar las cinco personas, de modo que Al y Barb *no* se sienten uno al lado del otro. Este número se puede determinar al usar alguna de dos técnicas básicamente diferentes: (1) analizar y contar el número de posiciones no adyacentes para Al y Barb, o (2) restar el número de ordenamientos de sentado determinados en el problema 5, del número total de formas en las que las cinco personas se pueden sentar en cinco asientos. Intente resolver este problema en ambas formas y vea si coincide con la respuesta de 72 formas.

Mientras aplique el principio fundamental de conteo puede descubrir que, para ciertos problemas, simplemente pensar en un diagrama de árbol adecuado es útil, aun cuando el tamaño del problema sea inadecuado para escribir el diagrama en detalle. Considere el siguiente problema.

PROBLEMA 6

Suponga que los estudiantes de pregrado en tres departamentos (geografía, historia y psicología) se deben clasificar de acuerdo con sexo y año en la escuela. ¿Cuántas categorías se necesitan?

Solución

Represente simbólicamente las diferentes clasificaciones del modo siguiente:

M:	Hombre	1.	Primer año	G:	Geografía
F:	Mujer	2.	Segundo año	H:	Historia
		3.	Tercer año	P:	Psicología
		4.	Cuarto año		

Mentalmente puede visualizar un diagrama de árbol tal que cada una de las dos clasificaciones de sexo se ramifica en cuatro clasificaciones de año escolar, que a su vez se ramifica en tres clasificaciones de departamento. Por tanto, se tienen $(2)(4)(3) = 24$ categorías diferentes. ■

Otra técnica que funciona en ciertos problemas implica lo que algunas personas llaman el método de *puerta trasera*. Por ejemplo, suponga que el salón de clase contiene 50 asientos. Algunos días puede ser más fácil determinar el número de estudiantes presentes contando el número de asientos vacíos y restar de 50, que contar el número de estudiantes presentes. (Este método de puerta trasera se sugiere como una forma de contar los ordenamientos de asientos no adyacentes en el análisis posterior al ejemplo 5.) El siguiente ejemplo ilustra aún más este método

PROBLEMA 7

Cuando se lanza un par de dados, ¿en cuántas formas se puede obtener una suma mayor que 4?

Solución

Con propósitos de clarificación use un dado rojo y uno blanco. (No es necesario usar dados de diferente color, pero sí ayuda a analizar los posibles resultados dife-

rentes.) Piense un momento y verá que hay más formas de obtener una suma mayor que 4 de las formas que hay para obtener una suma de 4 o menos. Por tanto, determine el número de posibilidades de obtener una suma de 4 o menos; entonces reste dicho número del número total de posibles resultados cuando lanza un par de dados. Primero, simplemente puede elaborar una lista y contar las formas de obtener una suma de 4 o menos.

Dado rojo	Dado blanco
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
3	1

Existen seis formas de obtener una suma de 4 o menos.

Segundo, puesto que hay seis posibles resultados en el dado rojo y seis posibles resultados en el dado blanco, hay un total de $(6)(6) = 36$ posibles resultados cuando lanza un par de dados.

En consecuencia, al restar el número de formas de obtener 4 o menos, del número total de posibles resultados, se obtiene $36 - 6 = 30$ formas de obtener una suma mayor que 4. ■

Conjunto de problemas 15.1

Resuelva los problemas 1-37.

1. Si una mujer tiene dos faldas y diez blusas, ¿cuantas diferentes combinaciones falda-blusa tiene?

2. Si un hombre tiene ocho camisas, cinco pantalones y tres pares de zapatos, ¿cuántas diferentes combinaciones camisa-pantalones-zapatos tiene?

3. ¿En cuántas formas cuatro personas pueden sentarse en una fila de cuatro asientos?

4. ¿Cuántos números de dos dígitos diferentes se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

5. ¿Cuántos números *pares* de tres dígitos diferentes se pueden formar al elegir de los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

6. ¿Cuántos números *impares* de cuatro dígitos diferentes se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?

7. Suponga que los estudiantes en cierta universidad se van a clasificar de acuerdo con su colegio (colegio de ciencia aplicada, colegio de artes y ciencias, colegio de negocios, colegio de educación, colegio de bellas artes, colegio de salud y educación física), sexo (mujer, hombre) y año en la escuela (1, 2, 3, 4). ¿Cuántas categorías son posibles?

8. Un investigador médico clasifica a los sujetos de acuerdo con sexo (mujer, hombre), hábitos de tabaquismo (fumador, no fumador) y peso (bajo del promedio, promedio, arriba del promedio). ¿Cuántas diferentes clasificaciones combinadas se usan?

9. Un encuestador clasifica a los votantes de acuerdo con sexo (mujer, hombre), afiliación partidista (demócrata, republicano, independiente) e ingreso familiar (bajo \$10 000, \$10 000-\$19 999, \$20 000-\$29 999, \$30 000-\$39 999, \$40 000-\$49 999, \$50 000 y más). ¿Cuántas clasificaciones combinadas usa el encuestador?

10. Una pareja planea tener cuatro hijos. ¿De cuántas formas puede ocurrir esto, en términos de clasificación niño-niña? (Por ejemplo, *BBBG* indica que los primeros tres hijos son niños y el último niña.)

11. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse tres oficiales (presidente, secretario y tesorero) de un club que tiene 20 miembros?

12. ¿En cuántas formas se pueden seleccionar tres oficiales (presidente, secretario y tesorero) de un club con 15 mujeres y 10 hombres, de modo que el presidente sea mujer y el secretario y el tesorero hombres?

13. Un disc jockey quiere tocar seis canciones una vez cada una en un programa de media hora. ¿En cuántas formas diferentes puede ordenar las canciones?

14. Un estado acordó que las placas de sus automóviles consistan de dos letras seguidas por cuatro dígitos. Los oficiales estatales no quieren repetir letra o dígito en alguna de las placas. ¿Cuántas placas diferentes estarán disponibles?

15. ¿En cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de seis asientos?

16. ¿En cuántas formas se pueden sentar Al, Bob, Carlos, Don, Ed y Fern, en una fila de seis asientos, si Al y Bob quieren sentarse lado a lado?

17. ¿En cuántas formas pueden sentarse Amy, Bob, Cindy, Dan y Elmer en una fila de cinco asientos, de modo que ni Amy ni Bob ocupen un asiento de los extremos?

18. ¿En cuántas formas pueden sentarse Al, Bob, Carlos, Don, Ed y Fern en una fila de seis asientos, si Al y Bob no se sentarán lado a lado? [*Sugerencia:* Al y Bob se sientan lado a lado, o no se sientan lado a lado.]

19. ¿En cuántas formas pueden sentarse Al, Bob, Carol, Dawn y Ed en una fila de cinco sillas, si Al se debe sentar en la silla de en medio?

20. ¿En cuántas formas pueden meterse tres cartas en cinco buzones?

21. ¿En cuántas formas pueden meterse cinco cartas en tres buzones?

22. ¿En cuántas formas pueden meterse cuatro cartas en seis buzones, de modo que dos cartas no vayan en el mismo buzón?

23. ¿En cuántas formas pueden meterse seis cartas en cuatro buzones, de modo que dos cartas no vayan en el mismo buzón?

24. Si lanza cinco monedas, ¿en cuántas formas pueden caer?

25. Si lanza tres dados, ¿en cuántas formas pueden caer?

26. ¿En cuántas formas puede obtener una suma menor que 10 cuando se lanza un par de dados?

27. ¿En cuántas formas puede obtener una suma mayor que cinco cuando lanza un par de dados?

28. ¿En cuántas formas puede obtener una suma mayor que cuatro cuando lanza tres dados?

29. Si ningún número contiene dígitos repetidos, ¿cuántos números mayores que 400 puede formar al elegir de los dígitos 2, 3, 4 y 5? [*Sugerencia:* Considere números de tres y cuatro dígitos.]

30. Si ningún número contiene dígitos repetidos, ¿cuántos números mayores que 5000 se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

31. ¿En cuántas formas se pueden sentar cuatro niños y cuatro niñas en una fila de siete asientos, de modo que los niños y las niñas ocupan asientos alternados?

32. ¿En cuántas formas se pueden exhibir en un anaquel tres diferentes libros de matemáticas y cuatro diferentes libros de historia, de modo que todos los libros de una materia estén lado a lado?

33. ¿En cuántas formas se pueden responder diez preguntas de verdadero-falso?

34. Si ningún número contiene dígitos repetidos, ¿cuántos números pares mayores que 3000 se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3 y 4?

35. Si ningún número contiene dígitos repetidos, ¿cuántos números impares mayores que 40 000 se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

36. ¿En cuántas formas se pueden sentar Al, Bob, Carol, Don, Ed, Faye y George en una fila de siete asientos, de modo que Al, Bob y Carol ocupen asientos consecutivos en algún orden?

37. Las placas automovilísticas para cierto estado consisten de dos letras seguidas por un número de cuatro dígitos tales que el primer dígito del número no es cero. Un ejemplo es PK-2446.

(a) ¿Cuántas placas diferentes se pueden producir?

(b) ¿Cuántas placas diferentes no tienen una letra repetida?

(c) ¿Cuántas placas no tienen algún dígito repetido en la parte numérica de la placa?

(d) ¿Cuántas placas no tienen una letra repetida y tampoco tienen dígitos repetidos?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

38. ¿Cómo explicaría el principio fundamental de conteo a un amigo que faltó a clase el día que se estudió?

39. Proporcione dos o tres ilustraciones simples del principio fundamental de conteo.

40. Explique cómo resolvió el problema 29.

15.2 Permutaciones y combinaciones

Mientras se desarrolla el material en esta sección, la **notación factorial** será muy útil. La notación $n!$ (que se lee "n factorial") se usa con enteros positivos del modo siguiente:

$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Note que la notación factorial se refiere a un *producto indicado*. En general se escribe

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

También se define $0! = 1$, de modo que ciertas fórmulas serán verdaderas para todos los enteros no negativos.

Ahora, como introducción al primer concepto de esta sección, considere un problema de conteo que recuerde cercanamente a los problemas de la sección anterior.

PROBLEMA 1

¿En cuántas formas se pueden ordenar en fila las tres letras A, B y C?

Solución A

Ciertamente un método para resolver el problema es simplemente elaborar una lista y contar los arreglos.

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Hay seis arreglos de las tres letras.

Solución B

Otro método, que se puede generalizar para problemas más difíciles, usa el principio fundamental de conteo. Puesto que hay tres opciones para la primera letra de un arreglo, dos opciones para la segunda letra y una opción para la tercera letra, hay $(3)(2)(1) = 6$ arreglos. ■

Permutaciones

Los arreglos ordenados se llaman **permutaciones**. En general, una permutación de un conjunto de n elementos es un arreglo ordenado de los n elementos; se usará el símbolo $P(n, n)$ para denotar el número de tales permutaciones. Por ejemplo, del problema 1, se sabe que $P(3, 3) = 6$. Más aún, usando el mismo abordaje básico como en la solución B del problema 1, se puede obtener

$$P(1, 1) = 1 = 1!$$

$$P(2, 2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$P(4, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

$$P(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

En general, la siguiente fórmula se vuelve evidente:

$$P(n, n) = n!$$

Ahora suponga que está interesado en el número de permutaciones de dos letras que se pueden formar al elegir de las cuatro letras A, B, C y D. (Algunos ejemplos de tales permutaciones son AB, BA, AC, BC y CB.) En otras palabras, se quiere encontrar el número de permutaciones de dos elementos que se pueden formar de un conjunto de cuatro elementos. Este número se denota mediante $P(4, 2)$. Para encontrar $P(4, 2)$ puede razonar del modo siguiente: Primero, puede elegir cualquiera de las cuatro letras para ocupar la primera posición en la permutación, luego puede elegir cualquiera de las tres letras restantes para la segunda posición. Por tanto, mediante el principio fundamental de conteo, se tiene $(4)(3) = 12$ diferentes permutaciones de dos letras; esto es, $P(4, 2) = 12$. Usando una línea similar de razonamiento puede determinar los siguientes números. (Asegúrese de que coincide con cada uno.)

$$P(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$P(5, 2) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$P(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

En general, se dice que el número de permutaciones de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos está dado por

$$P(n, r) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{r \text{ factores}}$$

Note que el producto indicado para $P(n, r)$ comienza con n. De ahí en adelante, cada factor es 1 menos que el anterior, y hay un total de r factores. Por ejemplo,

$$P(6, 2) = 6 \cdot 5 = 30$$

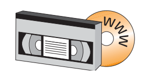
$$P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

$$P(9, 4) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

Considere dos problemas que ilustran el uso de $P(n, n)$ y $P(n, r)$.

PROBLEMA 2

¿En cuántas formas se pueden sentar cinco estudiantes en una fila de cinco asientos?



Solución

El problema pide el número de permutaciones de cinco elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de cinco elementos. Por tanto, puede aplicar $P(n, n) = n!$

$$P(5, 5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$ ■

PROBLEMA 3

Suponga que siete personas entran a una carrera de natación. ¿En cuántas formas se pueden ganar el primero, segundo y tercer premio?

Solución

Este problema pide el número de permutaciones de tres elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de siete elementos. Por tanto, al usar la fórmula para $P(n, r)$ se obtiene

$$P(7, 3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$ ■

Debe ser evidente que los problemas 2 y 3 podrían resolverse al aplicar el principio fundamental de conteo. De hecho, las fórmulas para $P(n, n)$ y $P(n, r)$ realmente no proporcionan mucho poder adicional para resolver problemas. Sin embargo, como se verá en un momento, sí proporcionan la base para desarrollar una fórmula que es muy útil como herramienta para resolver problemas.

Permutaciones que implican objetos indistinguibles

Suponga que tiene dos H idénticas y una T en un arreglo como HTH. Si cambia las dos H idénticas, el arreglo recién formado, HTH, no será distinguible del original. En otras palabras, hay menos permutaciones distinguibles de n elementos cuando alguno de estos elementos son idénticos que cuando los n elementos son diferentes.

Para ver el efecto de elementos idénticos sobre el número de permutaciones distinguibles observe algunos ejemplos específicos:

2 H idénticas	1 permutación (HH)
2 letras diferentes	2! permutaciones (HT, TH)

Por tanto, ¡tener dos letras diferentes afecta el número de permutaciones por un *factor de* 2!

3 H idénticas	1 permutación (HHH)
3 letras diferentes	3! Permutaciones

Por tanto, ¡tener tres letras diferentes afecta el número de permutaciones por un *factor de* 3!

4 H idénticas	1 permutación (HHHH)
4 letras diferentes	4! permutaciones

Por tanto, ¡tener cuatro letras diferentes afecta el número de permutaciones por un *factor de* 4!

Ahora resuelva un problema específico.

PROBLEMA 4

¿Cuántas permutaciones distinguibles se pueden formar a partir de tres H idénticas y dos T idénticas?

Solución

Si tiene cinco letras diferentes, podría formar 5! permutaciones. Pero las tres H idénticas afectan el número de permutaciones distinguibles por un factor de 3!, y las dos T idénticas afectan el número de permutaciones por un factor de 2! Por tanto, debe dividir 5! entre 3! y 2! Se obtiene

$$\frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$$

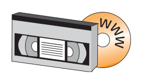
permutaciones distinguibles de tres H y dos T. ■

El tipo de razonamiento que se usó en el problema 4 conduce a la siguiente técnica general de conteo. Si hay n elementos a ordenar, donde hay r_1 de un tipo, r_2 de otro tipo, r_3 de otro tipo, …, r_k de un k-ésimo tipo, entonces el número total de permutaciones distinguibles está dado por la expresión

$$\frac{n!}{(r_1!)(r_2!)(r_3!)\cdots(r_k!)}$$

PROBLEMA 5

¿Cuántas permutaciones diferentes de 11 letras se pueden formar a partir de las 11 letras de la palabra MISSISSIPPI?



Solución

Puesto que hay 4 I, 4 S y 2 P, puede formar

$$\frac{11!}{(4!)(4!)(2!)} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 34\,650$$

permutaciones distinguibles. ■

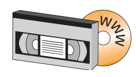
Combinaciones (subconjuntos)

Las permutaciones son arreglos *ordenados*; sin embargo, con frecuencia, el *orden* no es una consideración. Por ejemplo, suponga que quiere determinar el número de comités de tres personas que se pueden formar a partir de cinco personas: Al, Barb, Carol, Dawn y Eric. Ciertamente, el comité que consiste de Al, Barb y Eric es el mismo que el comité que consiste de Barb, Eric y Al. En otras palabras, el orden en el que se elige o menciona a los miembros no es importante. Por tanto, realmente se trata con subconjuntos; esto es, se busca el número de subconjuntos de tres elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de cinco elementos. De manera tradicional en este contexto, los subconjuntos se han llamado **combinaciones**. Dicho de otra forma, entonces, se busca el número de combinaciones de cinco cosas tomadas tres a la vez. En general, los subconjuntos de r elementos tomados de un conjunto de n elementos se llaman **combinaciones de n cosas tomadas r a la vez**. El símbolo $C(n, r)$ denota el número de estas combinaciones.

Ahora se replantea el problema del comité y se muestra una solución detallada que se puede generalizar para manejar varios problemas que tratan con combinaciones.

PROBLEMA 6

¿Cuántos comités de tres personas se pueden formar a partir de cinco personas: Al, Barb, Carol, Dawn y Eric?



Solución

Use el conjunto {A, B, C, D, E} para representar a las cinco personas. Considere un posible comité de tres personas (subconjunto), como {A, B, C}; hay 3! permutaciones de estas tres letras. Ahora tome otro comité, como {A, B, D}; también hay 3! permutaciones de estas tres letras. Si continuase este proceso con todos los subconjuntos de tres letras que se pueden formar a partir de las cinco letras, contaría todas las posibles permutaciones de tres letras de las cinco letras. Esto es: obtendría $P(5, 3)$. Por tanto, si $C(5, 3)$ representa el número de subconjuntos de tres elementos, entonces

$$(3!) \cdot C(5, 3) = P(5, 3)$$

Resolver esta ecuación para $C(5, 3)$ produce

$$C(5, 3) = \frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Por tanto, a partir de las cinco personas, se pueden formar diez comités de tres personas. ■

En general, $C(n, r)$ por $r!$ produce $P(n, r)$. Por tanto

$$(r!) \cdot C(n, r) = P(n, r)$$

y resolver esta ecuación para $C(n, r)$ produce

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

En otras palabras, puede encontrar el número de *combinaciones* de n cosas tomadas r a la vez al dividir entre $r!$, el número de permutaciones de n cosas tomadas r a la vez. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea:

$$C(7, 3) = \frac{P(7, 3)}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C(9, 2) = \frac{P(9, 2)}{2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

$$C(10, 4) = \frac{P(10, 4)}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

PROBLEMA 7

¿Cuántas manos de cinco cartas diferentes se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

Solución

Puesto que el orden en el que se reparten los naipes no es un conflicto, se trabaja con un problema de combinación (subconjunto). Por tanto, al usar la fórmula para $C(n, r)$, se obtiene

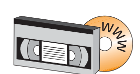
$$C(52, 5) = \frac{P(52, 5)}{5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

Hay 2 598 960 diferentes manos de cinco cartas que se pueden repartir de un mazo de 52 naipes. ■

Algunos problemas de conteo, como el problema 8, se pueden resolver usando el principio fundamental de conteo junto con la fórmula de combinación.

PROBLEMA 8

¿Cuántos comités que consistan de tres mujeres y dos hombres se pueden formar de un grupo de cinco mujeres y cuatro hombres?



Solución

Piense en este problema en términos de dos tareas.

Tarea 1 Elija un subconjunto de tres mujeres de las cinco mujeres. Esto se puede hacer en

$$C(5, 3) = \frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ maneras}$$

Tarea 2 Elija un subconjunto de dos hombres a partir de los cuatro hombres. Esto se puede hacer en

$$C(4, 2) = \frac{P(4, 2)}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ maneras}$$

La tarea 1 seguida por la tarea 2 se puede hacer en $(10)(6) = 60$ formas. Por tanto, hay 60 comités que consisten de tres mujeres y dos hombres que se pueden formar. ■

En ocasiones se requiere pensar un poco para decidir si se deben usar permutaciones o combinaciones. Recuerde que, **si debe considerar el orden, debe usar permutaciones, pero si el orden no importa, entonces use combinaciones**. Es útil pensar en las combinaciones como en subconjuntos.

PROBLEMA 9

Una pequeña firma de contaduría tiene 12 programadores de computadoras. Tres de estas personas se deben promover a analistas de sistemas. ¿En cuántas formas puede seleccionar la firma a las tres personas a promover?

Solución

Llame a las personas A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L. Suponga que A, B y C se eligen para promoción. ¿Esto es diferente a elegir B, C y A? Obviamente no, así que el orden no importa, y se plantea una pregunta acerca de combinaciones. De manera más específica, necesita encontrar el número de combinaciones de 12 personas tomadas tres a la vez. Por tanto, hay

$$C(12, 3) = \frac{P(12, 3)}{3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

diferentes formas de elegir las tres personas a promover. ■

PROBLEMA 10

Un club debe elegir tres oficiales (presidente, secretario y tesorero) de un grupo de seis personas, todas las cuales quieren servir en algún despacho. ¿En cuántas formas diferentes se puede elegir a los oficiales?

Solución

Llame a los candidatos A, B, C, D, E y F. ¿Elegir A como presidente, B como secretario y C como tesorero es diferente a elegir B como presidente, C como secretario y A como tesorero? Obviamente lo es, así que se trabaja con permutaciones. Por tanto, hay

$$P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

diferentes formas de llenar los puestos. ■

Conjunto de problemas 15.2

En los problemas 1-12 evalúe cada uno.

1. $P(5, 3)$

2. $P(8, 2)$

3. $P(6, 4)$

4. $P(9, 3)$

5. $C(7, 2)$

6. $C(8, 5)$

7. $C(10, 5)$

8. $C(12, 4)$

9. $C(15, 2)$

10. $P(5, 5)$

11. $C(5, 5)$

12. $C(11, 1)$

Para los problemas 13-44 resuelva cada uno de ellos.

13. ¿Cuántas permutaciones de las cuatro letras A, B, C y D se pueden formar usando todas las letras en cada permutación?

14. ¿En cuántas formas se pueden sentar seis estudiantes en una fila de seis asientos?

15. ¿Cuántos comités de tres personas se pueden formar de un grupo de nueve personas?

16. ¿Cuántas manos de dos cartas se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

17. ¿Cuántas permutaciones de tres letras se pueden formar a partir de las primeras ocho letras del alfabeto (a) si no se permiten repeticiones?, (b) ¿si se permiten repeticiones?

18. En una liga de béisbol de siete equipos, ¿en cuántas formas se pueden llenar las tres primeras posiciones en la clasificación final?

19. ¿En cuántas formas el manager de un equipo de béisbol puede arreglar su orden al bat de nueve inicialistas, si quiere que sus mejores bateadores estén en las primeras cuatro posiciones?

20. En una liga de béisbol de nueve equipos, ¿cuántos juegos se necesitan para completar el calendario, si cada equipo juega 12 juegos con cada uno de los otros equipos?

21. ¿Cuántos comités que consisten de cuatro mujeres y cuatro hombres se pueden elegir de un grupo de siete mujeres y ocho hombres?

22. ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos que contienen una vocal y dos consonantes se pueden formar a partir del conjunto {a, b, c, d, e, f, g, h, i}?

23. Cinco profesores asociados se consideran para promoción al rango de profesor titular, pero sólo tres se promoverán. ¿Cuántas diferentes combinaciones de tres se podrían promover?

24. ¿Cuántos números de cuatro dígitos diferentes se pueden formar a partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si cada número debe consistir de dos dígitos impares y dos dígitos pares?

25. ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos que contienen la letra A se pueden formar a partir del conjunto {A, B, C, D, E, F}?

26. ¿Cuántos comités de cuatro personas se pueden elegir de cinco mujeres y tres hombres si cada comité debe contener al menos un hombre?

27. ¿Cuántas diferentes permutaciones de siete letras se pueden formar a partir de cuatro H idénticas y tres T idénticas?

28. ¿Cuántas diferentes permutaciones de ocho letras se pueden formar a partir de seis H idénticas y dos T idénticas?

29. ¿Cuántas diferentes permutaciones de nueve letras se pueden formar a partir de tres A idénticas, cuatro B idénticas y dos C idénticas?

30. ¿Cuántas diferentes permutaciones de diez letras se pueden formar a partir de cinco A idénticas, cuatro B idénticas y una C?

31. ¿Cuántas diferentes permutaciones de siete letras se pueden formar a partir de las siete letras de la palabra ÁLGEBRA?

32. ¿Cuántas diferentes permutaciones de 11 letras se pueden formar a partir de las 11 letras de la palabra MATEMÁTICAS?

33. ¿En cuántas formas se puede escribir x^4y^2 sin usar exponentes? [*Sugerencia:* Una forma es *xxxxyy*.]

34. ¿En cuántas formas se puede escribir $x^3y^4z^3$ sin usar exponentes?

35. Diez jugadores de básquetbol se van a dividir en dos equipos de cinco jugadores cada uno por un juego. ¿En cuántas formas se puede hacer esto?

36. Diez jugadores de básquetbol se van a dividir en dos equipos de cinco, en tal forma que los dos mejores jugadores estén en equipos opuestos. ¿En cuántas formas se puede hacer esto?

37. Una caja contiene nueve bombillas buenas y cuatro bombillas defectuosas. ¿Cuántas muestras de tres bombillas contienen una bombilla defectuosa? ¿Cuántas muestras de tres bombillas contienen *al menos* una bombilla defectuosa?

38. ¿Cuántos comités de cinco personas, que consisten de dos estudiantes de tercer año y tres de cuarto año, se pueden formar de un grupo de seis estudiantes de tercer año y ocho de cuarto año?

39. ¿En cuántas formas se pueden dividir seis personas en dos grupos, de modo que haya cuatro en un grupo y dos en el otro? ¿En cuántas formas se pueden dividir seis personas en dos grupos de tres cada uno?

40. ¿Cuántos subconjuntos de cinco elementos que contienen A y B se pueden formar a partir del conjunto {A, B, C, D, E, F, G, H}?

41. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos que contienen A o B, mas no ambos, se pueden formar a partir del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}?

42. ¿Cuántos diferentes comités de cinco personas se pueden seleccionar a partir de nueve personas, si dos de estas personas rechazan trabajar juntas en un comité?

43. ¿Cuántos diferentes segmentos de línea se determinan con cinco puntos? ¿Con seis puntos? ¿Con siete puntos? ¿Con n puntos?

44. **(a)** ¿Cuántas manos de cinco cartas que consisten de dos reyes y tres ases se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

(b) ¿Cuántas manos de cinco cartas que consisten de tres reyes y dos ases se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

(c) ¿Cuántas manos de cinco cartas que consisten de tres cartas de un palo y dos cartas de otro palo se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

45. Explique la diferencia entre una permutación y una combinación. Proporcione un ejemplo de cada uno para ilustrar su explicación.

46. Su amigo tiene dificultad para distinguir entre permutaciones y combinaciones en situaciones de resolución de problemas. ¿Qué puede hacer para ayudarle?

MÁS INVESTIGACIÓN

47. ¿En cuántas formas pueden sentarse seis personas en una mesa circular? [*Sugerencia:* Mover a cada persona un lugar a la derecha (o izquierda) no crea un asiento.]

48. La cantidad $P(8, 3)$ se puede expresar completamente en notación factorial del modo siguiente:

$$P(8,3) = \frac{P(8,3) \cdot 5!}{5!} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{5!} = \frac{8!}{5!}$$

Exprese cada uno de los siguientes en términos de notación factorial.

(a) $P(7, 3)$
(b) $P(9, 2)$
(c) $P(10, 7)$
(d) $P(n, r)$, $\quad r \leq n$ y 0! se define como 1

49. En ocasiones al fórmula

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

se usa para encontrar el número de combinaciones de n cosas tomadas r a la vez. Use el resultado de la parte (d) del problema 48 y desarrolle esta fórmula.

50. Calcule $C(7, 3)$ y $C(7, 4)$. Calcule $C(8, 2)$ y $C(8, 6)$. Calcule $C(9, 8)$ y $C(9, 1)$. Ahora argumente que $C(n, r) = C(n, n - r)$ para $r \leq n$.

ACTIVIDADES CON CALCULADORA GRAFICADORA

Antes de resolver los problemas 51-56, asegúrese de que puede usar su calculadora para calcular el número de permutaciones y combinaciones. Es posible que su calculadora tenga una secuencia especial de teclas para tales cálculos. Tal vez necesita consultar su manual del usuario para esta información.

51. Use su calculadora para comprobar sus respuestas para los problemas 1-12.

52. ¿Cuántas manos diferentes de cinco cartas se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

53. ¿Cuántas manos diferentes de siete cartas se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

54. ¿Cuántos diferentes comités de cinco personas se pueden formar de un grupo de 50 personas?

55. ¿Cuántos diferentes jurados, que consisten de 11 personas, se pueden elegir de un grupo de 30 personas?

56. ¿Cuántos comités de siete personas, que consisten de tres estudiantes de tercer año y cuatro de cuarto año, se pueden formar con 45 estudiantes de tercer año y 53 de cuarto año?

15.3 Probabilidad

Con la finalidad de introducir alguna terminología y notación considere el experimento simple de lanzar un dado regular de seis caras. Hay seis posibles resultados a este experimento: caerá 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Este conjunto de posibles resultados se llama "espacio muestral" y los elementos individuales del espacio muestral se llaman "puntos muestrales". Se usará S (en ocasiones con subíndices para propósitos de identificación) para referirse a un espacio muestral particular de un experimento; entonces el número de puntos muestrales se denotará con $n(S)$. Por tanto, para el experimento de lanzar un dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $n(S) = 6$.

En general, el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento dado se llama **espacio muestral**, y los elementos individuales del espacio muestral se llaman **puntos muestrales**. (En este texto solamente se trabajará con espacios muestrales que son finitos.)

Ahora suponga que está interesado en algunos de los varios resultados posibles en el experimento de lanzar dados. Por ejemplo, puede estar interesado en el evento *resulta un número par*. En este caso está satisfecho si aparece 2, 4 o 6 en la cara superior del dado y, por tanto, el evento *resulta un número par* es el subconjunto $E = \{2, 4, 6\}$, donde $n(E) = 3$. Acaso, en vez de ello, pueda estar interesado en el evento *resulta un múltiplo de 3*. Este evento determina el subconjunto $F = \{3, 6\}$, donde $n(F) = 2$.

En general, cualquier subconjunto de un espacio muestral se llama **evento** o **espacio evento**. Si el evento consiste de exactamente un elemento del espacio muestral, entonces se llama **evento simple**. Cualquier evento no vacío que no es simple se llama **evento compuesto**. Un evento compuesto se puede representar como la unión de eventos simples.

Ahora es posible dar una definición simple para *probabilidad*, como se quiere usar el término en este texto.

Definición 15.1

En un experimento donde todos los posibles resultados en el espacio muestral S tienen la misma posibilidad de ocurrir, la **probabilidad** de un evento E se define como

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

donde $n(E)$ denota el número de elementos en el evento E, y $n(S)$ denota el número de elementos en el espacio muestral S.

Muchos problemas de probabilidad se pueden resolver al aplicar la definición 15.1. Tal método requiere que pueda determinar el número de elementos en el espacio muestral y el número de elementos en el espacio evento. Por ejemplo, en el experimento de lanzar dados, la probabilidad de obtener un número par con un lanzamiento del dado está dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Considere dos ejemplos donde el número de elementos tanto en el espacio muestral como en el espacio evento se determinan con facilidad.

PROBLEMA 1

Se lanza una moneda. Encuentre la probabilidad de que caiga cara.

Solución

Sea $S = \{H, T\}$ el espacio muestral; entonces $n(S) = 2$. El evento de una cara es el subconjunto $E = \{H\}$, de modo que $n(E) = 1$. En consecuencia, la probabilidad de obtener una cara con un lanzamiento de moneda está dado por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$ ■

PROBLEMA 2

Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que *al menos* salga una cara?

Solución

Para propósitos de clarificación, sean las monedas de un centavo y 5 centavos. Los posibles resultados de este experimento son (1) una cara en ambas monedas, (2) una cara en la moneda de 1 centavo y una cruz (T) en la de 5 centavos, (3) una cruz en la de un centavo y una cara en la de 5 centavos, y (4) una cruz en ambas monedas. Al usar notación de pares ordenados, donde la primera entrada de un par representa la moneda de 1 centavo y la segunda entrada la de 5 centavos, puede escribir el espacio muestral como

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

y $n(S) = 4$.

Sea E el evento de sacar al menos una cara. Por tanto, $E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$ y $n(E) = 3$. Por tanto, la probabilidad de sacar al menos una cara con un lanzamiento de dos monedas es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$ ■

Como tal vez espere, las técnicas de conteo estudiadas en las primeras dos secciones de este capítulo se pueden usar frecuentemente para resolver problemas de probabilidad.

PROBLEMA 3

Se lanzan cuatro monedas. Encuentre la probabilidad de sacar tres caras y una cruz.

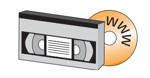
Solución

El espacio muestral consiste de los posibles resultados para lanzar cuatro monedas. Puesto que hay dos cosas que pueden ocurrir con cada moneda, por el principio fundamental de conteo hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ posibles resultados por lanzar cuatro monedas. En consecuencia, se sabe que $n(S) = 16$ sin tomar el tiempo de elaborar una lista de todos los elementos. El evento de obtener tres caras y una cruz es el subconjunto $E = \{(H, H, H, T), (H, H, T, H), (H, T, H, H), (T, H, H, H)\}$, donde $n(E) = 4$. Por tanto, la probabilidad solicitada es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$ ■

PROBLEMA 4

Al, Bob, Chad, Dorcas, Eve y Françoise se sientan al azar en una fila de seis sillas. ¿Cuál es la probabilidad de que Al y Bob se sienten en asientos extremos?



Solución

El espacio muestral consiste de todas las posibles formas de sentar seis personas en seis sillas o, en otras palabras, las permutaciones de seis cosas tomadas seis a la vez. Por tanto, $n(S) = P(6, 6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

El espacio evento consiste de todas las posibles formas de sentar a las seis personas de modo que Al y Bob ocupen asientos extremos. El número de estas posibilidades se puede determinar del modo siguiente:

Tarea 1 Ponga a Al y Bob en los asientos extremos. Esto se puede hacer de dos formas, porque Al puede estar en el extremo izquierdo y Bob en el extremo derecho, o viceversa.

Tarea 2 Ponga a las otras cuatro personas en los cuatro asientos restantes. Esto se puede hacer en $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas diferentes.

Por tanto, la tarea 1 seguida por la tarea 2 se pueden hacer en $(2)(24) = 48$ formas diferentes, de modo que $n(E) = 48$. Por tanto, la probabilidad solicitada es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

■

Note que en el problema 3, al usar el principio fundamental de conteo para determinar el número de elementos en el espacio muestral, en realidad no tenía que elaborar una lista de todos los elementos. Para el espacio evento se mencionan los elementos y se cuentan en la forma usual. En el problema 4 se usó la fórmula de permutación $P(n, n) = n!$ para determinar el número de elementos en el espacio muestral, y luego se usó el principio fundamental para determinar el número de elementos en el espacio evento. No hay reglas definitivas acerca de cuándo elaborar una lista de los elementos y cuándo aplicar alguna técnica de conteo. En general, se sugiere que, si no ve de inmediato un patrón de conteo para un problema particular, debe comenzar por listar el proceso. Si entonces surge un patrón de conteo conforme lista los elementos use el patrón en ese momento.

La fórmula de combinación (subconjunto) se desarrolló en la sección 15.2, $C(n, r) = P(n, r)/r!$, también es una herramienta muy útil para resolver ciertos tipos de problemas de probabilidad. Los siguientes tres ejemplos ilustran algunos problemas de este tipo.

PROBLEMA 5

Un comité de tres personas se selecciona aleatoriamente de Alice, Bjorn, Chad, Dee y Eric. ¿Cuál es la probabilidad de que Alice esté en el comité?

Solución

El espacio muestral, S, consiste de todos los posibles comités de tres personas que se pueden formar de las cinco personas. Por tanto

$$n(S) = C(5, 3) = \frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

El espacio evento, E, consiste de todos los comités de tres personas que tienen a Alice como miembro. Cada uno de estos comités contiene a Alice y otras dos personas elegidas de las cuatro personas restantes. Por tanto, el número de tales comités es $C(4, 2)$, de modo que se obtiene

$$n(E) = C(4, 2) = \frac{P(4, 2)}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

La probabilidad solicitada es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

■

PROBLEMA 6

Un comité de cuatro se elige al azar de un grupo de cinco estudiantes de cuarto año y cuatro de tercer año. Encuentre la probabilidad de que el comité contendrá dos estudiantes de cuarto año y dos de tercer año.

Solución

El espacio muestral, S, consiste de todos los posibles comités de cuatro personas que se pueden formar a partir de las nueve personas. Por tanto

$$n(S) = C(9, 4) = \frac{P(9, 4)}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

El espacio evento, E, consiste de todos los comités de cuatro personas que contienen dos estudiantes de cuarto año y dos de tercer año. Se pueden contar del modo siguiente:

Tarea 1 Elija dos estudiantes de cuarto año de los cinco estudiantes de cuarto disponibles en $C(5, 2) = 10$ formas.

Tarea 2 Elija dos estudiantes de tercer año de los cuatro estudiantes de tercer año disponibles en $C(4, 2) = 6$ formas.

En consecuencia, hay $10 \cdot 6 = 60$ comités que consisten de dos estudiantes de cuarto año y dos estudiantes de tercer año. La probabilidad solicitada es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

■

PROBLEMA 7

Se lanzan ocho monedas. Encuentre la probabilidad de obtener dos caras y seis cruces.

Solución

Puesto que una de dos cosas puede ocurrir en cada moneda, el número total de posibles resultados, $n(S)$, es $2^8 = 256$.

Puede seleccionar dos monedas, que deben caer caras, en $C(8, 2) = 28$ formas. Para cada una de estas formas, sólo hay una forma de seleccionar las otras seis monedas que deben caer cruz. Por tanto, hay $28 \cdot 1 = 28$ formas de obtener dos caras y seis cruces, de modo que $n(E) = 28$. La probabilidad solicitada es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{28}{256} = \frac{7}{64}$$

■

Conjunto de problemas 15.3

Para los problemas 1-4 se lanzan *dos* monedas. Encuentre la probabilidad de lanzar cada uno de los siguientes eventos:

1. Una cara y una cruz

2. Dos cruces

3. Al menos una cruz

4. Ninguna cruz

Para los problemas 5-8 se lanzan *tres* monedas. Encuentre la probabilidad de lanzar cada uno de los siguientes eventos:

5. Tres caras

6. Dos caras y una cruz

7. Al menos una cara

8. Exactamente una cruz

Para los problemas 9-12 se lanzan *cuatro* monedas. Encuentre la probabilidad de lanzar cada uno de los siguientes eventos:

9. Cuatro caras

10. Tres caras y una cruz

11. Dos caras y dos cruces

12. Al menos una cara

Para los problemas 13-16 se lanza *un* dado. Encuentre la probabilidad de lanzar cada uno de los siguientes eventos:

13. Un múltiplo de 3

14. Un número primo

15. Un número par

16. Un múltiplo de 7

Para los problemas 17-22 se lanzan *dos* dados. Encuentre la probabilidad de lanzar cada uno de los siguientes eventos:

17. Una suma de 6

18. Una suma de 11

19. Una suma menor que 5

20. Un 5 en exactamente un dado

21. Un 4 en al menos un dado

22. Una suma mayor que 4

Para los problemas 23-26 se extrae *una* carta de un mazo estándar de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

23. Se extrae un corazón

24. Se extrae un rey

25. Se extraen una espada y un diamante

26. Se extrae un jack rojo

Para los problemas 27-30 suponga que 25 tiras de papel numerado del 1 al 25, inclusive, se ponen en un sombrero, y luego se extrae uno al azar. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

27. Se extrae la tira con el 5.

28. Se extrae una tira con un número par.

29. Se extrae una tira con un número primo.

30. Se extrae una tira con un múltiplo de 6.

Para los problemas 31-34 suponga que se debe elegir un comité de dos niños al azar de los cinco niños Al, Bill, Carl, Dan y Eli. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

31. Dan está en el comité.

32. Dan y Eli están en el comité.

33. Bill y Carl no están en el comité.

34. Dan o Eli, mas no ambos, están en el comité.

Para los problemas 35-38 suponga que se selecciona al azar un comité de cinco personas de las ocho personas Al, Barb, Chad, Dominique, Eric, Fern, George y Harriet. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

35. Al y Barb están en el comité.

36. George no está en el comité.

37. Chad o Dominique, mas no ambos, están en el comité.

38. Ni Al ni Bob están en el comité.

Para los problemas 39-41 suponga que una caja de diez artículos de una compañía manufacturera contiene dos artículos defectuosos y ocho artículos no defectuosos. Una muestra de tres artículos se selecciona al azar. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

39. La muestra contiene todos los artículos no defectuosos.

40. La muestra contiene un artículo defectuoso y dos no defectuosos.

41. La muestra contiene dos artículos defectuosos y uno no defectuoso.

Para los problemas 42-60 resuelva cada problema.

42. Un edificio tiene cinco puertas. Encuentre la probabilidad de que dos personas, que entran al edificio al azar, elegirán la misma puerta.

43. Bill, Carol y Alice se van a sentar al azar en una fila de tres asientos. Encuentre la probabilidad de que Bill y Carol se sienten lado a lado.

44. April, Bill, Carl y Denise se van a sentar al azar en una fila de cuatro sillas. ¿Cuál es la probabilidad de que April y Bill ocupen los asientos de los extremos?

45. Un comité de cuatro niñas se va a elegir al azar de las cinco niñas Alice, Becky, Candy, Dee y Elaine. Encuentre la probabilidad de que Elaine no esté en el comité.

46. Tres niños y dos niñas se sentarán al azar en una fila de cinco asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que los niños y las niñas se sienten en asientos alternos?

47. Cuatro diferentes libros de matemáticas y cinco diferentes libros de historia se colocan al azar en un anaquel. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los libros sobre una materia estén lado a lado?

48. Cada una de tres cartas se colocará en uno de cinco diferentes buzones. ¿Cuál es la probabilidad de que todas se colocarán en el mismo buzón?

49. Forme al azar un número de cuatro dígitos usando los dígitos 2, 3, 4 y 6 una vez cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 4000?

50. Seleccione al azar una de las 120 permutaciones de las letras a, b, c, d y e. Encuentre la probabilidad de que, en la permutación elegida, la letra a preceda a la b (la a está a la izquierda de la b).

51. Un comité de cuatro se elige al azar de un grupo de seis mujeres y cinco hombres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga dos mujeres y dos hombres.

52. Un comité de tres se elige al azar de un grupo de cuatro mujeres y cinco hombres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos un hombre.

53. Ahmed, Bob, Carl, Dan, Ed, Frank, Gino, Harry, Julio y Mike se dividen al azar en dos equipos diferentes de cinco hombres para un juego de básquetbol. ¿Cuál es la probabilidad de que Ahmed, Bob y Carl estén en el mismo equipo?

54. Se lanzan siete monedas. Encuentre la probabilidad de sacar cuatro caras y tres cruces.

55. Se lanzan nueve monedas. Encuentre la probabilidad de sacar tres caras y seis cruces.

56. Se lanzan seis monedas. Encuentre la probabilidad de sacar al menos cuatro caras.

57. Se lanzan cinco monedas. Encuentre la probabilidad de sacar no más de tres caras.

58. Cada arreglo de las 11 letras de la palabra MISSISSIPPI se pone en una tira de papel y se coloca en un sombrero. Una tira se extrae al azar del sombrero. Encuentre la probabilidad de que la tira contenga un arreglo de las letras con las cuatro S al principio.

59. Cada arreglo de las siete letras de la palabra ÓSMOSIS se pone en una tira de papel y se coloca en un sombrero. Una tira se saca al azar del sombrero. Encuentre la probabilidad de que la tira contenga un arreglo de las letras con una O al principio y una O al final.

60. Considere todos los posibles arreglos de tres H idénticas y tres T idénticas. Suponga que uno de estos arreglos se selecciona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el arreglo seleccionado tenga las tres H en posiciones consecutivas?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

61. Explique los conceptos de espacio muestral y espacio evento.

62. ¿Por qué las respuestas de probabilidad caen entre 0 y 1, inclusive? Dé un ejemplo de una situación para la cual la probabilidad sea 0. También dé un ejemplo para el cual la probabilidad sea 1.

MÁS INVESTIGACIÓN

En el problema 7 de la sección 15.2 se encontró que hay 2 598 960 diferentes manos de cinco cartas que se pueden repartir de un mazo de 52 naipes. Por tanto, las probabilidades para ciertos tipos de manos de póker de cinco cartas se pueden calcular usando 2 598 960 como el número de elementos en el espacio muestral. Para los problema 63-71,

determine el número de diferentes manos de póker de cinco cartas del tipo indicado que se puedan obtener.

63. Flor corrida (cinco cartas en secuencia y del mismo palo; los ases son tanto bajos como altos, de modo que A2345 y 10JQKA son aceptables)

64. Póker (cuatro del mismo valor, como cuatro reyes)

65. Full (tres cartas de un valor y dos cartas de otro valor)

66. Flor (cinco cartas del mismo palo pero no en secuencia)

67. Corrida (cinco cartas en secuencia mas no todas del mismo palo)

68. Tercia (tres cartas de un valor y dos cartas de dos diferentes valores)

69. Dos pares

70. Exactamente un par

71. Ningún par

15.4 Algunas propiedades de la probabilidad: valores esperados

Existen muchas propiedades básicas que son útiles en el estudio de la probabilidad, desde puntos de vista tanto teóricos como computacionales. Se estudiarán dos de estas propiedades en este momento, y algunas adicionales en la siguiente sección. La primera propiedad parece establecer lo obvio, pero todavía necesita mencionarse.

Propiedad 15.1

Para todos los eventos E,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

La propiedad 15.1 simplemente afirma que las probabilidades deben caer en el rango de 0 a 1, inclusive. Esto parece razonable porque $P(E) = n(E)/n(S)$ y E es un subconjunto de S. Los siguientes dos ejemplos ilustran circunstancias donde $P(E) = 0$ y $P(E) = 1$.

PROBLEMA 1

Lance un dado de seis lados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7?

Solución

El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por tanto $n(S) = 6$. El espacio evento es $E = \varnothing$, de modo que $n(E) = 0$. En consecuencia, la probabilidad de obtener un 7 es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

■

PROBLEMA 2

¿Cuál es la probabilidad de sacar una cara o una cruz con el lanzamiento de una moneda?

Solución

El espacio muestral es $S = \{\text{H}, \text{T}\}$, y el espacio evento es $E = \{\text{H}, \text{T}\}$. Por tanto, $n(S) = n(E) = 2$, y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{2} = 1$$

■

Un evento que tiene una probabilidad de 1 en ocasiones se llama **éxito seguro**, y un evento con una probabilidad de 0 se llama **falla segura**.

También se debe mencionar que la propiedad 15.1 sirve como comprobación de lo razonable de las respuestas. En otras palabras, cuando se calculan probabilidades, se sabe que la respuesta debe caer entre 0 y 1, inclusive. Cualquiera otra respuesta de probabilidad simplemente no es razonable.

Eventos complementarios

Los **eventos complementarios** son conjuntos complementarios tales que S, el espacio muestral, sirve como el conjunto universo. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

Espacio muestral	Espacio evento	Complemento de espacio evento
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{1, 2\}$	$E' = \{3, 4, 5, 6\}$
$S = \{\text{H}, \text{T}\}$	$E = \{\text{T}\}$	$E' = \{\text{H}\}$
$S = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$	$E = \{2, 3, 4\}$	$E' = \{5, 6, 7, \ldots, 12\}$
$S = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$	$E = \{3, 4, 5, \ldots, 25\}$	$E' = \{1, 2\}$

En cada caso note que E' (el complemento de E) consiste de todos los elementos de S que *no* están en E. Por tanto, E y E' se llaman *eventos complementarios*. Note también que, para cada ejemplo, $P(E) + P(E') = 1$. Es posible enunciar la siguiente propiedad general:

Propiedad 15.2

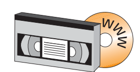
Si E es cualquier evento de un espacio muestral S, y E' es el evento complementario, entonces

$$P(E) + P(E') = 1$$

Desde un punto de vista de cálculo, la propiedad 15.2 permite un ataque de doble sentido en algunos problemas de probabilidad. Esto es, una vez que calcule $P(E)$ o $P(E')$, puede determinar el otro simplemente al restar de 1. Por ejemplo, suponga que para un problema particular se puede determinar que $P(E) = \frac{3}{13}$. Entonces inmediatamente se sabe que $P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$. Los siguientes ejemplos ilustran aún más la utilidad de la propiedad 15.2.

PROBLEMA 3

Se lanzan dos dados. Encuentre la probabilidad de sacar una suma mayor que 3.



Solución

Sea S el espacio muestral familiar de pares ordenados para este problema, donde $n(S) = 36$. Sea E el evento de obtener una suma mayor que 3. Entonces E' es el evento de obtener una suma menor que o igual a 3; esto es, $E' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. Por tanto

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

A partir de esto se concluye que

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$ ■

PROBLEMA 4

Lance tres monedas y encuentre la probabilidad de sacar al menos una cara.

Solución

El espacio muestral, S, consiste de todos los posibles resultados de lanzar tres monedas. Al usar el principio fundamental de conteo se sabe que hay $(2)(2)(2) = 8$ resultados, de modo que $n(S) = 8$. Sea E el evento de sacar al menos una cara. Entonces E' es el evento complementario de no sacar cara alguna. El conjunto E' es fácil de listar: $E' = \{(\text{T, T, T})\}$. Por tanto, $n(E') = 1$ y $P(E') = \frac{1}{8}$. A partir de esto, $P(E)$ se puede determinar como

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$ ■

PROBLEMA 5

Un comité de tres personas se elige al azar de un grupo de cinco mujeres y cuatro hombres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos una mujer.

Solución

Sea el espacio muestral, S, el conjunto de todos los posibles comités de tres personas que se pueden formar a partir de nueve personas. Existen $C(9, 3) = 84$ de tales comités; por tanto, $n(S) = 84$.

Sea E el evento *el comité contiene al menos una mujer*. Entonces E' es el evento complementario, *el comité contiene todos hombres*. Por tanto, E' consiste de todos los comités de tres hombres que se pueden formar a partir de cuatro hombres. Hay $C(4, 3) = 4$ de tales comités; en consecuencia, $n(E') = 4$. Se tiene

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

que determina $P(E)$ como

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$ ■

Los conceptos de **intersección de conjuntos** y **unión de conjuntos** juegan un importante papel en el estudio de la probabilidad. Si E y F son dos eventos en un espacio muestral S, entonces $E \cap F$ es el evento que consiste de todos los puntos muestrales de S que están tanto en E como en F, como se indica en la figura 15.2. Del mismo modo, $E \cup F$ es el evento que consiste de todos los puntos muestrales de S que están en E o F, o ambos, como se muestra en la figura 15.3.

En la figura 15.4 hay 47 puntos muestrales en E, 38 puntos muestrales en F y 15 puntos muestrales en $E \cap F$. ¿Cuántos puntos muestrales hay en $E \cup F$? Simplemente sumar el número de puntos en E y F resultaría en contar los 15 puntos en

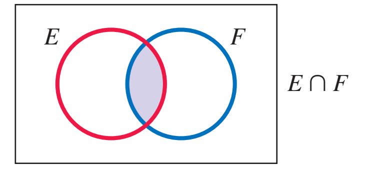


Figura 15.2

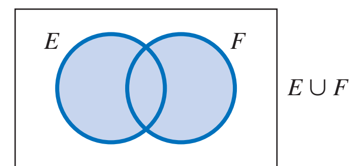


Figura 15.3

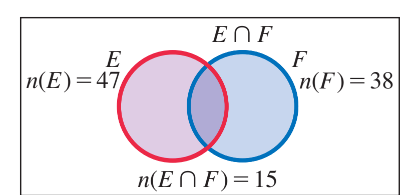


Figura 15.4

$E \cap F$ dos veces. Por tanto, se debe restar 15 del número total de puntos en E y F, lo que produce $47 + 38 - 15 = 70$ puntos en $E \cup F$. Es posible enunciar la siguiente propiedad general de conteo:

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$$

Si divide ambos lados de esta ecuación entre $n(S)$ se obtiene la siguiente propiedad de probabilidad:

Propiedad 15.3

Para los eventos E y F de un espacio muestral S,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

PROBLEMA 6

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un número primo con un lanzamiento de un dado?

Solución

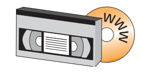
Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral, $E = \{1, 3, 5\}$ el evento de sacar un número impar, y $F = \{2, 3, 5\}$ el evento se sacar un número primo. Entonces $E \cap F = \{3, 5\}$, y usando la propiedad 15.3, se obtiene

$$P(E \cup F) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

■

PROBLEMA 7

Lance tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras o exactamente una cruz?



Solución

Al usar el principio fundamental de conteo, se sabe que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibles resultados de lanzar tres monedas; por ende, $n(S) = 8$. Sea

$$E = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

el evento de sacar al menos dos caras, y sea

$$F = \{(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

el evento de sacar exactamente una cara. Entonces

$$E \cap F = \{(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

y se puede calcular $P(E \cup F)$ del modo siguiente.

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{4}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

En la propiedad 15.3, si $E \cap F = \varnothing$, entonces se dice que los eventos E y F son **mutuamente excluyentes**. En otras palabras, los eventos mutuamente excluyentes son eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, cuando se lanza un dado, el evento de sacar un 4 y el evento de sacar un 5 son mutuamente excluyentes; no pueden ocurrir ambos en la misma tirada. Si $E \cap F = \varnothing$, entonces $P(E \cap F) = 0$, y la propiedad 15.3 se convierte en $\boldsymbol{P(E \cup F) = P(E) + P(F)}$ **para eventos mutuamente excluyentes**.

PROBLEMA 8

Suponga que en un frasco tiene cinco canicas blancas, siete verdes y nueve rojas. Si una canica se saca al azar del frasco, encuentre la probabilidad de que sea blanca o verde.

Solución

Los eventos de extraer una canica blanca y una canica verde son mutuamente excluyentes. Por tanto, la probabilidad de extraer una canica blanca o una verde es

$$\frac{5}{21} + \frac{7}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

■

Note que en la solución del problema 8, no se nombró explícitamente ni listaron los elementos del espacio muestral ni los espacios evento. Fue obvio que el espacio muestral contenía 21 elementos (21 canicas en el frasco) y que los espacios evento contenían cinco elementos (cinco canicas blancas) y siete elementos (siete canicas verdes). Por tanto, no era necesario nombrar ni listar el espacio muestral ni los espacios evento.

PROBLEMA 9

Suponga que los datos en la tabla siguiente representan los resultados de una encuesta de 1000 conductores después de un fin de semana de fiesta.

	Lluvia (R)	Sin lluvia (R')	Total
Accidente (A)	35	10	45
Sin accidente (A')	450	505	955
Total	485	515	1000

Si una persona se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la persona estuviera en un accidente o que lloviera?

Solución

Primero forme una **tabla de probabilidad** al dividir cada entrada entre 1000, el número total encuestado.

	Lluvia (R)	**Sin lluvia (R')**	**Total**
Accidente (A)	0.035	0.010	0.045
Sin accidente (A')	0.450	0.505	0.955
Total	0.485	0.515	1.000

Ahora puede usar la propiedad 15.3 y calcular $P(A \cup R)$.

$$P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R)$$
$$= 0.045 + 0.485 - 0.035$$
$$= 0.495$$

■

Valor esperado

Suponga que lanza una moneda 500 veces. Esperaría obtener aproximadamente 250 caras. En otras palabras, puesto que la probabilidad de sacar una cara con un lanzamiento de una moneda es $\frac{1}{2}$, en 500 lanzamientos sacaría aproximadamente $500\left(\frac{1}{2}\right) = 250$ caras. La palabra "aproximadamente" porta una idea clave. Como se sabe por la experiencia, es posible lanzar una moneda varias veces y sacar todas caras. Sin embargo, con un gran número de lanzamientos, las cosas deben promediarse de modo que se obtenga aproximadamente igual número de caras y cruces.

Como otro ejemplo considere el hecho de que la probabilidad de sacar una suma de 6 con un lanzamiento de un par de dados es $\frac{5}{36}$. Por tanto, si un par de dados se lanza 360 veces, se esperaría obtener una suma de 6 aproximadamente $360\left(\frac{5}{36}\right) = 50$ veces.

Ahora se definirá el concepto de *valor esperado*.

Definición 15.2

Si a los k posibles resultados de un experimento se les asignan los valores x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_k$, y si ocurren con probabilidades de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, respectivamente, entonces el **valor esperado** del experimento (E_v) está dado por

$$E_v = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_kp_k$$

El concepto de valor esperado (también llamado **expectativa matemática**) se usa en varias situaciones de probabilidad que tratan con cosas tales como imparcialidad de los juegos y toma de decisiones en aventuras empresariales. Considere algunos ejemplos.

PROBLEMA 10

Suponga que compra un boleto en una lotería donde se venden 1000 boletos. Más aún, suponga que se otorgarán tres premios: uno de \$500, uno de \$300 y uno de \$100. ¿Cuál es su expectativa matemática?

Solución

Dado que compró un boleto, la probabilidad de que usted gane \$500 es $\frac{1}{1000}$; la probabilidad de que gane \$300 es $\frac{1}{1000}$, y la probabilidad de que gane \$100 es $\frac{1}{1000}$. Al multiplicar cada una de estas probabilidades por el correspondiente precio monetario y luego sumar los resultados, su expectativa matemática.

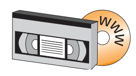
$$\begin{aligned} E_v &= \$500\left(\frac{1}{100}\right) + \$300\left(\frac{1}{1000}\right) + \$100\left(\frac{1}{100}\right) \\ &= \$0.50 + \$0.30 + \$0.10 \\ &= \$0.90 \end{aligned}$$

■

En el problema 10, si paga más de \$0.90 por un boleto, entonces no es un **juego justo** desde su punto de vista. Si el precio del juego se incluye en el cálculo del valor esperado, entonces un juego justo se define como aquel donde el valor esperado es cero.

PROBLEMA 11

Un jugador paga \$5 por jugar un juego donde la probabilidad de ganar es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de perder es $\frac{4}{5}$. Si el jugador gana el juego, recibe \$25. ¿Éste es un juego justo para el jugador?



Solución

A partir de la definición 15.2, sea $x_1 = \$20$, lo que representa los \$25 ganados menos los \$5 pagados por jugar, y sea $x_2 = -\$5$ la cantidad pagada por jugar el juego. También se proporciona que $p_1 = \frac{1}{5}$ y $p_2 = \frac{4}{5}$. Por tanto, el valor esperado es

$$\begin{aligned} E_v &= \$20\left(\frac{1}{5}\right) + (-\$5)\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \$4 - \$4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que el valor esperado es cero, es un juego justo. ■

PROBLEMA 12

Suponga que usted está interesado en asegurar un anillo de diamantes por \$2000 contra robo. Una compañía aseguradora cobra una prima de \$25 por año, y afirma que hay una probabilidad de 0.01 de que el anillo sea robado durante el año. ¿Cuál es su ganancia o pérdida esperada si toma el seguro?

Solución

A partir de la definición 15.2, sea $x_1 = \$1975$, lo que representa los \$2000 menos el costo de la prima, \$25, y sea $x_2 = -\$25$. También se proporcionan $p_1 = 0.01$, de modo que $p_2 = 1 - 0.01 = 0.99$. Por tanto, el valor esperado es

$$\begin{aligned} E_v &= \$1975(0.01) + (-\$25)(0.99) \\ &= \$19.75 - \$24.75 \\ &= -\$5.00 \end{aligned}$$

Esto significa que, si asegura con esta compañía durante muchos años, y las circunstancias permanecen iguales, tendrá una pérdida neta promedio de \$5 por año. ■

Conjunto de problemas 15.4

Para los problemas 1-4 se lanzan *dos* dados. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

1. Una suma de 6

2. Una suma mayor que 2

3. Una suma menor que 8

4. Una suma mayor que 1

Para los problemas 5-8 se lanzan *tres* dados. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

5. Una suma de 3

6. Una suma mayor que 4

7. Una suma menor que 17

8. Una suma mayor que 18

Para los problemas 9-12 se lanzan *cuatro* monedas. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

9. Cuatro caras

10. Tres caras y una cruz

11. Al menos una cruz

12. Al menos una cara

Para los problemas 13-16 se lanzan *cinco* monedas. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

13. Cinco cruces

14. Cuatro caras y una cruz

15. Al menos una cruz

16. Al menos dos caras

Para los problemas 17-23 resuelva cada problema.

17. Lance un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un doble?

18. La probabilidad de que cierto caballo ganará el Derby de Kentucky es $\frac{1}{20}$. ¿Cuál es la probabilidad de que perderá la carrera?

19. Una carta se extrae al azar de un mazo de 52 naipes. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un as?

20. Se lanzan seis monedas. Encuentre la probabilidad de sacar al menos dos caras.

21. Un subconjunto de dos letras se elige al azar del conjunto {a, b, c, d, e, f, g, h, i}. Encuentre la probabilidad de que el subconjunto contenga al menos una vocal.

22. Un comité de dos personas se eligen al azar de un grupo de cuatro hombres y tres mujeres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos un hombre.

23. Un comité de tres personas se elige al azar de un grupo de siete mujeres y cinco hombres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos un hombre.

Para los problemas 24-27 se lanza un dado. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

24. Un 3 o un número impar

25. Un 2 o un número impar

26. Un número par o un número primo

27. Un número impar o un múltiplo de 3

Para los problemas 28-31 se lanzan dos dados. Encuentre la probabilidad de tirar cada uno de los siguientes eventos:

28. Un doble o una suma de 6

29. Una suma de 10 o una suma mayor que 8

30. Una suma de 5 o una suma mayor que 10

31. Un doble o una suma de 7

Para los problemas 32-56 resuelva cada problema.

32. Se lanzan dos monedas. Encuentre la probabilidad de sacar exactamente una cara o al menos una cruz.

33. Se lanzan tres monedas. Encuentre la probabilidad de sacar al menos dos caras o exactamente una cruz.

34. Un frasco contiene siete canicas blancas, seis azules y diez rojas. Si una canica se extrae al azar del frasco, encuentre la probabilidad de que (a) la canica sea blanca o azul; (b) la canica sea blanca o roja; (c) la canica sea azul o roja.

35. Se lanzan una moneda y un dado. Encuentre la probabilidad de sacar una cara en la moneda o un 2 en el dado.

36. Una carta se extraer el azar de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que sea una carta roja o una carta de cara. (Las cartas de cara son jacks, reinas y reyes.)

37. Los datos en la siguiente tabla representan los resultados de una encuesta de 1000 conductores después de un fin de semana de fiesta.

	Lluvia (R)	**Sin lluvia (R')**	**Total**
Accidente (A)	45	15	60
Sin accidente (A')	350	590	940
Total	395	605	1000

Si una persona se selecciona al azar a partir de esta encuesta, encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos. (Exprese las probabilidades en forma decimal.)
(a) La persona estuvo en un accidente o llovía.
(b) La persona no estuvo en un accidente o llovía.
(c) La persona no estaba en un accidente o no llovía.

38. Cien personas se encuestaron y una pregunta pertenecía a su antecedente educativo. Los resultados de esta pregunta se citan en la siguiente tabla.

	Mujer (F)	**Hombre (F')**	**Total**
Grado universitario (D)	30	20	50
Sin grado universitario (D′)	15	35	50
Total	45	55	100

Si una persona se selecciona al azar a partir de esta encuesta, encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos. Exprese las probabilidades en forma decimal.
(a) La persona es mujer o tiene un grado universitario.
(b) La persona es hombre o no tiene grado universitario.
(c) La persona es mujer o no tiene grado universitario.

39. En una elección reciente había 1000 votantes elegibles. Se les pidió votar acerca de dos temas, A y B. Los resultados fueron los siguientes: 300 personas votaron por A, 400 personas votaron por B y 175 votaron tanto por A como por B. Si una persona se elige al azar de los 1000 votantes elegibles, encuentre la probabilidad de que la persona votó por A o B.

40. Una compañía tiene 500 empleados entre quienes 200 son mujeres, tiene 15 ejecutivos de alto nivel y 7 de los ejecutivos de alto nivel son mujeres. Si uno de los 500 empleados se elije al azar, encuentre la probabilidad de que la persona elegida sea mujer o sea un ejecutivo de alto nivel.

41. Un dado se lanza 360 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar un 6?

42. Dos dados se lanzan 360 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar una suma de 5?

43. Dos dados se lanzan 720 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar una suma mayor que 9?

44. Cuatro monedas se lanzan 80 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar una cara y tres cruces?

45. Cuatro monedas se lanzan 144 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar cuatro cruces?

46. Dos dados se lanzan 300 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar un doble?

47. Tres monedas se lanzan 448 veces. ¿Cuántas veces esperaría sacar tres caras?

48. Suponga que 5000 boletos se venden en una lotería. Existen tres premios: el primero es de $1000, el segundo es de $500 y el tercero es de $100. ¿Cuál es la expectativa matemática de ganar?

49. Su amigo lo reta con el siguiente juego: tiene que lanzar un par de dados y él le dará $5 si obtiene una suma de 2 o 12, $2 si obtiene una suma de 3 u 11, $1 si obtiene una suma de 4 o 10. De otro modo, usted le pagará a él $1. ¿Debe jugar el juego?

50. Un contratista apuesta en un proyecto de construcción. Hay una probabilidad de 0.8 de que pueda mostrar una ganancia de $30 000 y una probabilidad de 0.2 de que tendrá que absorber una pérdida de $10 000. ¿Cuál es la expectativa matemática?

51. Suponga que una persona lanza dos monedas y recibe $5 si salen 2 caras, recibe $2 si sale 1 cara y 1 cruz, y tiene que pagar $2 si salen 2 caras. ¿El juego es justo para él?

52. Una "rueda de la fortuna" se divide en cuatro colores: rojo, blanco, azul y amarillo. La probabilidad de que el giro se detenga en cada uno de los colores y el dinero recibido está dado por la siguiente tabla. El precio por girar la rueda es $1.50. ¿El juego es justo?

Color	Probabilidad de caer en el color	Dinero recibido por caer en el color
Rojo	$\frac{4}{10}$	$.50
Blanco	$\frac{3}{10}$	1.00
Azul	$\frac{2}{10}$	2.00
Amarillo	$\frac{1}{10}$	5.00

53. Un contratista estima una probabilidad de 0.7 de hacer $20 000 en un proyecto de construcción y una probabilidad de 0.3 de perder $10 000 en el proyecto. ¿Cuál es su expectativa matemática?

54. Un granjero estima su cultivo de maíz en 30 000 fanegas. Sobre la base de la experiencia pasada, también estima una probabilidad de $\frac{3}{5}$ de que tendrá una ganancia de $0.50 por fanega y una probabilidad de $\frac{1}{5}$ de perder $0.30 por fanega. ¿Cuál es su ingreso esperado por el cultivo de maíz?

55. Bill descubre que la prima anual por asegurar contra robo un sistema estéreo por $2500 es de $75. Si la probabilidad de que el equipo sea robado durante el año es 0.02, ¿cuál es la ganancia o pérdida esperada de Bill por tomar el seguro?

56. Sandra descubre que la prima anual por una póliza de seguro de $2000 contra el robo de una pintura es $100. Si la probabilidad de que la pintura se robe durante el año es 0.01, ¿cuál es la ganancia o pérdida esperada de Sandra por tomar el seguro?

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

57. Si la probabilidad de que un evento ocurra es 0.4, ¿cuál es la probabilidad de que el evento no suceda? Explique su respuesta.

58. Explique cada uno de los siguientes conceptos a un amigo que faltó a clase el día cuando se estudió esta sección: el uso de eventos complementarios para determinar probabilidades, el uso de la unión y la intersección de conjuntos para determinar las probabilidades, y el uso del valor esperado para determinar lo justo de un juego.

MÁS INVESTIGACIÓN

En ocasiones se usa el término **probabilidades** para expresar un enunciado de probabilidad. Por ejemplo, puede decir "las probabilidades en favor de que los Cachorros ganen el campeonato son de 5 a 1", o "las probabilidades en contra de que los Mets ganen el campeonato son de 50 a 1". Las *probabilidades en favor* o *en contra* para resulta-

dos igualmente probables se pueden definir del modo siguiente:

$$\text{Probabilidades en favor} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de resultados desfavorables}}$$

$$\text{Probabilidades en contra} = \frac{\text{Número de resultados desfavorables}}{\text{Número de resultados favorables}}$$

Se usó la forma fraccionaria para definir las probabilidades; sin embargo, en la práctica, por lo general se usa la preposición *a*. Por tanto, las probabilidades en favor de tirar un 4 con un lanzamiento de dado por lo general se enuncian como *1 a 5* en lugar de $\frac{1}{5}$. Las probabilidades en contra de tirar un 4 se enuncia como *5 a 1*.

El enunciado *las probabilidades en favor de* los Cachorros significa que hay 5 resultados favorables comparados con 1 desfavorable, o un total de 6 posibles resultados, de modo que el enunciado *5 a 1 en favor de*, también significa que la probabilidad de que los Cachorros ganen el campeonato es $\frac{5}{6}$. Del mismo modo, el enunciado *50 a 1 en contra* acerca de los Mets significa que la probabilidad de que los Mets no ganarán el campeonato es $\frac{50}{51}$.

Usualmente, las probabilidades se enuncian en forma reducida. Por ejemplo, las probabilidades de 6 a 4 por lo general se enuncian como 3 a 2. Del mismo modo, una fracción que representa probabilidad se reduce antes de cambiar a un enunciado acerca de probabilidades.

59. ¿Cuáles son las probabilidades en favor de sacar tres caras con un lanzamiento de tres monedas?

60. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar cuatro cruces con un lanzamiento de cuatro monedas?

61. ¿Cuáles son las probabilidades en contra de sacar tres caras y dos cruces con un lanzamiento de cinco monedas?

62. ¿Cuáles son las probabilidades en favor de sacar cuatro caras y dos cruces con un lanzamiento de seis monedas?

63. ¿Cuáles son las probabilidades en favor de sacar una suma de 5 con un lanzamiento de un par de dados?

64. ¿Cuáles son las probabilidades en contra de sacar una suma mayor que 5 con un lanzamiento de un par de dados?

65. Suponga que extrae una carta al azar de un mazo de 52 naipes. Encuentre las probabilidades en contra de extraer una carta roja.

66. Suponga que una carta se extrae al azar de un mazo de 52 naipes. Encuentre las probabilidades en favor de extraer un as o un rey.

67. Si $P(E) = \frac{4}{7}$ para algún evento E, encuentre las probabilidades en favor de que E ocurra.

68. Si $P(E) = \frac{5}{9}$ para algún evento E, encuentre las probabilidades en contra de que E ocurra.

69. Suponga que hay una posibilidad predicha de 40% de que llueva granizo. Establezca la predicción en términos de las probabilidades en contra de que llueva granizo.

70. Suponga que hay una posibilidad predicha de 20% de tormentas eléctricas. Establezca la predicción en términos de las probabilidades en favor de tener tormentas eléctricas.

71. Si las probabilidades en contra de que ocurra un evento son 5 a 2, encuentre la probabilidad de que el evento ocurrirá.

72. Las probabilidades en contra de que Belly Dancer gane la quinta carrera son 20 a 9. ¿Cuál es la probabilidad de que Belly Dancer gane la quinta carrera?

73. Las probabilidades en favor de que los Mets ganen el campeonato se establecen como 7 a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que los Mets ganen el campeonato?

74. La siguiente tabla contiene algunas probabilidades de manos de póker. Complete la última columna, "Probabilidades en contra de que se reparta esta mano". Note que las fracciones se reducen antes de cambiarse a probabilidades.

Mano de 5 cartas	Probabilidad de repartir esta mano	Probabilidades en contra de que se reparta esta mano
Flor corrida	$\frac{40}{2\,598\,960} = \frac{1}{64\,974}$	64 973 a 1
Póker	$\frac{624}{2\,598\,960} =$	
Full	$\frac{3744}{2\,598\,960} =$	
Flor	$\frac{5108}{2\,598\,960} =$	
Corrida	$\frac{10\,200}{2\,598\,960} =$	
Tercia	$\frac{54\,912}{2\,598\,960} =$	
Dos pares	$\frac{123\,552}{2\,598\,960} =$	
Un par	$\frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} =$	
Sin par	$\frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} =$	

15.5 Probabilidad condicional: eventos dependientes e independientes

Con frecuencia dos eventos se relacionan en tal forma que la probabilidad de uno de ellos puede variar dependiendo de si el otro evento ocurrió. Por ejemplo, el pronóstico de lluvia puede cambiar drásticamente si se obtiene información que indique que un frente se mueve por el área. Matemáticamente, la información adicional acerca del frente cambia el espacio muestral de la probabilidad de lluvia.

En general, la probabilidad de la ocurrencia de un evento E, dada la ocurrencia de otro evento F, se llama **probabilidad condicional** y se denota $P(E|F)$. Observe un ejemplo simple y úselo para deducir una definición para la probabilidad condicional.

¿Cuál es la probabilidad de sacar un número primo en un lanzamiento de un dado? Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de modo que $n(S) = 6$, y sea $E = \{2, 3, 5\}$, de modo que $n(E) = 3$. Por tanto

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A continuación, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número primo en una tirada de un dado, *dado que salió un número impar*? Sea $F = \{1, 3, 5\}$ el nuevo espacio muestral de números impares. Entonces $n(F) = 3$. Ahora se está interesado sólo en aquella parte de E (sacar un número primo) que también está en F; en otras palabras, $E \cap F$. En consecuencia, puesto que $E \cap F = \{3, 5\}$, la probabilidad de E dado F es

$$P(E|F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} = \frac{2}{3}$$

Cuando divide tanto el numerador como el denominador de $n(E \cap F)/n(F)$ entre $n(S)$ se obtiene

$$\frac{\dfrac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\dfrac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Por tanto, se puede enunciar la siguiente definición general de la probabilidad condicional de E dado F para eventos arbitrarios E y F:

Definición 15.3

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \qquad P(F) \neq 0$$

En un problema de la sección previa se formó la siguiente tabla de probabilidad relativa a accidentes automovilísticos y condiciones climatológicas en un fin de semana de fiesta.

	Lluvia (R)	**Sin lluvia (R')**	**Total**
Accidente (A)	0.035	0.010	0.045
Sin accidente (A')	0.450	0.505	0.955
Total	0.485	0.515	1.000

A continuación se presentan algunas probabilidades condicionales que se pueden calcular a partir de la tabla:

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0.035}{0.485} = \frac{35}{485} = \frac{7}{97}$$

$$P(A'|R) = \frac{P(A' \cap R)}{P(R)} = \frac{0.450}{0.485} = \frac{450}{485} = \frac{90}{97}$$

$$P(A|R') = \frac{P(A \cap R')}{P(R')} = \frac{0.010}{0.515} = \frac{10}{515} = \frac{2}{103}$$

Note que la probabilidad de un accidente dado que llovía, $P(A|R)$, es mayor que la probabilidad de un accidente dado que no llovía, $P(A|R')$. Esto parece razonable.

PROBLEMA 1

Se lanza un dado. Encuentre la probabilidad de que salga un 4 si se sabe que salió un número par.

Solución

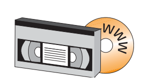
Sea E el evento de sacar un 4, y sea F el evento de sacar un número par. Por tanto, $E = \{4\}$ y $F = \{2, 4, 6\}$, de lo cual se obtiene $E \cap F = \{4\}$. Al usar la definición 15.3 se obtiene

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

■

PROBLEMA 2

Suponga que la probabilidad de que un estudiante se matricule en un curso de matemáticas es de 0.45, la probabilidad de que se matricule en un curso de ciencia es de 0.38, y la probabilidad de que se matricule en ambos cursos es de 0.26. Encuentre la probabilidad de que un estudiante se matricule en un curso de matemáticas, dado que también se matricule en un curso de ciencia. Además, encuentre la probabilidad de que un estudiante se matricule en un curso de ciencia, dado que se matriculó en matemáticas.



Solución

Sea M el evento *matriculará en matemáticas*, y sea S el evento *matriculará en ciencia*. Por tanto, al usar la definición 10.3, se obtiene

$$P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0.26}{0.38} = \frac{26}{38} = \frac{13}{19}$$

y

$$P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0.26}{0.45} = \frac{26}{45}$$

■

Eventos independientes y dependientes

Suponga que, cuando se calcula una probabilidad condicional, se encuentra que

$$P(E|F) = P(E)$$

Esto significa que la probabilidad de E no se afecta por la ocurrencia o no ocurrencia de F. En tal situación, se dice que el evento E es *independiente* del evento F. Se puede demostrar que, si el evento E es independiente del evento F, entonces F también es independiente de E; por tanto, E y F se refieren como **eventos independientes**. Más aún, a partir de las ecuaciones

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \text{y} \qquad P(E|F) = P(E)$$

se ve que

$$\frac{P(E \cap F)}{P(F)} = P(E)$$

que se puede escribir

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Por tanto, se enuncia la siguiente definición general:

Definición 15.4

Se dice que dos eventos E y F son **independientes** si y sólo si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Dos eventos que no son independientes se llaman **eventos dependientes**.

En la tabla de probabilidad que precede al problema 1 se ve que $P(A) = 0.045$, $P(R) = 0.485$, y $P(A \cap R) = 0.035$. Puesto que

$$P(A)P(R) = (0.045)(0.485) = 0.021825$$

y esto no es igual a $P(A \cap R)$, los eventos A (tener un accidente automovilístico) y R (condiciones lluviosas) no son independientes. Esto no es de sorprender; ciertamente se esperaría que condiciones lluviosas y accidentes automovilísticos se relacionen.

PROBLEMA 3

Suponga que se tiran un dado blanco y un dado rojo. Si E es el evento *tirar un 4 en el dado blanco* y si F es el evento *tirar un 6 en el dado rojo*. ¿E y F son eventos independientes?

Solución

El espacio muestral para tirar un par de dados tiene (6)(6) = 36 elementos. Al usar notación de pares ordenados, donde la primera entrada representa el dado blanco y la segunda entrada el dado rojo, se pueden listar los eventos E y F del modo siguiente:

$$E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$$
$$F = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

Por tanto, $E \cap F = \{(4, 6)\}$. Puesto que $P(F) = \frac{1}{6}$, $P(E) = \frac{1}{6}$ y $P(E \cap F) = \frac{1}{36}$, se ve que $P(E \cap F) = P(E)P(F)$, y los eventos E y F son independientes. ■

PROBLEMA 4

Se lanzan dos monedas. Sea E el evento *lanzar no más de una cara*, y sea F el evento *lanzar al menos una de cada cara*. ¿Estos eventos son independientes?

Solución

El espacio muestral tiene (2)(2) = 4 elementos. Los eventos E y F se pueden listar del modo siguiente:

$$E = \{(\text{H, T}), (\text{T, H}), (\text{T, T})\}$$
$$F = \{(\text{H, T}), (\text{T, H})\}$$

Por tanto, $E \cap F = \{(\text{H, T}), (\text{T, H})\}$. Puesto que $P(E) = \frac{3}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ y $P(E \cap F) = \frac{1}{2}$, se ve que $P(E \cap F) \neq P(E)P(F)$, de modo que los eventos E y F son dependientes. ■

En ocasiones el tema de la independencia se puede decidir mediante la naturaleza física de los eventos en el problema. Por ejemplo, en el problema 3, debe ser evidente que tirar un 4 en el dado blanco no se afecta por tirar un 6 en el dado rojo. Sin embargo, como en el problema 4, la descripción de los eventos puede no indicar con claridad si los eventos son dependientes.

Desde un punto de vista de resolución de problemas, los siguientes dos enunciados son muy útiles.

1. Si E y F son eventos independientes, entonces

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

(Esta propiedad se generaliza a cualquier número finito de eventos independientes.)

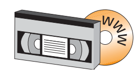
2. Si E y F son eventos dependientes, entonces

$$P(E \cap F) = P(E)P(F|E)$$

Analice algunos problemas usando estas ideas.

PROBLEMA 5

Un dado se lanza tres veces. (Esto es equivalente a lanzar tres dados uno a la vez.) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6 las tres veces?



Solución

Los eventos de un 6 en la primera tirada, un 6 en la segunda tirada y un 6 en la tercera tirada son eventos independientes. Por tanto, la probabilidad de sacar tres 6 es

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{216}$$

■

PROBLEMA 6

Un frasco contiene cinco canicas blancas, siete verdes y nueve rojas. Si dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*, encuentre la probabilidad de que ambas canicas sean blancas.

Solución

Sea E el evento de extraer una canica blanca en la primera extracción, y sea F el evento de extraer una canica blanca en la segunda extracción. Puesto que la canica que se extrae primero no se sustituye antes de extraer la segunda canica, se tienen eventos dependientes. Por tanto

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)P(F|E) \\ &= \left(\frac{5}{21}\right)\left(\frac{4}{20}\right) = \frac{20}{420} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

$P(F|E)$ significa la probabilidad de extraer una canica blanca en la segunda extracción, dado que en la primera extracción se obtuvo una canica blanca

■

El concepto de *eventos mutuamente excluyentes* también puede entrar en el cuadro cuando se trabaja con eventos independientes o dependientes. Los problemas finales de esta sección ilustran esta idea.

PROBLEMA 7

Una moneda se lanza tres veces. Encuentre la probabilidad de sacar dos caras y una cruz.

Solución

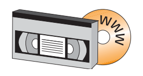
Dos caras y tres cruces se pueden obtener en tres formas diferentes: (1) HHT (cara en primer lanzamiento, cara en segundo lanzamiento y cruz en tercer lanzamiento), (2) HTH y (3) THH. Por tanto, se tienen tres eventos *mutuamente excluyentes*, cada uno de los cuales se puede descomponer en eventos *independientes*: primer lanzamiento, segundo lanzamiento y tercer lanzamiento. Por tanto, la probabilidad se puede calcular del modo siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

■

PROBLEMA 8

Un frasco contiene cinco canicas blancas, siete verdes y nueve rojas. Si dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*, encuentre la probabilidad de que una de ellas sea blanca y la otra sea verde.



Solución

La extracción de una canica blanca y una canica verde puede ocurrir en dos formas diferentes: (1) al extraer primero una canica blanca y luego una verde, y (2) al extraer primero una canica verde y luego una blanca. Por tanto, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes, cada uno de los cuales se descompone en dos eventos *dependientes*: primera extracción y segunda extracción. En consecuencia, la probabilidad se puede calcular del modo siguiente:

$$\left(\frac{5}{21}\right)\left(\frac{7}{20}\right) + \left(\frac{7}{21}\right)\left(\frac{5}{20}\right) = \frac{70}{420} = \frac{1}{6}$$

Blanca en primera extracción; Verde en segunda extracción; Verde en primera extracción; Blanca en segunda extracción ■

PROBLEMA 9

Dos cartas se sacan en sucesión *con reemplazo* de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de extraer un jack y una reina.

Solución

Extraer un jack y una reina puede ocurrir en dos formas diferentes: (1) un jack en la primera extracción y una reina en la segunda, y (2) una reina en la primera extracción y un jack en la segunda. Por tanto, se tienen dos eventos mutuamente excluyentes, y cada uno se descompone en los eventos *independientes* de primera extracción y segunda extracción con sustitución. Por tanto, la probabilidad se puede calcular del modo siguiente:

$$\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) + \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{32}{2704} = \frac{2}{169}$$

Jack en primera extracción; Reina en segunda extracción; Reina en primera extracción; Jack en segunda extracción ■

Conjunto de problemas 15.5

Para los problemas 1-22 resuelva cada uno de ellos.

1. Se lanza un dado. Encuentre la probabilidad de que salga un 5 si se sabe que salió un número impar.

2. Se lanza un dado. Encuentre la probabilidad de que se obtenga un número primo, dado que salió un número par. Encuentre también la probabilidad de que salga un número par, dado que se obtuvo un número primo.

3. Se lanzan dos dados y alguien indica que los dos números que salen son diferentes. Encuentre la probabilidad de que la suma de los dos números sea 6.

4. Se lanzan dos dados y alguien indica que los dos números que salen son idénticos. Encuentre la probabilidad de que la suma de los dos números sea 8.

5. Una carta se extrae al azar de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que sea un jack, dado que la carta es una carta de cara. (Como cartas de cara se consideran jacks, reinas y reyes.)

6. Una carta se extrae al azar de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de que sea una espada, dado el hecho de que es una carta negra.

7. Se lanzan una moneda y un dado. Encuentre la probabilidad de obtener un 5 en el dado, puesto que salió una cara en la moneda.

8. Una familia tiene tres hijos. Suponga que cada niño tiene igual probabilidad de ser un niño que de ser niña. Encuentre la probabilidad de que la familia tenga tres niñas, si se sabe que la familia tiene al menos una niña.

9. La probabilidad de que un estudiante se matricule en un curso de matemáticas es 0.7, la probabilidad de que se matricule en un curso de historia es 0.3, y la probabilidad de que se matricule tanto en matemáticas como en historia es 0.2. Encuentre la probabilidad de que un estudiante se matricule en matemáticas, dado que también se matriculó en historia. Además, encuentre la probabilidad de que un estudiante se matriculará en historia, dado que también se matriculó en matemáticas.

10. La siguiente tabla de probabilidad contiene datos relativos a accidentes automovilísticos y condiciones climatológicas en un fin de semana de fiesta.

	Lluvia (R)	**Sin lluvia (R')**	**Total**
Accidente (A)	0.025	0.015	0.040
Sin accidente (A')	0.400	0.560	0.960
Total	0.425	0.575	1.000

Encuentre la probabilidad de que una persona elegida al azar de la encuesta estuvo en un accidente, dado que llovía. Encuentre también la probabilidad de que una persona no estuvo en un accidente, dado que no llovía.

11. Cien personas se encuestaron y una pregunta se refirió a sus antecedentes educativos. Las respuestas a esta pregunta están dadas en la siguiente tabla.

	Mujer (F)	**Hombre (F')**	**Total**
Grado universitario (D)	30	20	50
Sin grado universitario (D')	15	35	50
Total	45	55	100

Encuentre la probabilidad de que una persona elegida al azar de la encuesta tenga un grado universitario, dado que la persona es mujer. Encuentre también la probabilidad de que una persona elegida sea hombre, dado que la persona tiene un grado universitario.

12. En una elección reciente hubo 1000 votantes elegibles. Se les pidió votar acerca de dos temas, A y B. Los resultados fueron los siguientes: 200 personas votaron por A, 400 personas votaron por B y 50 personas votaron tanto por A como por B. Si una persona se elige al azar de los 1000 votantes elegibles, encuentre la probabilidad de que la persona votó por A, dado que votó por B. Encuentre también la probabilidad de que la persona votó por B, dado que votó por A.

13. Una pequeña compañía tiene 100 empleados, entre ellos 75 son hombres, y tiene 7 administradores y 5 de los administradores son hombres. Si una persona se elige al azar de los empleados, encuentre la probabilidad de que la persona sea un administrador, dado que es hombre. Encuentre también la probabilidad de que la persona elegida sea mujer, dado que es administradora.

14. Una encuesta afirma que 80% de los hogares en cierta ciudad tienen una televisión de alta definición, 10% tienen horno de microondas y 2% tienen tanto televisión de alta definición como horno de microondas. Encuentre la probabilidad de que un hogar seleccionado al azar tenga un horno de microondas, dado que tiene televisión de alta definición.

15. Considere una familia de tres hijos. Sea E el evento *el primer hijo es un niño*, y sea F el evento *la familia tiene exactamente un niño*. ¿Los eventos E y F son dependientes o independientes?

16. Tire un dado blanco y un dado verde. Sea E el evento *tire un 2 en el dado blanco*, y sea F el evento *tire un 4 en el dado verde*. ¿E y F son dependientes o independientes?

17. Lance tres monedas. Sea E el evento *tire no más de una cara*, y sea F el evento *tire al menos una de cada cara*. ¿E y F son eventos dependientes o independientes?

18. Una carta se extrae al azar de un mazo estándar de 52 naipes. Sea E el evento *la carta es un 2*, y sea F el evento *la carta es un 2 o un 3*. ¿Los eventos E y F son dependientes o independientes?

19. Una moneda se lanza cuatro veces. Encuentre la probabilidad de sacar tres caras y una cruz.

20. Una moneda se lanza cinco veces. Encuentre la probabilidad de sacar cuatro caras y una cruz.

21. Lance un par de dados tres veces. Encuentre la probabilidad de que se obtenga un doble en los tres lanzamientos.

22. Lance un par de dados tres veces. Encuentre la probabilidad de que cada lanzamiento producirá una suma de 4.

Para los problemas 23-26 suponga que se extraen dos tarjetas en sucesión *sin reemplazo* de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

23. Ambas cartas son 4.

24. Una carta es un as y una carta es un rey.

25. Una carta es una espada y una carta es un diamante.

26. Ambas cartas son negras.

Para los problemas 27-30 suponga que dos cartas se extraen en sucesión *con reemplazo* de un mazo de 52 naipes. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

27. Ambas cartas son espadas.

28. Una carta es un as y una carta es un rey.

29. Una carta es el as de espadas y una carta es el rey de espadas.

30. Ambas cartas son rojas.

Para los problemas 31 y 32 resuelva cada problema.

31. Una persona tiene tres reyes de un mazo de 52 naipes. Si la persona extrae dos cartas sin sustitución de los 49 naipes restantes en el mazo, encuentre la probabilidad de extraer el cuarto rey.

32. Una persona extrae dos ases y un rey de un mazo de 52 naipes y extrae, sin sustitución, dos cartas más del mazo. Encuentre la probabilidad de que la persona extraiga dos ases, o dos reyes, o un as y un rey.

Para los problemas 33-36, una bolsa contiene cinco canicas rojas y cuatro blancas. Dos canicas se extraen en sucesión *con reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

33. Ambas canicas son rojas.

34. Ambas canicas son blancas.

35. La primera canica es roja y la segunda canica es blanca.

36. Al menos una canica es roja.

Para los problema 37-40, una bolsa contiene cinco canicas blancas, cuatro rojas y cuatro azules. Dos canicas se extraen en sucesión *con reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

37. Ambas canicas son blancas.

38. Ambas canicas son rojas.

39. Una canica roja y una azul.

40. Una canica blanca y una azul.

Para los problemas 41-44, una bolsa contiene una canica roja y dos blancas. Dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

41. Una canica es roja y una canica es blanca.

42. La primera canica es roja y la segunda es blanca.

43. Ambas canicas son blancas.

44. Ambas canicas son rojas.

Para los problemas 45-48, una bolsa contiene cinco canicas rojas y 12 blancas. Dos canicas se extraen en sucesión *sin sustitución*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

45. Ambas canicas son rojas.

46. Ambas canicas son blancas.

47. Una canica es roja y una es blanca.

48. Al menos una canica es roja.

Para los problemas 49-52, una bolsa contiene dos canicas rojas, tres blancas y cuatro azules. Dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

49. Ambas canicas son blancas.

50. Una canica es blanca y una es azul.

51. Ambas canicas son azules.

52. Al menos una canica es roja.

Para los problemas 53-56, una bolsa contiene cinco canicas blancas, una azul y tres rojas. Tres canicas se extraen en sucesión *con reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

53. Las tres canicas son azules.

54. Una canica de cada color.

55. Una canica blanca y dos rojas.

56. Una canica azul y dos blancas.

Para los problemas 57-60, una bolsa contiene cuatro canicas blancas, una roja y dos azules. Tres canicas se extraen al azar en sucesión *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

57. Las tres canicas son blancas.

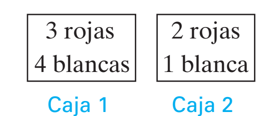
58. Una canica roja y dos azules.

59. Una canica de cada color.

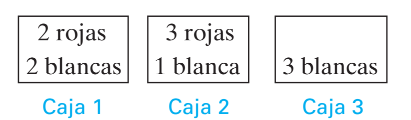
60. Una canica blanca y dos rojas.

Para los problemas 61 y 62 resuelva cada problema.

61. Aquí se muestran dos cajas con canicas rojas y blancas. Una canica se extrae al azar de la caja 1, y luego una segunda canica se extrae de la caja 2. Encuentre la probabilidad de que ambas canicas extraídas sean blancas. Encuentre la probabilidad de que ambas canicas extraídas sean rojas. Encuentre la probabilidad de que se extraigan una canica roja y una blanca.



62. Aquí se muestran tres cajas que contienen canicas rojas y blancas. Extraiga al azar una canica de la caja 1 y póngala en la caja 2. Luego extraiga una canica de la caja 2 y póngala en la caja 3. Luego extraiga una canica de la caja 3. ¿Cuál es la probabilidad de que la última canica extraída, de la caja 3, sea roja? ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?



PENSAMIENTOS EN PALABRAS

63. ¿Cómo explicaría el concepto de probabilidad condicional a un compañero de clase que faltó al análisis de esta sección?

64. ¿Cómo daría una explicación no técnica de la probabilidad condicional a un estudiante de álgebra elemental?

65. Explique con sus palabras el concepto de eventos independientes.

66. Suponga que una bolsa contiene dos canicas rojas y tres blancas. Más aún, suponga que dos canicas se extraen de la bolsa en sucesión *con reemplazo*. Explique cómo puede usar los siguientes tres diagramas para determinar que la probabilidad de extraer dos canicas blancas es $\frac{9}{25}$.

Primera extracción	Segunda extracción	Resultados
$\frac{2}{5}$ R	$\frac{2}{5}$ R	RR
	$\frac{3}{5}$ B	RB
$\frac{3}{5}$ B	$\frac{2}{5}$ R	BR
	$\frac{3}{5}$ B	BB

67. Explique cómo puede usar un diagrama de árbol para determinar las probabilidades para los problemas 41-44.

15.6 Teorema del binomio

En el capítulo 4, cuando se multiplicaron polinomios, se desarrollaron patrones para elevar binomios al cuadrado y al cubo. Ahora se quiere desarrollar un patrón general que se pueda usar para elevar un binomio a cualquier potencia entera positiva. Comience por buscar alguna expansión específica que se pueda verificar mediante multiplicación directa. (Note que los patrones para elevar un binomio al cuadrado y al cubo son parte de esta lista.)

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Primero note el patrón de los exponentes para x y y sobre una base de término por término. Los exponentes de x comienzan con el exponente del binomio y disminuye por 1, término por término, hasta que el último término tiene x^0, que es 1. Los exponentes de y comienzan con cero ($y^0 = 1$) y aumentan por 1, término a término, hasta que el último término contiene y a la potencia del binomio. En otras palabras, las variables en la expansión de $(x + y)^n$ tienen el siguiente patrón.

$$x^n, \quad x^{n-1}y, \quad x^{n-2}y^2, \quad x^{n-3}y^3, \quad \ldots, \quad xy^{n-1}, \quad y^n$$

Note que, para cada término, la suma de los exponentes de x y y es n.

Ahora busque un patrón para los coeficientes al examinar de manera específica la expansión de $(x + y)^5$.

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1y^5$$

Como se indicó mediante las flechas, los coeficientes son números que surgen como combinaciones de diferentes tamaños de cinco cosas. Para ver por qué ocurre esto, considere el coeficiente del término que contiene x^3y^2. Las dos y (por y^2) provino de dos de los factores de $(x + y)$, y por tanto las tres x (por x^3) deben provenir de los otros tres factores de $(x + y)$. En otras palabras, el coeficiente es $C(5, 2)$.

Ahora se puede enunciar una fórmula general de expansión para $(x + y)^n$; esta fórmula se llama con frecuencia **teorema del binomio**. Pero antes de enunciarlo se realizará un pequeño cambio en notación. En lugar de $C(n, r)$ se escribirá $\binom{n}{r}$, que probará ser un poco más conveniente en este momento. El símbolo $\binom{n}{r}$ todavía se refiere al número de combinaciones de n cosas tomadas r a la vez, pero en este contexto con frecuencia se llama **coeficiente binomial**.

Teorema del binomio

Para cualquier binomio $(x + y)$ y cualquier número natural n,

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

El teorema del binomio se puede probar mediante inducción matemática, pero no se hará en este texto. En vez de ello, se considerarán algunos ejemplos que ponen a trabajar al teorema del binomio.

EJEMPLO 1

Expanda $(x + y)^7$

Solución

$$(x + y)^7 = x^7 + \binom{7}{1}x^6y + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4$$
$$+ \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}xy^6 + \binom{7}{7}y^7$$
$$= x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$ ■

EJEMPLO 2

Expanda $(x - y)^5$

Solución

Se tratará $(x - y)^5$ como $[x + (-y)]^5$.

$$[x + (-y)]^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3$$
$$+ \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$$
$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$ ■

EJEMPLO 3

Expanda $(2a + 3b)^4$

Solución

Sean $x = 2a$ y $y = 3b$ en el teorema del binomio.

$$(2a + 3b)^4 = (2a)^4 + \binom{4}{1}(2a)^3(3b) + \binom{4}{2}(2a)^2(3b)^2$$
$$+ \binom{4}{3}(2a)(3b)^3 + \binom{4}{4}(3b)^4$$
$$= 16a^4 + 96a^3b + 216a^2b^2 + 216ab^3 + 81b^4$$ ■

EJEMPLO 4

Expanda $\left(a + \frac{1}{n}\right)^5$

Solución

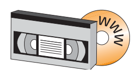
$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4\left(\frac{1}{n}\right) + \binom{5}{2}a^3\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{5}{3}a^2\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \binom{5}{4}a\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^5$$

$$= a^5 + \frac{5a^4}{n} + \frac{10a^3}{n^2} + \frac{10a^2}{n^3} + \frac{5a}{n^4} + \frac{1}{n^5}$$

■

EJEMPLO 5

Expanda $(x^2 - 2y^3)^6$



Solución

$$[x^2 + (-2y^3)]^6 = (x^2)^6 + \binom{6}{1}(x^2)^5(-2y^3) + \binom{6}{2}(x^2)^4(-2y^3)^2$$
$$+ \binom{6}{3}(x^2)^3(-2y^3)^3 + \binom{6}{4}(x^2)^2(-2y^3)^4$$
$$+ \binom{6}{5}(x^2)(-2y^3)^5 + \binom{6}{6}(-2y^3)^6$$
$$= x^{12} - 12x^{10}y^3 + 60x^8y^6 - 160x^6y^9 + 240x^4y^{12} - 192x^2y^{15} + 64y^{18}$$

■

Cómo encontrar términos específicos

En ocasiones es conveniente escribir el término específico de una expansión binomial sin escribir toda la expansión. Por ejemplo, suponga que se quiere en sexto término de la expansión $(x + y)^{12}$. Puede proceder del modo siguiente: el sexto término contendrá y^5. (Note en el teorema del binomio que el **exponente de *y* siempre es uno menos que el número del término**.) Puesto que la suma de los exponentes para x y y debe ser 12 (el exponente del binomio), el sexto término también contendrá x^7. El coeficiente es $\binom{12}{5}$, donde el 5 coincide con el exponente de y^5. Por tanto, el sexto término de $(x + y)^{12}$ es

$$\binom{12}{5}x^7y^5 = 792x^7y^5$$

EJEMPLO 6

Encuentre el cuarto término de $(3a + 2b)^7$

Solución

El cuarto término contendrá $(2b)^3$, y por tanto también contendrá $(3a)^4$. El coeficiente es $\binom{7}{3}$. Por tanto, el cuarto término es

$$\binom{7}{3}(3a)^4(2b)^3 = (35)(81a^4)(8b^3) = 22\,680a^4b^3$$

■

EJEMPLO 7 Encuentre el sexto término de $(4x - y)^9$

Solución

El sexto término contendrá $(-y)^5$ y por tanto también contendrá $(4x)^4$. El coeficiente es $\binom{9}{5}$. Por tanto, el sexto término es

$$\binom{9}{5}(4x)^4(-y)^5 = (126)(256x^4)(-y^5) = -32\,256x^4y^5$$

Conjunto de problemas 15.6

Para los problemas 1-26 expanda y simplifique cada binomio.

1. $(x + y)^8$
2. $(x + y)^9$
3. $(x - y)^6$
4. $(x - y)^4$
5. $(a + 2b)^4$
6. $(3a + b)^4$
7. $(x - 3y)^5$
8. $(2x - y)^6$
9. $(2a - 3b)^4$
10. $(3a - 2b)^5$
11. $(x^2 + y)^5$
12. $(x + y^3)^6$
13. $(2x^2 - y^2)^4$
14. $(3x^2 - 2y^2)^5$
15. $(x + 3)^6$
16. $(x + 2)^7$
17. $(x - 1)^9$
18. $(x - 3)^4$
19. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4$
20. $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^5$
21. $\left(a - \frac{1}{n}\right)^6$
22. $\left(2a - \frac{1}{n}\right)^5$
23. $(1 + \sqrt{2})^4$
24. $(2 + \sqrt{3})^3$
25. $(3 - \sqrt{2})^5$
26. $(1 - \sqrt{3})^4$

Para los problemas 27-36 escriba los primeros cuatro términos de cada expansión.

27. $(x + y)^{12}$
28. $(x + y)^{15}$
29. $(x - y)^{20}$
30. $(a - 2b)^{13}$
31. $(x^2 - 2y^3)^{14}$
32. $(x^3 - 3y^2)^{11}$
33. $\left(a + \frac{1}{n}\right)^9$
34. $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^6$
35. $(-x + 2y)^{10}$
36. $(-a - b)^{14}$

Para los problemas 37-46 encuentre el término especificado para cada expansión binomial.

37. El cuarto término de $(x + y)^8$
38. El séptimo término de $(x + y)^{11}$
39. El quinto término de $(x - y)^9$
40. El cuarto término de $(x - 2y)^6$
41. El sexto término de $(3a + b)^7$
42. El tercer término de $(2x - 5y)^5$
43. El octavo término de $(x^2 + y^3)^{10}$
44. El noveno término de $(a + b^3)^{12}$
45. El séptimo término de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{15}$
46. El octavo término de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{13}$

PENSAMIENTOS EN PALABRAS

47. ¿Cómo explicaría las expansiones binomiales a un estudiante de álgebra elemental?

48. Explique cómo encontrar el quinto término de la expansión de $(2x + 3y)^9$ sin escribir toda la expansión.

49. ¿El décimo término de la expansión $(1 - 2)^{15}$ es positivo o negativo? Explique cómo determinó la respuesta a esta pregunta.

MÁS INVESTIGACIÓN

Para los problemas 50-53 expanda y simplifique cada número complejo.

50. $(1 + 2i)^5$

51. $(2 + i)^6$

52. $(2 - i)^6$

53. $(3 - 2i)^5$

Capítulo 15 Resumen

Este capítulo se puede resumir con tres temas principales: técnicas de conteo, probabilidad y el teorema del binomio.

(15.1) Técnicas de conteo

El **principio fundamental de conteo** afirma que, si una primera tarea se puede realizar en x formas y, después de esta tarea, una segunda tarea se puede realizar en y formas, entonces la tarea 1 seguida por la tarea 2 se puede realizar en $x \cdot y$ formas. El principio se extiende a cualquier número finito de tareas. Conforme resuelve problemas que implican el principio fundamental de conteo, con frecuencia será útil analizar el problema en términos de las tareas a realizar.

(15.2) Los arreglos ordenados se llaman **permutaciones**. El número de permutaciones de n cosas tomadas r a la vez está dado por

$$P(n, n) = n!$$

El número de permutaciones de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos está dado por

$$P(n, r) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{r \text{ factores}}$$

Si hay n elementos a arreglar, donde hay r_1 de un tipo, r_2 de otro tipo, r_3 de otro tipo,. . ., r_k de un k-ésimo tipo, entonces el número de permutaciones distinguibles está dado por

$$\frac{n!}{(r_1!)(r_2!)(r_3!)\ldots(r_k!)}$$

Las **combinaciones** son subconjuntos; el orden en el que aparecen los elementos no hace diferencia. El número de combinaciones de r elementos (subconjuntos) que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos está dado por

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

¿El orden en el que aparecen los elementos hace alguna diferencia? Ésta es una pregunta clave a considerar cuando se intenta decidir si un problema particular involucra permutaciones o combinaciones. Si la respuesta a la pregunta es sí, entonces es un problema de permutación; si la respuesta es no, entonces es un problema de combinación. No olvide que las combinaciones son subconjuntos.

(15.3-15.5) Probabilidad

En un experimento donde todos los posibles resultados en el espacio muestral S son igualmente probables de ocurrir, la **probabilidad** de un evento E se define como

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

donde $n(E)$ denota el número de elementos en el evento E, y $n(S)$ denota el número de elementos en el espacio muestral S. Los números $n(E)$ y $n(S)$ con frecuencia se pueden determinar usando una o más de las técnicas de conteo previamente mencionadas. Para todos los eventos E, siempre es cierto que $0 \leq P(E) \leq 1$. Esto es, todas las probabilidades caen en el rango de 0 a 1, inclusive.

Si E y E' son **eventos complementarios**, entonces $P(E) + P(E') = 1$. Por tanto, si puede calcular $P(E)$ o $P(E')$, entonces puede encontrar las otras al restar de 1.

Para dos eventos E y F, la probabilidad de E o F está dada por

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Si $E \cap F = \emptyset$, entonces E y F son **eventos mutuamente excluyentes**.

La probabilidad de que un evento E ocurra, dado que otro evento F ya ocurrió, se llama **probabilidad condicional**. Está dada por la ecuación

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Dos eventos E y F se dice que son **independientes** si y sólo si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Dos eventos que no son independientes se llaman **eventos dependientes**, y la probabilidad de dos eventos dependientes está dada por

$$P(E \cap F) = P(E)P(F|E)$$

(15.6) El teorema del binomio

Para cualquier binomio $(x + y)$ y cualquier número natural n,

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

Note los siguientes patrones en una expansión binomial:

1. En cada término, la suma de los exponentes de x y y es n.
2. Los exponentes de x comienzan con el exponente del binomio y disminuye por 1, término a término, hasta que el último término tiene x^0, que es 1. Los exponentes de y comienzan con cero $(y^0 = 1)$ y disminuyen por 1, término a término, hasta que el último término contiene y a la potencia del binomio.
3. El coeficiente de cualquier término está dado por $\binom{n}{r}$,

donde el valor de r coincide con el exponente de y para dicho término. Por ejemplo, si el término contiene y^3, entonces el coeficiente de dicho término es $\binom{n}{3}$.

4. La expansión de $(x + y)^n$ contiene $n + 1$ términos.

Capítulo 15 Conjunto de problemas de repaso

Los problemas 1-14 son problemas de tipo conteo.

1. ¿Cuántos diferentes arreglos de las letras A, B, C, D, E y F se pueden hacer?
2. ¿Cuántos diferentes arreglos de nueve letras se pueden formar a partir de las nueve letras de la palabra APPARATUS?
3. ¿Cuántos números impares de tres dígitos diferentes cada uno se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 5, 7, 8 y 9?
4. ¿En cuántas formas pueden sentarse Arlene, Brent, Carlos, Dave, Ernie, Frank y Gladys en una fila de siete asientos, de modo que Arlene y Carlos estén lado a lado?
5. ¿En cuántas formas puede elegirse un comité de tres personas a partir de seis personas?
6. ¿Cuántos comités, que consisten de tres hombres y dos mujeres, se pueden formar a partir de siete hombres y seis mujeres?
7. ¿Cuántas manos diferentes de cinco cartas, que consisten de todos corazones, se pueden formar de un mazo de 52 naipes?
8. Si ningún número contiene dígitos repetidos, ¿cuántos números mayores que 500 se pueden formar al elegir de los dígitos 2, 3, 4, 5 y 6?
9. ¿Cuántos comités de tres personas se pueden formar a partir de cuatro hombres y cinco mujeres, de modo que cada comité contenga al menos un hombre?
10. ¿Cuántos diferentes comités de cuatro personas se pueden formar a partir de ocho personas si dos personas particulares rechazan servir juntas en un comité?
11. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos, que contienen A o B, mas no ambos, se pueden formar a partir del conjunto {A, B, C, D, E, F, G, H}?
12. ¿Cuántas diferentes permutaciones de seis letras se pueden formar a partir de cuatro H idénticas y dos T idénticas?
13. ¿Cuántos comités de cuatro personas, que consisten de dos estudiantes de cuarto año, uno de segundo año, y uno de tercer año se pueden formar a partir de tres estudiantes de cuarto año, cuatro de tercer año y cinco de segundo año?
14. En una liga de béisbol de seis equipos, ¿cuántos juegos se necesitan para completar un calendario si cada equipo juega ocho juegos con los otros equipos?

Los problemas 15-35 plantean algunas preguntas de probabilidad.

15. Si tres monedas se lanzan, encuentre la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.
16. Si cinco monedas se lanzan, encuentre la probabilidad de obtener tres caras y dos cruces.
17. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 8 con un lanzamiento de un par de dados?
18. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma mayor que 5 con un lanzamiento de un par de dados?

19. Aimée, Brenda, Chuck, Dave y Eli se sientan al azar en una fila de cinco asientos. Encuentre la probabilidad de que Aimée y Chuck no se sienten lado a lado.

20. Cuatro niñas y tres niños se sentarán al azar en una fila de siete asientos. Encuentre la probabilidad de que las niñas y los niños se sienten en asientos alternados.

21. Se lanzan seis monedas. Encuentre la probabilidad de sacar al menos dos caras.

22. Dos cartas se eligen al azar de un mazo de 52 naipes. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraigan dos jacks?

23. Cada arreglo de las seis letras de la palabra CYCLIC se pone en una tira de papel y se colocan en un sombrero. Una tira se extrae al azar. Encuentre la probabilidad de que la tira contenga un arreglo con la Y al principio.

24. Un comité de tres se elige aleatoriamente de un hombre y seis mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre no esté en el comité?

25. Un comité de cuatro personas se selecciona al azar de las ocho personas: Alice, Bob, Carl, Dee, Enrique, Fred, Gina e Hilda. Encuentre la probabilidad de que Alice o Bob, mas no ambos, estén en el comité.

26. Un comité de tres se elige al azar de un grupo de cinco hombres y cuatro mujeres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga dos hombres y una mujer.

27. Un comité de cuatro se elige al azar de un grupo de seis hombres y siete mujeres. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos una mujer.

28. Una bolsa contiene cinco canicas rojas y ocho blancas. Dos canicas se extraen en sucesión *con reemplazo*. ¿Cuál es la probabilidad de extraer al menos una canica roja?

29. Una bolsa contiene cuatro canicas rojas, cinco blancas y tres azules. Dos canicas se extraen en sucesión *con reemplazo*. Encuentre la probabilidad de extraer una canica roja y una azul.

30. Una bolsa contiene cuatro canicas rojas y siete azules. Dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de extraer una canica roja y una azul.

31. Una bolsa contiene tres canicas rojas, dos blancas y dos azules. Dos canicas se extraen en sucesión *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de extraer al menos una canica roja.

32. Cada una de tres cartas se colocará en uno de cuatro diferentes buzones. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas se coloquen en el mismo buzón?

33. La probabilidad de que una clienta en una tienda de departamentos compre una blusa es de 0.15, la probabilidad de que compre un par de zapatos es de 0.10, y la probabilidad de que compre tanto una blusa como un par de zapatos es de 0.05. Encuentre la probabilidad de que la clienta compre una blusa, dado que ya había comprado un par de zapatos. Encuentre también la probabilidad de que compre un par de zapatos, dado que ya compró una blusa.

34. Una encuesta de 500 empleados de una compañía produce la siguiente información.

Nivel de empleo	Grado universitario	Sin grado universitario
Gerencial	45	5
No gerencial	50	400

Encuentre la probabilidad de que un empleado elegido al azar (a) trabaja en una posición gerencial, dado que tiene un grado universitario; y (b) tiene un grado universitario, dado que trabaja en una posición gerencial.

35. A partir de una encuesta de 1000 estudiantes universitarios, se descubrió que 450 de ellos poseían automóvil, 700 de ellos poseían sistemas de sonido y 200 de ellos poseían tanto automóvil como sistema de sonido. Si un estudiante se elige al azar de los 1000 estudiantes, encuentre la probabilidad de que el estudiante (a) posea un automóvil, dado el hecho de que posee un sistema de sonido, y (b) posee un sistema de sonido, dado el hecho de que posee un automóvil.

Para los problemas 36-41 expanda cada binomio y simplifique.

36. $(x + 2y)^5$ **37.** $(x - y)^8$ **38.** $(a^2 - 3b^3)^4$

39. $\left(x + \frac{1}{n}\right)^6$ **40.** $(1 - \sqrt{2})^5$ **41.** $(-a + b)^3$

42. Encuentre el cuarto término de la expansión de $(x - 2y)^{12}$.

43. Encuentre el décimo término de la expansión de $(3a + b^2)^{13}$.

Capítulo 15 Examen

Para los problemas 1-21 resuelva cada uno de ellos.

1. ¿En cuántas formas se pueden sentar Abdul, Barb, Corazon y Doug en una fila de cuatro asientos, de modo que Abdul ocupe un asiento del extremo?

2. ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos diferentes cada uno se pueden formar al elegir de los dígitos 1, 2, 3, 5, 7, 8 y 9?

3. ¿En cuántas formas se pueden colocar tres cartas en seis buzones?

4. En una liga de béisbol de diez equipos, ¿cuántos juegos se necesitan para completar el calendario si cada equipo juega seis juegos contra los otros equipos?

5. ¿En cuántas formas se puede obtener una suma mayor que 5 cuando se lanza un par de dados?

6. ¿En cuántas formas se pueden colocar en un anaquel seis diferentes libros de matemáticas y tres diferentes libros de biología, de modo que todos los libros acerca de un área estén lado a lado?

7. ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos, que contienen A o B, mas no A y B, se pueden formar a partir del conjunto {A, B, C, D, E, F, G}?

8. ¿Cuántas diferentes manos de cinco cartas, que consisten de dos ases, dos reyes y una reina, se pueden repartir de un mazo de 52 naipes?

9. ¿Cuántos diferentes arreglos de nueve letras se pueden formar de las nueve letras de la palabra SASAFRAS?

10. ¿Cuántos comités, que consisten de cuatro hombres y tres mujeres, se pueden formar de un grupo de siete hombres y cinco mujeres?

11. ¿Cuál es la probabilidad de tirar una suma menor que 9 con un par de dados?

12. Se lanzan seis monedas. Encuentre la probabilidad de sacar tres caras y tres cruces.

13. Todos los posibles números de tres dígitos diferentes cada uno se forman a partir de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si luego se elige un número al azar, encuentre la probabilidad de que sea mayor que 200.

14. Un comité de cuatro personas se selecciona al azar de Anwar, Barb, Chad, Dic, Edna, Fern y Giraldo. ¿Cuál es la probabilidad de que ni Anwar ni Barb estén en el comité?

15. De un grupo de tres hombres y cinco mujeres se selecciona al azar un comité de tres personas. Encuentre la probabilidad de que el comité contenga al menos un hombre.

16. Se sabe que una caja de 12 artículos contiene uno defectuoso y 11 no defectuosos. Si una muestra de tres artículos se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres artículos sean no defectuosos?

17. Cinco monedas se lanzan 80 veces. ¿Cuántas veces esperaría obtener tres caras y dos cruces?

18. Suponga que se venden 3000 boletos en una lotería. Hay tres premios: el primer premio es de $500, el segundo es de $300 y el tercero es de $100. ¿Cuál es la expectativa matemática de ganar?

19. Una bolsa contiene siete canicas blancas y 12 verdes. Dos canicas se extraen al azar en sucesión, *con reemplazo*. Encuentre la probabilidad de extraer una canica de cada color.

20. Una bolsa contiene tres canicas blancas, cinco verdes y siete azules. Dos canicas se extraen *sin reemplazo*. Encuentre la probabilidad de extraer dos canicas verdes.

21. En una elección hay 2000 votantes elegibles. Se les pidió votar acerca de dos temas, A y B. Los resultados fueron los siguientes: 500 personas votaron por A, 800 personas votaron por B y 250 personas votaron por A y B. Si una persona se elige al azar de los 2000 votantes elegibles, encuentre la probabilidad de que esta persona votó por A, dado que votó por B.

22. Desarrolle y simplifique $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^6$.

23. Desarrolle y simplifique $(3x + 2y)^5$.

24. Encuentre el noveno término de la expansión de $\left(x - \frac{1}{2}\right)^{12}$.

25. Encuentre el quinto término de la expansión de $(x + 3y)^7$.

Apéndice

Números primos y operaciones con fracciones

Este apéndice revisa las operaciones con números racionales en forma de fracción común. A lo largo de esta sección se hablará de “multiplicar fracciones”. Tenga presente que esta frase significa multiplicar números racionales en forma de fracción común. Una base sólida aquí simplificará su trabajo posterior en expresiones racionales. Puesto que los números primos y la factorización prima desempeñan un importante papel en las operaciones con fracciones, comience por considerar dos tipos especiales de números enteros, los números primos y los números compuestos.

Definición 4.1

Un **número primo** es un número entero positivo mayor que 1 que no tiene factores (divisores) distintos a él mismo y 1. Los números enteros positivos mayores que 1 que no son números primos se llaman **números compuestos**.

Los números primos menores que 50 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, y 47. Note que cada uno de estos no tiene factores distintos a él mismo y 1. Todo número compuesto se puede expresar como el producto indicado de números primos. Considere los siguientes ejemplos:

$$4 = 2 \cdot 2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad 10 = 2 \cdot 5 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

En cada caso, un número compuesto se expresa como el producto indicado de números primos. La forma de producto indicado se llama forma factorizada prima del número. Existen varios procedimientos para encontrar los factores primos de un número compuesto dado. Para los propósitos del texto, la técnica más simple es factorizar el número compuesto dado en cualesquiera dos factores fácilmente reconocibles y luego continuar factorizando cada uno de éstos hasta obtener sólo factores primos. Considere estos ejemplos:

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \qquad 27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$$

No importa cuál de dos factores elija primero. Por ejemplo, puede comenzar por expresar 18 como $3 \cdot 6$ y luego factorizar 6 en $2 \cdot 3$, lo que produce un resultado final

de $18 = 3 \cdot 2 \cdot 3$. De cualquier forma, 18 contiene dos factores primos de 3 y un factor primo de 2. El orden en el que escriba los factores primos no es importante.

Mínimo común múltiplo

En ocasiones es necesario determinar el menor de los múltiplos comunes distintos de cero de dos o más números enteros positivos. A este número distinto de cero se le llama **mínimo común múltiplo**. En el trabajo con fracciones, habrá problemas donde será necesario encontrar el mínimo común múltiplo de algunos números, por lo general los denominadores de fracciones. Así que revise los conceptos de múltiplos. Se sabe que 35 es un múltiplo de 5 porque $5 \cdot 7 = 35$. El conjunto de todos los números enteros positivos que son múltiplos de 5 consisten de 0, 5, 10, 15, 20, 25, etcétera. En otras palabras, 5 por cada número entero positivo sucesivo, ($5 \cdot 0 = 0$, $5 \cdot 1 = 5$, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 3 = 15$, etc.) produce los múltiplos de 5. En forma parecida, el conjunto de múltiplos de 4 consiste de 0, 4, 8, 12, 16, y así por el estilo. Es posible ilustrar el concepto de mínimo común múltiplo y encontrar el mínimo común múltiplo de 5 y 4 al usar un listado simple de los múltiplos de 5 y los múltiplos de 4.

Los múltiplos de 5 son 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, . . .

Los múltiplos de 4 son 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, . . .

Los números distintos de cero en común en las listas son 20 y 40. El menor de estos, 20, es el mínimo común múltiplo. Dicho de otra forma, 20 es el menor entero positivo distinto de cero que es divisible tanto por 4 como por 5.

Con frecuencia, a partir de su conocimiento de la aritmética, podrá determinar el mínimo común múltiplo por inspección. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 6 y 8 es 24. Por tanto, 24 es el menor número entero positivo distinto de cero que es divisible tanto por 6 como por 8. Si no puede determinar el mínimo común múltiplo por inspección, entonces es útil usar la forma factorizada prima de los números compuestos. El procedimiento es como sigue.

Paso 1 Exprese cada número como un producto de factores primos.

Paso 2 El mínimo común múltiplo contiene cada diferente factor primo tantas veces como el que más aparece en cada una de las factorizaciones del paso 1.

Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números.

EJEMPLO 1 Encuentre el mínimo común múltiplo de 24 y 36.

Solución

Primero exprese cada número como un producto de factores primos.

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

El factor primo 2 ocurre más veces (tres veces) en la factorización de 24. Puesto que la factorización de 24 contiene tres 2, el mínimo común múltiplo debe tener tres 2. El factor primo 3 ocurre más veces (dos veces) en la factorización de 36. Puesto que la factorización de 36 contiene dos 3, el mínimo común múltiplo debe tener dos 3. El mínimo común múltiplo de 24 y 36 es por tanto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. ■

EJEMPLO 2

Encuentre el mínimo común múltiplo de 48 y 84

Solución

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Se necesitan cuatro 2 en el mínimo común múltiplo, debido a los cuatro 2 en 48. Se necesita un 3 debido al 3 en cada uno de los números, y se necesita un 7 debido al 7 en 84. El mínimo común múltiplo de 48 y 84 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 336$. ■

EJEMPLO 3

Encuentre el mínimo común múltiplo de 12, 18 y 28

Solución

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

El mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$ ■

EJEMPLO 4

Encuentre el mínimo común múltiplo de 8 y 9

Solución

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

El mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. ■

Multiplicación de fracciones

Es posible definir la multiplicación de fracciones en forma fraccionaria común del modo siguiente:

Multiplicación de factores

Si a, b, c y d son enteros, con b y d no iguales a cero, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Para multiplicar fracciones en forma fraccionaria común, simplemente multiplique numeradores y multiplique denominadores. Los siguientes ejemplos ilustran la multiplicación de factores.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

El último de estos ejemplos es un caso muy especial. Si el producto de dos números es 1, entonces se dice que los números son mutuamente recíprocos.

Antes de proceder aún más con la multiplicación de fracciones, es necesario aprender acerca de la reducción de fracciones. La siguiente propiedad se aplica a lo largo del trabajo con fracciones. A esta propiedad se le llama la propiedad fundamental de las fracciones.

Propiedad fundamental de las fracciones

Si b y k son enteros distintos de cero, y a es cualquier entero, entonces $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$.

La propiedad fundamental de las fracciones proporciona la base de lo que con frecuencia se llama reducción de fracciones a términos más bajos, o expresar fracciones en forma más simple o reducida. Aplique la propiedad a algunos ejemplos.

EJEMPLO 5

Reduzca $\frac{12}{18}$ a términos más bajos.

Solución

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot \cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

De numerador y denominador se dividió un factor común de 6. ■

EJEMPLO 6

Cambie $\frac{14}{35}$ a forma más simple.

Solución

$$\frac{14}{35} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{5 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{5}$$

De numerador y denominador se dividió un factor común de 7. ■

EJEMPLO 7

Reduzca $\frac{72}{90}$

Solución

$$\frac{72}{90} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Puede usar la forma factorizada prima de numerador y denominador para encontrar factores comunes. ■

Ahora está listo para considerar problemas de multiplicación con el entendimiento de que la respuesta final se debe expresar en forma reducida. Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos; se usan diferentes métodos para simplificar los problemas.

EJEMPLO 8

Multiplique $\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{14}{15}\right)$.

Solución

$$\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{14}{15}\right) = \frac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 7}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{21}{10}$$ ■

EJEMPLO 9

Encuentre el producto de $\frac{8}{9}$ y $\frac{18}{24}$

Solución

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{2}{3}$$

Un factor común de 8 se dividió de 8 y 24, y un factor común se dividión de 9 y 18. ■

■ División de fracciones

El siguiente ejemplo motiva una definición para la división de números racionales en forma fraccionaria:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{1} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

Note que $\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)$ es una forma de 1, y $\frac{3}{2}$ es el recíproco de $\frac{2}{3}$. En otras palabras, $\frac{3}{4}$ dividido por $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$ por $\frac{3}{2}$. Ahora debe parecer razonable la siguiente definición para división.

División de fracciones

Si b, c y d son enteros distintos de cero, y a es cualquier entero, entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Note que, para dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ se multiplica $\frac{a}{b}$ por el recíproco de $\frac{c}{d}$, que es $\frac{d}{c}$. Los siguientes ejemplos demuestran los pasos importantes de un problema de división.

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 3} = \frac{5 \cdot \cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{\frac{6}{7}}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{7} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{3}{7}$$

Suma y resta de fracciones

Suponga que entre su dormitorio y el centro estudiantil hay un quinto de milla, y entre el centro estudiantil y la biblioteca hay dos quintos de milla a lo largo de una línea recta, como se indica en la figura A.1. La distancia total entre su dormitorio y la biblioteca es tres quintos de milla, y se escribe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

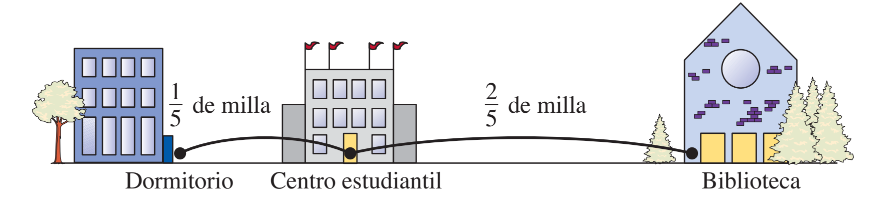


Figura A.1

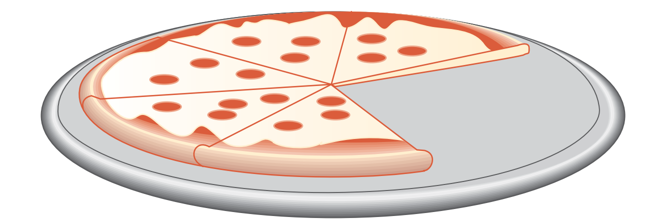


Figura A.2

Una pizza se corta en siete piezas iguales y usted se come dos de los trozos (vea la figura A.2). ¿Cuánta pizza queda? La pizza completa se representa por $\frac{7}{7}$ y concluye que $\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ de la pizza permanece.

Estos ejemplos motivan la siguiente definición de suma y resta de números racionales en forma $\frac{a}{b}$.

Suma y resta de fracciones

Si a, b y c son enteros, y b es distinto de cero, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \text{Suma}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b} \qquad \text{Resta}$$

Se dice que las fracciones con denominadores comunes se pueden sumar o restar al sumar o restar los numeradores y colocar los resultados sobre el denominador común. Considere los siguientes ejemplos:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7 - 2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{Se acordó reducir la respuesta final.}$$

¿Cómo suma o resta si las fracciones no tienen un denominador común? Use el principio fundamental de fracciones, $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$, para obtener fracciones equivalentes que tengan un denominador común. Las **fracciones equivalentes** son fracciones que nombran al mismo número. Considere el siguiente ejemplo, que muestra los detalles.

EJEMPLO 10

Sume $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

Solución

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20} \qquad \frac{1}{4} \text{ y } \frac{5}{10} \text{ son fracciones equivalentes.}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20} \qquad \frac{2}{5} \text{ y } \frac{8}{20} \text{ son fracciones equivalentes.}$$

$$\frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

■

Note que, en el ejemplo 10, se eligió 20 como el denominador común, y 20 es el mínimo común múltiplo de los denominadores originales 4 y 5. (Recuerde que el mínimo común múltiplo es el mínimo número entero positivo distinto de cero divisible por los números dados.) En general, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones a sumar o restar se usa como el **mínimo común denominador** (MCD).

Recuerde que el mínimo común múltiplo se puede encontrar o por inspección o con el uso de formas de factorización primas de los números. Considere algunos ejemplos que involucran estos procedimientos.

EJEMPLO 11

Reste $\frac{5}{8} - \frac{7}{12}$

Solución

Por inspección, el MCD es 24.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{15}{24} - \frac{14}{24} = \frac{1}{24}$$

■

Si el MCD no es obvio por inspección, entonces puede usar la técnica de factorización prima para encontrar el mínimo común múltiplo.

EJEMPLO 12

Sume $\frac{5}{18} + \frac{7}{24}$

Solución

Si no puede encontrar el MCD por inspección, entonces puede usar las formas de factorización prima.

$$\left.\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{24} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$$

■

EJEMPLO 13

Marcey puso $\frac{5}{8}$ de libra de químicos en el spa para ajustar la calidad del agua. Michael, al no darse cuenta de que Marcey ya había puesto químicos, puso $\frac{3}{14}$ de libra de químicos en el spa. Al fabricante de los químicos afirma que nunca debe poner más de 1 libra de químicos. ¿En conjunto, Marcey y Michael pusieron más de 1 libra de químicos?

Solución

Sume $\frac{5}{8} + \frac{3}{14}$.

$$\left.\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 14 &= 2 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$$

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{14} = \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{35}{56} + \frac{12}{56} = \frac{47}{56}$$

No, Marcey y Michael no agregaron más de 1 libra de químicos. ■

Simplificación de expresiones numéricas

Ahora considere la simplificación de expresiones numéricas que contienen fracciones. En concordancia con el orden de las operaciones, primero se realizan las multiplicaciones y las divisiones conforme aparecen de izquierda a derecha, y luego las sumas y restas se realizan conforme aparecen de izquierda a derecha. En los siguientes ejemplos, sólo se muestran los pasos principales. Asegúrese de poder completar todos los detalles.

EJEMPLO 14

Simplifique $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$

Solución

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{15}{20} + \frac{8}{20} - \frac{2}{20} = \frac{15 + 8 - 2}{20} = \frac{21}{20}$$ ■

EJEMPLO 15

Simplifique $\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

Solución

$$\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{5}{8}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{48}$$ ■

Ejercicios de práctica

Para los problemas 1-12 factorice cada número compuesto en un producto de números primos; por ejemplo, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

1. 26
2. 16
3. 36
4. 80
5. 49
6. 92
7. 56
8. 144
9. 120
10. 84
11. 135
12. 98

Para los problemas 13-24 encuentre el mínimo común múltiplo de los números dados.

13. 6 y 8
14. 8 y 12
15. 12 y 16
16. 9 y 12
17. 28 y 35
18. 42 y 66
19. 49 y 56
20. 18 y 24
21. 8, 12 y 28
22. 6, 10 y 12
23. 9, 15 y 18
24. 8, 14 y 24

Para los problemas 25-30 reduzca cada fracción a su forma más simple.

25. $\frac{8}{12}$
26. $\frac{12}{16}$
27. $\frac{16}{24}$
28. $\frac{18}{32}$
29. $\frac{15}{9}$
30. $\frac{48}{36}$

Para los problemas 31-36, multiplique o divida como se indica, y exprese las respuestas en forma reducida.

31. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$
32. $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{11}$
33. $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$
34. $\frac{5}{6} \div \frac{11}{13}$
35. $\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{15}$
36. $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}$

37. Cierta receta pide $\frac{3}{4}$ de taza de leche. Para hacer la mitad de la receta, ¿cuánta leche se necesita?

38. John agrega un aditivo de combustible diesel a su tanque de combustible, que está medio lleno. Las instrucciones dicen agregar $\frac{1}{3}$ de la botella a un tanque lleno de combustible. ¿Qué parte de la botella debe agregar al tanque de combustible?

39. Mark comparte una computadora con sus compañeros de cuarto. Él particionó el disco duro en tal forma que obtiene $\frac{1}{3}$ del espacio del disco. Su parte del disco duro en la actualidad está $\frac{2}{3}$ lleno. ¿Qué parte del espacio del disco duro de la computadora actualmente ocupa?

40. Angelina enseña a $\frac{2}{3}$ de los niños sordos en su escuela local. Su escuela local educa a $\frac{1}{2}$ de los niños sordos en el distrito escolar. ¿A qué porción de los niños sordos del distrito escolar educa Angelina?

Para los problemas 41-57 sume o reste como se indica y exprese las respuestas en términos más bajos.

41. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$
42. $\frac{3}{11} + \frac{5}{11}$
43. $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$
44. $\frac{11}{13} - \frac{6}{13}$
45. $\frac{3}{4} + \frac{9}{4}$
46. $\frac{5}{6} + \frac{7}{6}$
47. $\frac{11}{12} - \frac{3}{12}$
48. $\frac{13}{16} - \frac{7}{16}$
49. $\frac{5}{24} + \frac{11}{24}$
50. $\frac{7}{36} + \frac{13}{36}$
51. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
52. $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$
53. $\frac{15}{16} - \frac{3}{8}$
54. $\frac{13}{12} - \frac{1}{6}$
55. $\frac{7}{10} + \frac{8}{15}$
56. $\frac{7}{12} + \frac{5}{8}$
57. $\frac{11}{24} + \frac{5}{32}$

58. Alicia y su hermano Jeff comparten pizza. Alicia come $\frac{1}{8}$ de la pizza, mientras que Jeff come $\frac{2}{3}$ de la pizza. ¿Cuánta de la pizza se comieron?

59. Rosa tiene $\frac{1}{3}$ de libra de moras, $\frac{1}{4}$ de libra de fresas y $\frac{1}{2}$ libra de frambuesas. Si combina éstas en una ensalada de frutas, ¿cuántas libras de estas bayas estarán en la ensalada?

60. Un químico tiene $\frac{11}{16}$ de onza de residuo seco para realizar pruebas de criminología. Necesita $\frac{3}{8}$ de onza para realizar una prueba de contenido de hierro. ¿Cuánto del residuo seco quedará para que el químico use en otras pruebas?

Para los problemas 61-68 simplifique cada expresión numérica y exprese las respuestas en forma reducida.

61. $\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{5}{12} - \frac{1}{24}$

62. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$

63. $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$

64. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

65. $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}$

66. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5}$

67. $\frac{7}{13}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

68. $48\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right)$

69. Blake Scott deja $\frac{1}{4}$ de su finca a los Boy Scouts, $\frac{2}{5}$ a la fundación de cáncer local y el resto a su iglesia. ¿Qué fracción de la finca recibe la iglesia?

70. Franco tiene $\frac{7}{8}$ de onza de oro. Quiere dar $\frac{3}{16}$ de onza a su amiga Julie. Planea dividir la cantidad restante de su oro a la mitad para hacer dos anillos. ¿Cuánto oro tendrá para cada anillo?

Respuestas a problemas con número impar y todos los problemas de repaso de capítulo, examen de capítulo y de repaso acumulados

CAPÍTULO 1

Conjunto de problemas 1.1 (página 10)

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** 0 y 14 **13.** 0, 14, $\frac{2}{3}$, $-\frac{11}{14}$, 2.34, $3.2\overline{1}$, $\frac{55}{8}$, -19 y -2.6 **15.** 0 y 14 **17.** Todos ellos. **19.** $\not\subseteq$ **21.** $\subseteq$ **23.** $\not\subseteq$ **25.** $\subseteq$ **27.** $\not\subseteq$ **29.** Real, racional, entero y negativo **31.** Real, irracional y negativo **33.** $\{1, 2\}$ **35.** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ **37.** $\{\ldots, -1, 0, 1, 2\}$ **39.** $\varnothing$ **41.** $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ **43.** -6 **45.** 2 **47.** $3x + 1$ **49.** $5x$ **51.** 26 **53.** 84 **55.** 23 **57.** 65 **59.** 60 **61.** 33 **63.** 1320 **65.** 20 **67.** 119 **69.** 18 **71.** 4 **73.** 31

Conjunto de problemas 1.2 (página 20)

1. -7 **3.** -19 **5.** -22 **7.** -7 **9.** 108 **11.** -70 **13.** 14 **15.** -7 **17.** $3\frac{1}{2}$ **19.** $5\frac{1}{2}$ **21.** $-\frac{2}{15}$ **23.** -4 **25.** 0 **27.** Indefinido **29.** -60 **31.** -4.8 **33.** 14.13 **35.** -6.5 **37.** -38.88 **39.** 0.2 **41.** $-\frac{13}{12}$ **43.** $-\frac{3}{4}$ **45.** $-\frac{13}{9}$ **47.** $-\frac{3}{5}$ **49.** $-\frac{3}{2}$ **51.** -12 **53.** -24 **55.** $\frac{79}{8}$ **57.** 15 **59.** -17 **61.** $\frac{47}{12}$ **63.** 5 **65.** 0 **67.** 26 **69.** 6 **71.** 25 **73.** 78 **75.** -10 **77.** 5 **79.** -5 **81.** 10.5 **83.** -3.3 **85.** 19.5 **87.** $\frac{3}{4}$ **89.** $\frac{5}{2}$ **93.** 10 sobre par **95.** Pérdida de $16.50 **97.** Ganancia de 0.88 dólares **99.** No; lo hicieron 49.1 libras más ligero

Conjunto de problemas 1.3 (página 28)

1. Propiedad asociativa de la suma

3. Propiedad conmutativa de la suma

5. Propiedad de inverso aditivo

7 Propiedad multiplicativa de uno negativo

9. Propiedad conmutativa de la multiplicación

11. Propiedad distributiva

13. Propiedad asociativa de la multiplicación

15. 18 **17.** 2 **19.** -1300 **21.** 1700 **23.** -47 **25.** 3200 **27.** -19 **29.** -41 **31.** -17 **33.** -39 **35.** 24 **37.** 20 **39.** 55 **41.** 16 **43.** 49 **45.** -216 **47.** -14 **49.** -8 **51.** $\frac{3}{16}$ **53.** $-\frac{10}{9}$ **57.** 2187 **59.** -2048 **61.** $-15\,625$ **63.** 3.9525416

Conjunto de problemas 1.4 (página 37)

1. $4x$ **3.** $-a^2$ **5.** $-6n$ **7.** $-5x + 2y$ **9.** $6a^2 + 5b^2$ **11.** $21x - 13$ **13.** $-2a^2b - ab^2$ **15.** $8x + 21$ **17.** $-5a + 2$ **19.** $-5n^2 + 11$ **21.** $-7x^2 + 32$ **23.** $22x - 3$ **25.** $-14x - 7$ **27.** $-10n^2 + 4$ **29.** $4x - 30y$ **31.** $-13x - 31$ **33.** $-21x - 9$ **35.** -17 **37.** 12 **39.** 4 **41.** 3 **43.** -38 **45.** -14 **47.** 64 **49.** 104 **51.** 5 **53.** 4 **55.** $-\frac{22}{3}$ **57.** $\frac{29}{4}$ **59.** 221.6 **61.** 1092.4 **63.** 1420.5 **65.** $n + 12$ **67.** $n - 5$ **69.** $50n$ **71.** $\frac{1}{2}n - 4$ **73.** $\frac{n}{8}$ **75.** $2n - 9$ **77.** $10(n - 6)$ **79.** $n + 20$ **81.** $2t - 3$ **83.** $n + 47$ **85.** $8y$ **87.** $\frac{\text{m}}{4}$ **89.** $\frac{c}{25}$ **91.** $n + 2$ **93.** $\frac{c}{5}$ **95.** $12d$ **97.** $3y + f$ **99.** $5280m$

Capítulo 1 Conjunto de problemas de repaso (página 41)

1. **(a)** 67 **(b)** 0, -8 y 67 **(c)** 0 y 67 **(d)** 0, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{25}{3}$, -8, 0.34, $0.2\overline{3}$, 67 y $\frac{9}{7}$ **(e)** $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{3}$

2. Propiedad asociativa de la suma

3. Propiedad de sustitución de igualdad

4. Propiedad multiplicativa de uno negativo

5. Propiedad distributiva

6. Propiedad asociativa de la multiplicación

7. Propiedad conmutativa de la suma

8. Propiedad distributiva

9. Propiedad de inverso multiplicativo

10. Propiedad simétrica de la igualdad

11. $-6\frac{1}{2}$ **12.** $-6\frac{1}{6}$ **13.** -8 **14.** -15 **15.** 20 **16.** 49

17. -56 **18.** -24 **19.** 6 **20.** 4 **21.** 100 **22.** 8

23. $-4a^2 - 5b^2$ **24.** $3x - 2$ **25.** ab^2 **26.** $-\frac{7}{3}x^2y$

27. $10n^2 - 17$ **28.** $-13a + 4$ **29.** $-2n + 2$

30. $-7x - 29y$ **31.** $-7a - 9$ **32.** $-9x^2 + 7$ **33.** $-6\frac{1}{2}$

34. $-\frac{5}{16}$ **35.** -55 **36.** 144 **37.** -16 **38.** -44

39. 19.4 **40.** 59.6 **41.** $-\frac{59}{3}$ **42.** $\frac{9}{2}$ **43.** $4 + 2n$

44. $3n - 50$ **45.** $\frac{2}{3}n - 6$ **46.** $10(n - 14)$ **47.** $5n - 8$

48. $\frac{n}{n-3}$ **49.** $5(n + 2) - 3$ **50.** $\frac{3}{4}(n + 12)$

51. $37 - n$ **52.** $\frac{w}{60}$ **53.** $2y - 7$ **54.** $n + 3$

55. $p + 5n + 25q$ **56.** $\frac{i}{48}$ **57.** $24f + 72y$ **58.** $10d$

59. $12f + i$ **60.** $25 - c$

Capítulo 1 Examen (página 43)

1. Propiedad simétrica **2.** Propiedad distributiva **3.** -3

4. -23 **5.** $-\frac{23}{6}$ **6.** 11 **7.** 8 **8.** -94 **9.** -4 **10.** 960

11. -32 **12.** $-x^2 - 8x - 2$ **13.** $-19n - 20$ **14.** 27

15. $\frac{11}{16}$ **16.** $\frac{2}{3}$ **17.** 77 **18.** -22.5 **19.** 93 **20.** -5

21. $6n - 30$ **22.** $3n + 28$ o $3(n + 8) + 4$ **23.** $\frac{72}{n}$

24. $5n + 10d + 25q$ **25.** $6x + 2y$

CAPÍTULO 2

Conjunto de problemas 2.1 (página 51)

1. $\{4\}$ **3.** $\{-3\}$ **5.** $\{-14\}$ **7.** $\{6\}$ **9.** $\left\{\frac{19}{3}\right\}$ **11.** $\{1\}$

13. $\left\{-\frac{10}{3}\right\}$ **15.** $\{4\}$ **17.** $\left\{-\frac{13}{3}\right\}$ **19.** $\{3\}$ **21.** $\{8\}$

23. $\{-9\}$ **25.** $\{-3\}$ **27.** $\{0\}$ **29.** $\left\{-\frac{7}{2}\right\}$ **31.** $\{-2\}$

33. $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{33}{2}\right\}$ **37.** $\{-35\}$ **39.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **41.** $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

43. $\{5\}$ **45.** $\{-1\}$ **47.** $\left\{-\frac{21}{16}\right\}$ **49.** $\left\{\frac{12}{7}\right\}$ **51.** 14

53. 13, 14 y 15 **55.** 9, 11 y 13 **57.** 14 y 81 **59.** \$11 por hora **61.** 30 monedas de un centavo, 50 monedas de 5 centavos y 70 monedas de 10 centavos **63.** \$300 **65.** 20 de tres recámaras, 70 de dos recámaras y 140 de una recámara **73.** **(a)** $\varnothing$ **(c)** $\{0\}$ **(e)** $\varnothing$

Conjunto de problemas 2.2 (página 59)

1. $\{12\}$ **3.** $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$ **5.** $\{3\}$ **7.** $\{-2\}$ **9.** $\{-36\}$ **11.** $\left\{\frac{20}{9}\right\}$

13. $\{3\}$ **15.** $\{3\}$ **17.** $\{-2\}$ **19.** $\left\{\frac{8}{5}\right\}$ **21.** $\{-3\}$

23. $\left\{\frac{48}{17}\right\}$ **25.** $\left\{\frac{103}{6}\right\}$ **27.** $\{3\}$ **29.** $\left\{\frac{40}{3}\right\}$ **31.** $\left\{-\frac{20}{7}\right\}$

33. $\left\{\frac{24}{5}\right\}$ **35.** $\{-10\}$ **37.** $\left\{-\frac{25}{4}\right\}$ **39.** $\{0\}$ **41.** 18

43. 16 pulgadas de largo y 5 pulgadas de ancho **45.** 14, 15 y 16 **47.** 8 pies **49.** Angie tiene 22 y su madre 42 **51.** Sydney tiene 18 y Marcus 36 **53.** 80, 90 y 94 **55.** 48° y 132° **57.** 78°

Conjunto de problemas 2.3 (página 67)

1. $\{20\}$ **3.** $\{50\}$ **5.** $\{40\}$ **7.** $\{12\}$ **9.** $\{6\}$ **11.** $\{400\}$ **13.** $\{400\}$ **15.** $\{38\}$ **17.** $\{6\}$ **19.** $\{3000\}$ **21.** $\{3000\}$ **23.** $\{400\}$ **25.** $\{14\}$ **27.** $\{15\}$ **29.** \$90 **31.** \$54.40 **33.** \$48 **35.** \$400 **37.** 65% **39.** 62.5% **41.** \$32 500 **43.** \$3000 al 10% y \$4500 al 11% **45.** \$53 000 **47.** 8 monedas de 1 centavos, **49.** 15 monedas de 10 centavos, 45 monedas de 25 centavos y 10 monedas de 50 centavos

55. $\{7.5\}$ **57.** $\{-4775\}$ **59.** $\{8.7\}$ **61.** $\{17.1\}$ **63.** $\{13.5\}$

Conjunto de problemas 2.4 (página 77)

1. \$120 **3.** 3 años **5.** 6% **7.** \$800 **9.** \$1600 **11.** 8% **13.** \$200 **15.** 6 pies; 14 pies; 10 pies; 20 pies; 7 pies; 2 pies **17.** $h = \frac{V}{B}$ **19.** $h = \frac{V}{\pi r^2}$ **21.** $r = \frac{C}{2\pi}$

23. $C = \frac{100M}{I}$ **25.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ o $C = \frac{5F - 160}{9}$

27. $x = \frac{y - b}{m}$ **29.** $x = \frac{y - y_1 + mx_1}{m}$

31. $x = \frac{ab + bc}{b - a}$ **33.** $x = a + bc$ **35.** $x = \frac{3b - 6a}{2}$

37. $x = \frac{5y + 7}{2}$ **39.** $y = -7x - 4$ **41.** $x = \frac{6y + 4}{3}$

43. $x = \dfrac{cy - ac - b^2}{b}$ **45.** $y = \dfrac{x - a + 1}{a - 3}$

47. 22 metros de largo y 6 metros de ancho **49.** $11\frac{1}{9}$ años

51. $11\frac{1}{9}$ años **53.** 4 horas **55.** 3 horas **57.** 40 millas

59. 15 cuartos de solución al 30% y 5 cuartos de solución al 70% **61.** 25 mililitros **67.** \$596.25 **69.** 1.5 años **71.** 14.5% **73.** \$1850

Conjunto de problemas 2.5 (página 86)

1. $(1, \infty)$

1

3. $[-1, \infty)$

−1

5. $(-\infty, -2)$

−2

7. $(-\infty, 2]$

2

9. $x < 4$ **11.** $x \le -7$ **13.** $x > 8$ **15.** $x \ge -7$

17. $(1, \infty)$

1

19. $(-\infty, -4]$

−4

21. $(-\infty, -2]$

−2

23. $(-\infty, 2)$

2

25. $(-1, \infty)$

−1

27. $[-1, \infty)$

−1

29. $(-2, \infty)$

−2

31. $(-2, \infty)$

−2

33. $(-\infty, -2)$

−2

35. $[-3, \infty)$

−3

37. $(0, \infty)$

0

39. $[4, \infty)$

4

41. $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ **43.** $\left(\frac{12}{5}, \infty\right)$ **45.** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

47. $\left[\frac{5}{12}, \infty\right)$ **49.** $(-6, \infty)$ **51.** $(-5, \infty)$

53. $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ **55.** $(-36, \infty)$ **57.** $\left(-\infty, -\frac{8}{17}\right]$

59. $\left(-\frac{11}{2}, \infty\right)$ **61.** $(23, \infty)$ **63.** $(-\infty, 3)$

65. $\left(-\infty, -\frac{1}{7}\right]$ **67.** $(-22, \infty)$ **69.** $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right)$

Conjunto de problemas 2.6 (página 94)

1. $(4, \infty)$ **3.** $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right)$ **5.** $[5, \infty)$ **7.** $[-9, \infty)$

9. $\left(-\infty, -\frac{37}{3}\right]$ **11.** $\left(-\infty, -\frac{19}{6}\right)$ **13.** $(-\infty, 50]$

15. $(300, \infty)$ **17.** $[4, \infty)$

19. $(-1, 2)$

−1 2

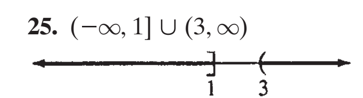
21. $(-1, 2]$

−1 2

23. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

−1 2

25. $(-\infty, 1] \cup (3, \infty)$



27. $(0, \infty)$

29. $\varnothing$

31. $(-\infty, \infty)$

33. $(-1, \infty)$

35. $(1, 3)$

37. $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$

39. $[3, \infty)$

41. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$

43. $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

45. $(-2, 2)$ **47.** $[-5, 4]$ **49.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

51. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ **53.** $[-11, 13]$ **55.** $(-1, 5)$

57. Más de 10% **59.** 5 pies y 10 pulgadas o mayor
61. 168 o mayor **63.** 77 o menos **65.** $163 \leq C \leq 218$
67. $6.3 \leq M \leq 11.25$

Conjunto de problemas 2.7 (página 101)

1. $(-5, 5)$

3. $[-2, 2]$

5. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

7. $(-1, 3)$

9. $[-6, 2]$

11. $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

13. $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

15. $\{-7, 9\}$ **17.** $(-\infty, -4) \cup (8, \infty)$ **19.** $(-8, 2)$
21. $\{-1, 5\}$ **23.** $[-4, 5]$ **25.** $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$
27. $\left\{-5, \frac{7}{3}\right\}$ **29.** $\{-1, 5\}$ **31.** $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$
33. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **35.** $\left[-5, \frac{7}{5}\right]$ **37.** $\left\{\frac{1}{12}, \frac{17}{12}\right\}$ **39.** $[-3, 10]$
41. $(-5, 11)$ **43.** $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ **45.** $\{0, 3\}$
47. $\{-6, 2\}$ **49.** $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ **51.** $(-\infty, -14] \cup [0, \infty)$
53. $[-2, 3]$ **55.** $\varnothing$ **57.** $(-\infty, \infty)$ **59.** $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ **61.** $\varnothing$
63. $\varnothing$ **69.** $\left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$ **71.** $\{-2\}$ **73.** $\{0\}$

Capítulo 2 Conjunto de problemas de repaso (página 104)

1. $\{18\}$ **2.** $\{-14\}$ **3.** $\{0\}$ **4.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **5.** $\{10\}$ **6.** $\left\{\frac{7}{3}\right\}$
7. $\left\{\frac{28}{17}\right\}$ **8.** $\left\{-\frac{1}{38}\right\}$ **9.** $\left\{\frac{27}{17}\right\}$ **10.** $\left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$
11. $\{50\}$ **12.** $\left\{-\frac{39}{2}\right\}$ **13.** $\{200\}$ **14.** $\{-8\}$
15. $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ **16.** $x = \frac{2b + 2}{a}$ **17.** $x = \frac{c}{a - b}$

18. $x = \dfrac{pb - ma}{m - p}$ **19.** $x = \dfrac{11 + 7y}{5}$

20. $x = \dfrac{by + b + ac}{c}$ **21.** $s = \dfrac{A - \pi r^2}{\pi r}$

22. $b_2 = \dfrac{2A - hb_1}{h}$ **23.** $n = \dfrac{2S_n}{a_1 + a_2}$ **24.** $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$

25. $[-5, \infty)$ **26.** $(4, \infty)$ **27.** $\left(-\frac{7}{3}, \infty\right)$ **28.** $\left[\frac{17}{2}, \infty\right)$

29. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ **30.** $\left(\frac{53}{11}, \infty\right)$ **31.** $[6, \infty)$ **32.** $(-\infty, 100]$

33. $(-5, 6)$ **34.** $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right) \cup (3, \infty)$ **35.** $(-\infty, -17)$

36. $\left(-\infty, -\frac{15}{4}\right)$

37. −1 1

38. −3 2

39. 3

40.

41. −2 1

42. −2 1

43. $\frac{1}{2}$ 3

44. $\varnothing$ **45.** La longitud es 15 metros y el ancho es 7 metros. **46.** \$200 a 7% y \$300 a 8% **47.** 88 o mejor **48.** 4, 5 y 6 **49.** \$10.50 por hora **50.** 20 monedas de 5 centavos, 50 monedas de 10 centavos y 75 monedas de 25 centavos **51.** 80° **52.** \$45.60

53. $\frac{2}{3}$ pintas **54.** 55 millas por hora **55.** Sonya durante $3\frac{1}{4}$ horas y Rita durante $4\frac{1}{2}$ horas **56.** $6\frac{1}{4}$ tazas

Capítulo 2 Examen (página 107)

1. $\{-3\}$ **2.** $\{5\}$ **3.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **4.** $\left\{\frac{16}{5}\right\}$ **5.** $\left\{-\frac{14}{5}\right\}$ **6.** $\{-1\}$ **7.** $\left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$ **8.** $\{3\}$ **9.** $\left\{\frac{31}{3}\right\}$ **10.** $\{650\}$ **11.** $y = \dfrac{8x - 24}{9}$ **12.** $h = \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$ **13.** $(-2, \infty)$ **14.** $[-4, \infty)$ **15.** $(-\infty, -35]$ **16.** $(-\infty, 10)$ **17.** $(3, \infty)$ **18.** $(-\infty, 200]$ **19.** $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ **20.** $\left(-\infty, -\frac{11}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ **21.** \$72 **22.** 19 centímetros **23.** $\frac{2}{3}$ de una taza **24.** 97 o mejor **25.** 70°

CAPÍTULO 3

Conjunto de problemas 3.1 (página 113)

1. 2 **3.** 3 **5.** 2 **7.** 6 **9.** 0 **11.** $10x - 3$ **13.** $-11t + 5$ **15.** $-x^2 + 2x - 2$ **17.** $17a^2b^2 - 5ab$ **19.** $-9x + 7$ **21.** $-2x + 6$ **23.** $10a + 7$ **25.** $4x^2 + 10x + 6$ **27.** $-6a^2 + 12a + 14$ **29.** $3x^3 + x^2 + 13x - 11$ **31.** $7x + 8$ **33.** $-3x - 16$ **35.** $2x^2 - 2x - 8$ **37.** $-3x^3 + 5x^2 - 2x + 9$ **39.** $5x^2 - 4x + 11$ **41.** $-6x^2 + 9x + 7$ **43.** $-2x^2 + 9x + 4$ **45.** $-10n^2 + n + 9$ **47.** $8x - 2$ **49.** $8x - 14$ **51.** $-9x^2 - 12x + 4$ **53.** $10x^2 + 13x - 18$ **55.** $-n^2 - 4n - 4$ **57.** $-x + 6$ **59.** $6x^2 - 4$ **61.** $-7n^2 + n + 6$ **63.** $t^2 - 4t + 8$ **65.** $4n^2 - n - 12$ **67.** $-4x - 2y$ **69.** $-x^3 - x^2 + 3x$ **71.** **(a)** $8x + 4$ **(c)** $12x + 6$ **73.** $8\pi h + 32\pi$ **(a)** 226.1 **(c)** 452.2

Conjunto de problemas 3.2 (página 120)

1. $36x^4$ **3.** $-12x^5$ **5.** $4a^3b^4$ **7.** $-3x^3y^2z^6$ **9.** $-30xy^4$ **11.** $27a^4b^5$ **13.** $-m^3n^3$ **15.** $\frac{3}{10}x^3y^6$ **17.** $-\frac{3}{20}a^3b^4$ **19.** $-\frac{1}{6}x^3y^4$ **21.** $30x^6$ **23.** $-18x^9$ **25.** $-3x^6y^6$ **27.** $-24y^9$ **29.** $-56a^4b^2$ **31.** $-18a^3b^3$ **33.** $-10x^7y^7$ **35.** $50x^5y^2$ **37.** $27x^3y^6$ **39.** $-32x^{10}y^5$ **41.** $x^{16}y^{20}$ **43.** $a^6b^{12}c^{18}$ **45.** $64a^{12}b^{18}$ **47.** $81x^2y^8$ **49.** $81a^4b^{12}$ **51.** $-16a^4b^4$ **53.** $-x^6y^{12}z^{18}$ **55.** $-125a^6b^6c^3$ **57.** $-x^7y^{28}z^{14}$ **59.** $3x^3y^3$ **61.** $-5x^3y^2$ **63.** $9bc^2$ **65.** $-18xyz^4$ **67.** $-a^2b^3c^2$ **69.** 9 **71.** $-b^2$ **73.** $-18x^3$ **75.** $6x^{3n}$ **77.** a^{5n+3} **79.** x^{4n} **81.** a^{5n+1} **83.** $-10x^{2n}$ **85.** $12a^{n+4}$ **87.** $6x^{3n+2}$ **89.** $12x^{n+2}$ **91.** $22x^2$; $6x^3$ **93.** $\pi r^2 - 36\pi$

Conjunto de problemas 3.3 (página 127)

1. $10x^2y^3 + 6x^3y^4$ **3.** $-12a^3b^3 + 15a^5b$ **5.** $24a^4b^5 - 16a^4b^6 + 32a^5b^6$ **7.** $-6x^3y^3 - 3x^4y^4 + x^5y^2$ **9.** $ax + ay + 2bx + 2by$ **11.** $ac + 4ad - 3bc - 12bd$ **13.** $x^2 + 16x + 60$ **15.** $y^2 + 6y - 55$ **17.** $n^2 - 5n - 14$

19. $x^2 - 36$ **21.** $x^2 - 12x + 36$ **23.** $x^2 - 14x + 48$
25. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ **27.** $x^3 - x^2 - 9x + 9$
29. $t^2 + 18t + 81$ **31.** $y^2 - 14y + 49$
33. $4x^2 + 33x + 35$ **35.** $9y^2 - 1$ **37.** $14x^2 + 3x - 2$
39. $5 + 3t - 2t^2$ **41.** $9t^2 + 42t + 49$ **43.** $4 - 25x^2$
45. $49x^2 - 56x + 16$ **47.** $18x^2 - 39x - 70$
49. $2x^2 + xy - 15y^2$ **51.** $25x^2 - 4a^2$ **53.** $t^3 - 14t - 15$
55. $x^3 + x^2 - 24x + 16$ **57.** $2x^3 + 9x^2 + 2x - 30$
59. $12x^3 - 7x^2 + 25x - 6$
61. $x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 11x + 4$
63. $2x^4 - x^3 - 12x^2 + 5x + 4$
65. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ **67.** $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
69. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ **71.** $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$
73. $125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$ **75.** $x^{2n} - 16$
77. $x^{2a} + 4x^a - 12$ **79.** $6x^{2n} + x^n - 35$
81. $x^{4a} - 10x^{2a} + 21$ **83.** $4x^{2n} + 20x^n + 25$
87. $2x^2 + 6$ **89.** $4x^3 - 64x^2 + 256x$; $256 - 4x^2$
93. **(a)** $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ **(c)** $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

Conjunto de problemas 3.4 (página 135)

1. Compuesto **3.** Primo **5.** Compuesto **7.** Compuesto
9. Primo **11.** $2 \cdot 2 \cdot 7$ **13.** $2 \cdot 2 \cdot 11$ **15.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$
17. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ **19.** $3 \cdot 29$ **21.** $3(2x + y)$
23. $2x(3x + 7)$ **25.** $4y(7y - 1)$ **27.** $5x(4y - 3)$
29. $x^2(7x + 10)$ **31.** $9ab(2a + 3b)$ **33.** $3x^3y^3(4y - 13x)$
35. $4x^2(2x^2 + 3x - 6)$ **37.** $x(5 + 7x + 9x^3)$
39. $5xy^2(3xy + 4 + 7x^2y^2)$ **41.** $(y + 2)(x + 3)$
43. $(2a + b)(3x - 2y)$ **45.** $(x + 2)(x + 5)$
47. $(a + 4)(x + y)$ **49.** $(a - 2b)(x + y)$
51. $(a - b)(3x - y)$ **53.** $(a + 1)(2x + y)$
55. $(a - 1)(x^2 + 2)$ **57.** $(a + b)(2c + 3d)$
59. $(a + b)(x - y)$ **61.** $(x + 9)(x + 6)$
63. $(x + 4)(2x + 1)$ **65.** $\{-7, 0\}$ **67.** $\{0, 1\}$
69. $\{0, 5\}$ **71.** $\left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ **73.** $\left\{-\frac{7}{3}, 0\right\}$ **75.** $\left\{0, \frac{5}{4}\right\}$
77. $\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$ **79.** $\{-12, 0\}$ **81.** $\left\{0, \frac{3a}{5b}\right\}$ **83.** $\left\{-\frac{3a}{2b}, 0\right\}$
85. $\{a, -2b\}$ **87.** 0 o 7 **89.** 6 unidades **91.** $\frac{4}{\pi}$ unidades
93. El cuadrado es 100 pies por 100 pies, y el rectángulo mide 50 pies por 100 pies.
95. 6 unidades **101.** $x^a(2x^a - 3)$ **103.** $y^{2m}(y^m + 5)$
105. $x^{4a}(2x^{2a} - 3x^a + 7)$

Conjunto de problemas 3.5 (página 142)

1. $(x + 1)(x - 1)$ **3.** $(4x + 5)(4x - 5)$
5. $(3x + 5y)(3x - 5y)$ **7.** $(5xy + 6)(5xy - 6)$
9. $(2x + y^2)(2x - y^2)$ **11.** $(1 + 12n)(1 - 12n)$
13. $(x + 2 + y)(x + 2 - y)$ **15.** $(2x + y + 1)(2x - y - 1)$
17. $(3a + 2b + 3)(3a - 2b - 3)$ **19.** $-5(2x + 9)$
21. $9(x + 2)(x - 2)$ **23.** $5(x^2 + 1)$ **25.** $8(y + 2)(y - 2)$
27. $ab(a + 3)(a - 3)$ **29.** No factorizable
31. $(n + 3)(n - 3)(n^2 + 9)$ **33.** $3x(x^2 + 9)$
35. $4xy(x + 4y)(x - 4y)$ **37.** $6x(1 + x)(1 - x)$
39. $(1 + xy)(1 - xy)(1 + x^2y^2)$ **41.** $4(x + 4y)(x - 4y)$
43. $3(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$ **45.** $(a - 4)(a^2 + 4a + 16)$
47. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
49. $(3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$
51. $(1 - 3a)(1 + 3a + 9a^2)$ **53.** $(xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$
55. $(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
57. $\{-5, 5\}$ **59.** $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right\}$ **61.** $\{-2, 2\}$ **63.** $\{-1, 0, 1\}$
65. $\{-2, 2\}$ **67.** $\{-3, 3\}$ **69.** $\{0\}$ **71.** -3, 0 o 3
73. 4 centímetros y 8 centímetros **75.** 10 metros de largo y 5 metros de ancho **77.** 6 pulgadas **79.** 8 yardas

Conjunto de problemas 3.6 (página 150)

1. $(x + 5)(x + 4)$ **3.** $(x - 4)(x - 7)$ **5.** $(a + 9)(a - 4)$
7. $(y + 6)(y + 14)$ **9.** $(x - 7)(x + 2)$ **11.** No factorizable **13.** $(6 - x)(1 + x)$ **15.** $(x + 3y)(x + 12y)$
17. $(a - 8b)(a + 7b)$ **19.** $(3x + 1)(5x + 6)$
21. $(4x - 3)(3x + 2)$ **23.** $(a + 3)(4a - 9)$
25. $(n - 4)(3n + 5)$ **27.** No factorizable
29. $(2n - 7)(5n + 3)$ **31.** $(4x - 5)(2x + 9)$
33. $(1 - 6x)(6 + x)$ **35.** $(5y + 9)(4y - 1)$
37. $(12n + 5)(2n - 1)$ **39.** $(5n + 3)(n + 6)$
41. $(x + 10)(x + 15)$ **43.** $(n - 16)(n - 20)$
45. $(t + 15)(t - 12)$ **47.** $(t^2 - 3)(t^2 - 2)$
49. $(2x^2 - 1)(5x^2 + 4)$ **51.** $(x + 1)(x - 1)(x^2 - 8)$
53. $(3n + 1)(3n - 1)(2n^2 + 3)$
55. $(x + 1)(x - 1)(x + 4)(x - 4)$ **57.** $2(t + 2)(t - 2)$
59. $(4x + 5y)(3x - 2y)$ **61.** $3n(2n + 5)(3n - 1)$
63. $(n - 12)(n - 5)$ **65.** $(6a - 1)^2$ **67.** $6(x^2 + 9)$
69. No factorizable **71.** $(x + y - 7)(x - y + 7)$
73. $(1 + 4x^2)(1 + 2x)(1 - 2x)$ **75.** $(4n + 9)(n + 4)$
77. $n(n + 7)(n - 7)$ **79.** $(x - 8)(x + 1)$
81. $3x(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ **83.** $(x^2 + 3)^2$
85. $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 4)$ **87.** $(2w - 7)(3w + 5)$
89. No factorizable **91.** $2n(n^2 + 7n - 10)$
93. $(2x + 1)(y + 3)$ **99.** $(x^a + 3)(x^a + 7)$
101. $(2x^a + 5)^2$ **103.** $(5x^n - 1)(4x^n + 5)$
105. $(x - 4)(x - 2)$ **107.** $(3x - 11)(3x + 2)$
109. $(3x + 4)(5x + 9)$

Conjunto de problemas 3.7 (página 156)

1. $\{-3, -1\}$ **3.** $\{-12, -6\}$ **5.** $\{4, 9\}$ **7.** $\{-6, 2\}$
9. $\{-1, 5\}$ **11.** $\{-13, -12\}$ **13.** $\left\{-5, \frac{1}{3}\right\}$

15. $\left\{-\frac{7}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ **17.** $\{0, 4\}$ **19.** $\left\{\frac{1}{6}, 2\right\}$ **21.** $\{-6, 0, 6\}$
23. $\{-4, 6\}$ **25.** $\{-4, 4\}$ **27.** $\{-11, 4\}$ **29.** $\{-5, 5\}$
31. $\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{3}{5}\right\}$ **33.** $\left\{-\frac{1}{8}, 6\right\}$ **35.** $\left\{\frac{3}{7}, \frac{5}{4}\right\}$ **37.** $\left\{-\frac{2}{7}, \frac{4}{5}\right\}$
39. $\left\{-7, \frac{2}{3}\right\}$ **41.** $\{-20, 18\}$ **43.** $\left\{-2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2\right\}$
45. $\left\{-\frac{2}{3}, 16\right\}$ **47.** $\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$ **49.** $\left\{-\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}, 0\right\}$
51. $\left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$ **53.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ **55.** 8 y 9 o −9 y −8
57. 7 y 15 **59.** 10 pulgadas por 6 pulgadas **61.** −7 y −6 o 6 y 7 **63.** 4 centímetros por 4 centímetros y 6 centímetros por 8 centímetros **65.** 3, 4 y 5 unidades **67.** 9 pulgadas y 12 pulgadas **69.** Una altura de 4 pulgadas y un lado de 14 pulgadas de largo
77. (a) 0.28 y 3.73 **(c)** 2.27 y 5.76 **(e)** 0.71

Capítulo 3 Conjunto de problemas de repaso (página 160)

1. $5x - 3$ **2.** $3x^2 + 12x - 2$ **3.** $12x^2 - x + 5$
4. $-20x^5y^7$ **5.** $-6a^5b^5$ **6.** $15a^4 - 10a^3 - 5a^2$
7. $24x^2 + 2xy - 15y^2$ **8.** $3x^3 + 7x^2 - 21x - 4$
9. $256x^8y^{12}$ **10.** $9x^2 - 12xy + 4y^2$ **11.** $-8x^6y^9z^3$
12. $-13x^2y$ **13.** $2x + y - 2$
14. $x^4 + x^3 - 18x^2 - x + 35$ **15.** $21 + 26x - 15x^2$
16. $-12a^5b^7$ **17.** $-8a^7b^3$ **18.** $7x^2 + 19x - 36$
19. $6x^3 - 11x^2 - 7x + 2$ **20.** $6x^{4n}$
21. $4x^2 + 20xy + 25y^2$ **22.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
23. $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$ **24.** $(x + 7)(x - 4)$
25. $2(t + 3)(t - 3)$ **26.** No factorizable
27. $(4n - 1)(3n - 1)$ **28.** $x^2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
29. $x(x - 12)(x + 6)$ **30.** $2a^2b(3a + 2b - c)$
31. $(x - y + 1)(x + y - 1)$ **32.** $4(2x^2 + 3)$
33. $(4x + 7)(3x - 5)$ **34.** $(4n - 5)^2$ **35.** $4n(n - 2)$
36. $3w(w^2 + 6w - 8)$ **37.** $(5x + 2y)(4x - y)$
38. $16a(a - 4)$ **39.** $3x(x + 1)(x - 6)$
40. $(n + 8)(n - 16)$ **41.** $(t + 5)(t - 5)(t^2 + 3)$
42. $(5x - 3)(7x + 2)$ **43.** $(3 - x)(5 - 3x)$
44. $(4n - 3)(16n^2 + 12n + 9)$
45. $2(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$ **46.** $\{-3, 3\}$
47. $\{-6, 1\}$ **48.** $\left\{\frac{2}{7}\right\}$ **49.** $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right\}$
50. $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$ **51.** $\{-3, 0, 3\}$ **52.** $\{-1, 0, 1\}$
53. $\{-7, 9\}$ **54.** $\left\{-\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right\}$ **55.** $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$
56. $\{-2, 2\}$ **57.** $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ **58.** $\{-8, 6\}$
59. $\left\{-5, \frac{2}{7}\right\}$ **60.** $\{-8, 5\}$ **61.** $\{-12, 1\}$ **62.** $\varnothing$
63. $\left\{-5, \frac{6}{5}\right\}$ **64.** $\{0, 1, 8\}$ **65.** $\left\{-10, \frac{1}{4}\right\}$
66. 8, 9 y 10 o −1, 0 y 1 **67.** −6 y 8 **68.** 13 y 15 **69.** 12 millas y 16 millas **70.** 4 metros por 12 metros **71.** 9 filas y 16 sillas por fila **72.** El lado mide 13 pies de largo y la altura es 6 pies. **73.** 3 pies **74.** 5 centímetros por 5 centímetros y 8 centímetros por 8 centímetros **75.** 6 pulgadas

Capítulo 3 Examen (página 162)

1. $2x - 11$ **2.** $-48x^4y^4$ **3.** $-27x^6y^{12}$
4. $20x^2 + 17x - 63$ **5.** $6n^2 - 13n + 6$
6. $x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$ **7.** $2x^3 + 11x^2 - 11x - 30$
8. $-14x^3y$ **9.** $(6x - 5)(x + 4)$ **10.** $3(2x + 1)(2x - 1)$
11. $(4 + t)(16 - 4t + t^2)$ **12.** $2x(3 - 2x)(5 + 4x)$
13. $(x - y)(x + 4)$ **14.** $(3n + 8)(8n - 3)$ **15.** $\{-12, 4\}$
16. $\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **18.** $\{-4, -1\}$ **19.** $\{-9, 0, 2\}$
20. $\left\{-\frac{3}{7}, \frac{4}{5}\right\}$ **21.** $\left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$ **22.** $\{-2, 2\}$ **23.** 9 pulgadas
24. 15 filas **25.** 8 pies

Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 163)

1. 4 **2.** −19 **3.** 9 **4.** 21 **5.** −78 **6.** −33 **7.** −43
8. −11 **9.** −39 **10.** 57 **11.** $2x - 11$ **12.** $36a^2b^6$
13. $30x^2 - 37x - 7$ **14.** $-2x^2 - 11x - 12$ **15.** $-64a^6b^9$
16. $5x^3 - 6x^2 - 20x + 24$ **17.** $x^3 - 4x^2 - x + 12$
18. $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 19x - 28$ **19.** $7(x + 1)(x - 1)$
20. $(2a - b)^2$ **21.** $(3x + 7)(x - 8)$
22. $(1 - x)(1 + x + x^2)$ **23.** $(y - 5)(x + 2)$
24. $3(x - 4)^2$ **25.** $(4n^2 + 3)(n + 1)(n - 1)$
26. $4x(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ **27.** $4(x^2 + 9)$
28. $(3x + 4)(2x - 1)$ **29.** $(3x - 5)^2$
30. $(x + 3y)(2x + 1)$ **31.** $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$
32. $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ **33.** $2m^2n^2(5m^2 - mn - 2n^2)$
34. $(2y + 7z)(5x - 12)$ **35.** $(3x + 5)(x - 2)$
38. $(4y + 1)(16y^2 - 4y + 1)$ **39.** $x = \frac{2y + 6}{5}$
40. $y = \frac{12 - 3x}{4}$ **41.** $h = \frac{V - 2\pi r^2}{2\pi r}$ **42.** $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$
43. 10.5% **44.** −15° **45.** $\{-6, 3\}$ **46.** $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{2}{5}\right\}$
47. $\{-4\}$ **48.** $\{-9, 2\}$ **49.** $\{-1, 1\}$ **50.** $\{-10\}$
51. $\{15\}$ **52.** $\left\{-\frac{25}{4}\right\}$ **53.** $\left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$ **54.** $\{-1, 5\}$
55. $\{400\}$ **56.** $\{-4, 10\}$ **57.** $\{-4, 0, 4\}$

58. $\{-2, 3\}$ **59.** $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\}$ **60.** $\{-6, 5\}$ **61.** $\{-5, 0, 2\}$

62. $\left\{\frac{17}{12}\right\}$ **63.** $(-22, \infty)$ **64.** $(23, \infty)$

65. $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$ **66.** $\left(-7, \frac{7}{3}\right)$ **67.** $(300, \infty)$

68. $\left(-\infty, \frac{7}{8}\right]$ **69.** $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ **70.** $\left(-\infty, \frac{32}{31}\right)$

36. $(5 - 2a)(5 + 2a)$ **37.** $(6x + 5)^2$

71. 7, 9 y 11 **72.** 8 monedas de 5 centavos, 15 monedas de 10 centavos, 25 monedas de 25 centavos

73. 12 y 34 **74.** 62° y 118° **75.** \$400 a 8% y \$600 a 9% **76.** 35 monedas de un centavo, 40 monedas de 5 centavos, 70 monedas de 10 centavos

77. 1 hora y 40 minutos **78.** 25 mililitros

79. 40% **80.** Mejor que 88 **81.** 4 pulgadas

82. 7 metros por 14 metros **83.** 8 filas y 12 sillas por

CAPÍTULO 4

Conjunto de problemas 4.1 (página 170)

1. $\frac{3}{4}$ **3.** $\frac{5}{6}$ **5.** $-\frac{2}{5}$ **7.** $\frac{2}{7}$ **9.** $\frac{2x}{7}$ **11.** $\frac{2a}{5b}$ **13.** $-\frac{y}{4x}$

15. $-\frac{9c}{13d}$ **17.** $\frac{5x^2}{3y^3}$ **19.** $\frac{x-2}{x}$ **21.** $\frac{3x+2}{2x-1}$ **23.** $\frac{a+5}{a-9}$

25. $\frac{n-3}{5n-1}$ **27.** $\frac{5x^2+7}{10x}$ **29.** $\frac{3x+5}{4x+1}$

31. $\frac{3x}{x^2+4x+16}$ **33.** $\frac{x+6}{3x-1}$ **35.** $\frac{x(2x+7)}{y(x+9)}$

37. $\frac{y+4}{5y-2}$ **39.** $\frac{3x(x-1)}{x^2+1}$ **41.** $\frac{2(x+3y)}{3x(3x+y)}$

43. $\frac{3n-2}{7n+2}$ **45.** $\frac{4-x}{5+3x}$ **47.** $\frac{9x^2+3x+1}{2(x+2)}$

49. $\frac{-2(x-1)}{x+1}$ **51.** $\frac{y+b}{y+c}$ **53.** $\frac{x+2y}{2x+y}$ **55.** $\frac{x+1}{x-6}$

57. $\frac{2s+5}{3s+1}$ **59.** -1 **61.** $-n-7$ **63.** $-\frac{2}{x+1}$

65. -2 **67.** $-\frac{n+3}{n+5}$

Conjunto de problemas 4.2 (página 176)

1. $\frac{1}{10}$ **3.** $-\frac{4}{15}$ **5.** $\frac{3}{16}$ **7.** $-\frac{5}{6}$ **9.** $-\frac{2}{3}$

11. $\frac{10}{11}$ **13.** $-\frac{5x^3}{12y^2}$ **15.** $\frac{2a^3}{3b}$ **17.** $\frac{3x^3}{4}$

19. $\frac{25x^3}{108y^2}$ **21.** $\frac{ac^2}{2b^2}$ **23.** $\frac{3x}{4y}$ **25.** $\frac{3(x^2+4)}{5y(x+8)}$

27. $\frac{5(a+3)}{a(a-2)}$ **29.** $\frac{3}{2}$ **31.** $\frac{3xy}{4(x+6)}$

33. $\frac{5(x-2y)}{7y}$ **35.** $\frac{5+n}{3-n}$ **37.** $\frac{x^2+1}{x^2-10}$

39. $\frac{6x+5}{3x+4}$ **41.** $\frac{2t^2+5}{2(t^2+1)(t+1)}$ **43.** $\frac{t(t+6)}{4t+5}$

45. $\frac{n+3}{n(n-2)}$ **47.** $\frac{25x^3y^3}{4(x+1)}$ **49.** $\frac{2(a-2b)}{a(3a-2b)}$

Conjunto de problemas 4.3 (página 184)

1. $\frac{13}{12}$ **3.** $\frac{11}{40}$ **5.** $\frac{19}{20}$ **7.** $\frac{49}{75}$ **9.** $\frac{17}{30}$ **11.** $-\frac{11}{84}$

13. $\frac{2x+4}{x-1}$ **15.** 4 **17.** $\frac{7y-10}{7y}$ **19.** $\frac{5x+3}{6}$

21. $\frac{12a+1}{12}$ **23.** $\frac{n+14}{18}$ **25.** $-\frac{11}{15}$ **27.** $\frac{3x-25}{30}$

29. $\frac{43}{40x}$ **31.** $\frac{20y-77x}{28xy}$ **33.** $\frac{16y+15x-12xy}{12xy}$

35. $\frac{21+22x}{30x^2}$ **37.** $\frac{10n-21}{7n^2}$ **39.** $\frac{45-6n+20n^2}{15n^2}$

41. $\frac{11x-10}{6x^2}$ **43.** $\frac{42t+43}{35t^3}$ **45.** $\frac{20b^2-33a^3}{96a^2b}$

47. $\frac{14-24y^3+45xy}{18xy^3}$ **49.** $\frac{2x^2+3x-3}{x(x-1)}$

51. $\frac{a^2-a-8}{a(a+4)}$ **53.** $\frac{-41n-55}{(4n+5)(3n+5)}$

55. $\frac{-3x+17}{(x+4)(7x-1)}$ **57.** $\frac{-x+74}{(3x-5)(2x+7)}$

59. $\frac{38x+13}{(3x-2)(4x+5)}$ **61.** $\frac{5x+5}{2x+5}$ **63.** $\frac{x+15}{x-5}$

65. $\frac{-2x-4}{2x+1}$ **67.** **(a)** -1 **(c)** 0

Conjunto de problemas 4.4 (página 193)

1. $\frac{7x+20}{x(x+4)}$ **3.** $\frac{-x-3}{x(x+7)}$ **5.** $\frac{6x-5}{(x+1)(x-1)}$

7. $\frac{1}{a+1}$ **9.** $\frac{5n+15}{4(n+5)(n-5)}$ **11.** $\frac{x^2+60}{x(x+6)}$

13. $\frac{11x+13}{(x+2)(x+7)(2x+1)}$ **15.** $\frac{-3a+1}{(a-5)(a+2)(a+9)}$

17. $\frac{3a^2+14a+1}{(4a-3)(2a+1)(a+4)}$ **19.** $\frac{3x^2+20x-111}{(x^2+3)(x+7)(x-3)}$

21. $\frac{x+6}{(x-3)^2}$ **23.** $\frac{14x-4}{(x-1)(x+1)^2}$

25. $\frac{-7y-14}{(y+8)(y-2)}$ **27.** $\frac{-2x^2-4x+3}{(x+2)(x-2)}$

29. $\frac{2x^2+14x-19}{(x+10)(x-2)}$ **31.** $\frac{2n+1}{n-6}$

33. $\frac{2x^2 - 32x + 16}{(x + 1)(2x - 1)(3x - 2)}$ **35.** $\frac{1}{(n^2 + 1)(n + 1)}$
37. $\frac{-16x}{(5x - 2)(x - 1)}$ **39.** $\frac{t + 1}{t - 2}$ **41.** $\frac{2}{11}$
43. $-\frac{7}{27}$ **45.** $\frac{x}{4}$ **47.** $\frac{3y - 2x}{4x - 7}$ **49.** $\frac{6ab^2 - 5a^2}{12b^2 + 2a^2b}$
51. $\frac{2y - 3xy}{3x + 4xy}$ **53.** $\frac{3n + 14}{5n + 19}$ **55.** $\frac{5n - 17}{4n - 13}$
57. $\frac{-x + 5y - 10}{3y - 10}$ **59.** $\frac{-x + 15}{-2x - 1}$ **61.** $\frac{3a^2 - 2a + 1}{2a - 1}$
63. $\frac{-x^2 + 6x - 4}{3x - 2}$

Conjunto de problemas 4.5 (página 200)

1. $3x^3 + 6x^2$ **3.** $-6x^4 + 9x^6$ **5.** $3a^2 - 5a - 8$
7. $-13x^2 + 17x - 28$ **9.** $-3xy + 4x^2y - 8xy^2$
11. $x - 13$ **13.** $x + 20$ **15.** $2x + 1 - \frac{3}{x - 1}$
17. $5x - 1$ **19.** $3x^2 - 2x - 7$ **21.** $x^2 + 5x - 6$
23. $4x^2 + 7x + 12 + \frac{30}{x - 2}$ **25.** $x^3 - 4x^2 - 5x + 3$
27. $x^2 + 5x + 25$ **29.** $x^2 - x + 1 + \frac{63}{x + 1}$
31. $2x^2 - 4x + 7 - \frac{20}{x + 2}$ **33.** $4a - 4b$
35. $4x + 7 + \frac{23x - 6}{x^2 - 3x}$ **37.** $8y - 9 + \frac{8y + 5}{y^2 + y}$
39. $2x - 1$ **41.** $x - 3$ **43.** $5a - 8 + \frac{42a - 41}{a^2 + 3a - 4}$
45. $2n^2 + 3n - 4$ **47.** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
49. $x^3 - x^2 + x - 1$ **51.** $3x^2 + x + 1 + \frac{7}{x^2 - 1}$
53. $x - 6$ **55.** $x + 6$, R = 14 **57.** $x^2 - 1$
59. $x^2 - 2x - 3$ **61.** $2x^2 - x - 6$, R = −6
63. $x^3 + 7x^2 + 21x + 56$, R = 167

Conjunto de problemas 4.6 (página 208)

1. {2} **3.** {−3} **5.** {6} **7.** $\left\{-\frac{85}{18}\right\}$ **9.** $\left\{\frac{7}{10}\right\}$
11. {5} **13.** {58} **15.** $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$ **17.** $\left\{-\frac{2}{5}, 5\right\}$ **19.** {−16}
21. $\left\{-\frac{13}{3}\right\}$ **23.** {−3, 1} **25.** $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ **27.** {−51}
29. $\left\{-\frac{5}{3}, 4\right\}$ **31.** ∅ **33.** $\left\{-\frac{11}{8}, 2\right\}$ **35.** {−29, 0}
37. {−9, 3} **39.** $\left\{-2, \frac{23}{8}\right\}$ **41.** $\left\{\frac{11}{23}\right\}$ **43.** $\left\{3, \frac{7}{2}\right\}$
45. \$750 y \$1000 **47.** 48° y 72° **49.** $\frac{2}{7}$ o $\frac{7}{2}$
fila **84.** 9 pies, 12 pies y 15 pies
51. \$3500 **53.** \$69 para Tammy y \$51.75 para Laura
55. 8 y 82 **57.** 14 pies y 6 pies **59.** 690 mujeres y 460 hombres

Conjunto de problemas 4.7 (página 217)

1. {−21} **3.** {−1, 2} **5.** {2} **7.** $\left\{\frac{37}{15}\right\}$ **9.** {−1}
11. {−1} **13.** $\left\{0, \frac{13}{2}\right\}$ **15.** $\left\{-2, \frac{19}{2}\right\}$ **17.** {−2}
19. $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ **21.** ∅ **23.** $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ **25.** {−3} **27.** $\left\{-\frac{7}{9}\right\}$
29. $\left\{-\frac{7}{6}\right\}$ **31.** $x = \frac{18y - 4}{15}$ **33.** $y = \frac{-5x + 22}{2}$
35. $M = \frac{IC}{100}$ **37.** $R = \frac{ST}{S + T}$
39. $y = \frac{bx - x - 3b + a}{a - 3}$ **41.** $y = \frac{ab - bx}{a}$
43. $y = \frac{-2x - 9}{3}$

45. 50 millas por hora para Dave y 54 millas por hora para Kent

47. 60 minutos

49. 60 palabras por minuto para Connie y 40 palabras por minuto para Katie

51. El avión B viajaría a 400 millas por hora durante 5 horas y el avión A a 350 millas por hora durante 4 horas, o el avión B viajaría a 250 millas por hora durante 8 horas y el avión A a 200 millas por hora durante 7 horas.

53. 60 minutos para Nancy y 120 minutos para Amy

55. 3 horas

57. 16 millas por hora en el campo y 12 millas por hora de regreso, o 12 millas por hora en el campo y 8 millas por hora de regreso

Capítulo 4 Conjunto de problemas de repaso (página 221)

1. $\frac{2y}{3x^2}$ **2.** $\frac{a - 3}{a}$ **3.** $\frac{n - 5}{n - 1}$ **4.** $\frac{x^2 + 1}{x}$ **5.** $\frac{2x + 1}{3}$
6. $\frac{x^2 - 10}{2x^2 + 1}$ **7.** $\frac{3}{22}$ **8.** $\frac{18y + 20x}{48y - 9x}$ **9.** $\frac{3x + 2}{3x - 2}$
10. $\frac{x - 1}{2x - 1}$ **11.** $\frac{2x}{7y^2}$ **12.** $3b$ **13.** $\frac{n(n + 5)}{n - 1}$
14. $\frac{x(x - 3y)}{x^2 + 9y^2}$ **15.** $\frac{23x - 6}{20}$ **16.** $\frac{57 - 2n}{18n}$

17. $\frac{3x^2 - 2x - 14}{x(x + 7)}$ **18.** $\frac{2}{x - 5}$
19. $\frac{5n - 21}{(n - 9)(n + 4)(n - 1)}$ **20.** $\frac{6y - 23}{(2y + 3)(y - 6)}$
21. $6x - 1$ **22.** $3x^2 - 7x + 22 - \frac{90}{x + 4}$ **23.** $\left\{\frac{4}{13}\right\}$
24. $\left\{\frac{3}{16}\right\}$ **25.** $\varnothing$ **26.** $\{-17\}$ **27.** $\left\{\frac{2}{7}, \frac{7}{2}\right\}$ **28.** $\{22\}$
29. $\left\{-\frac{6}{7}, 3\right\}$ **30.** $\left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right\}$ **31.** $\left\{\frac{9}{7}\right\}$ **32.** $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$
33. $y = \frac{3x + 27}{4}$ **34.** $y = \frac{bx - ab}{a}$ **35.** \$525 y \$875
36. 20 minutos para Julio y 30 minutos para Dan
37. 50 millas por hora y 55 millas por hora u $8\frac{1}{3}$ millas por hora y $13\frac{1}{3}$ millas por hora **38.** 9 horas **39.** 80 horas
40. 13 millas por hora

Capítulo 4 Examen (página 223)

1. $\frac{13y^2}{24x}$ **2.** $\frac{3x - 1}{x(x - 6)}$ **3.** $\frac{2n - 3}{n + 4}$ **4.** $-\frac{2x}{x + 1}$ **5.** $\frac{3y^2}{8}$
6. $\frac{a - b}{4(2a + b)}$ **7.** $\frac{x + 4}{5x - 1}$ **8.** $\frac{13x + 7}{12}$ **9.** $\frac{3x}{2}$
10. $\frac{10n - 26}{15n}$ **11.** $\frac{3x^2 + 2x - 12}{x(x - 6)}$ **12.** $\frac{11 - 2x}{x(x - 1)}$
13. $\frac{13n + 46}{(2n + 5)(n - 2)(n + 7)}$ **14.** $3x^2 - 2x - 1$
15. $\frac{18 - 2x}{8 + 9x}$ **16.** $y = \frac{4x + 20}{3}$ **17.** $\{1\}$ **18.** $\left\{\frac{1}{10}\right\}$
19. $\{-35\}$ **20.** $\{-1, 5\}$ **21.** $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ **22.** $\left\{-\frac{9}{13}\right\}$ **23.** $\frac{27}{72}$
24. 1 hora **25.** 15 millas por hora

CAPÍTULO 5

Conjunto de problemas 5.1 (página 231)

1. $\frac{1}{27}$ **3.** $-\frac{1}{100}$ **5.** 81 **7.** -27 **9.** -8 **11.** 1 **13.** $\frac{9}{49}$
15. 16 **17.** $\frac{1}{1000}$ **19.** $\frac{1}{1000}$ **21.** 27 **23.** $\frac{1}{125}$ **25.** $\frac{9}{8}$
27. $\frac{256}{25}$ **29.** $\frac{2}{25}$ **31.** $\frac{81}{4}$ **33.** 81 **35.** $\frac{1}{10\,000}$ **37.** $\frac{13}{36}$
39. $\frac{1}{2}$ **41.** $\frac{72}{17}$ **43.** $\frac{1}{x^6}$ **45.** $\frac{1}{a^3}$ **47.** $\frac{1}{a^8}$ **49.** $\frac{y^6}{x^2}$
51. $\frac{c^8}{a^4b^{12}}$ **53.** $\frac{y^{12}}{8x^9}$ **55.** $\frac{x^3}{y^{12}}$ **57.** $\frac{4a^4}{9b^2}$ **59.** $\frac{1}{x^2}$ **61.** a^5b^2
63. $\frac{6y^3}{x}$ **65.** $7b^2$ **67.** $\frac{7x}{y^2}$ **69.** $-\frac{12b^3}{a}$ **71.** $\frac{x^5y^5}{5}$
73. $\frac{b^{20}}{81}$ **75.** $\frac{x + 1}{x^3}$ **77.** $\frac{y - x^3}{x^3y}$ **79.** $\frac{3b + 4a^2}{a^2b}$
81. $\frac{1 - x^2y}{xy^2}$ **83.** $\frac{2x - 3}{x^2}$

Conjunto de problemas 5.2 (página 242)

1. 8 **3.** -10 **5.** 3 **7.** -4 **9.** 3 **11.** $\frac{4}{5}$ **13.** $-\frac{6}{7}$
15. $\frac{1}{2}$ **17.** $\frac{3}{4}$ **19.** 8 **21.** $3\sqrt{3}$ **23.** $4\sqrt{2}$ **25.** $4\sqrt{5}$
27. $4\sqrt{10}$ **29.** $12\sqrt{2}$ **31.** $-12\sqrt{5}$ **33.** $2\sqrt{3}$
35. $3\sqrt{6}$ **37.** $-\frac{5}{3}\sqrt{7}$ **39.** $\frac{\sqrt{19}}{2}$ **41.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **43.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$
45. $\frac{\sqrt{14}}{7}$ **47.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **49.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$ **51.** $\frac{\sqrt{66}}{12}$ **53.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$
55. $\sqrt{5}$ **57.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ **59.** $-\frac{8\sqrt{15}}{5}$ **61.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **63.** $-\frac{12}{25}$
65. $2\sqrt[3]{2}$ **67.** $6\sqrt[3]{3}$ **69.** $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ **71.** $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ **73.** $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$
75. 42 millas por hora; 49 millas por hora; 65 millas por hora
77. 107 centímetros cuadrados **79.** 140 pulgadas cuadradas **85.** **(a)** 1.414 **(c)** 12.490 **(e)** 57.000 **(g)** 0.374 **(i)** 0.930

Conjunto de problemas 5.3 (página 248)

1. $13\sqrt{2}$ **3.** $54\sqrt{3}$ **5.** $-30\sqrt{2}$ **7.** $-\sqrt{5}$ **9.** $-21\sqrt{6}$
11. $-\frac{7\sqrt{7}}{12}$ **13.** $\frac{37\sqrt{10}}{10}$ **15.** $\frac{41\sqrt{2}}{20}$ **17.** $-9\sqrt[3]{3}$
19. $10\sqrt[3]{2}$ **21.** $4\sqrt{2x}$ **23.** $5x\sqrt{3}$ **25.** $2x\sqrt{5y}$
27. $8xy^3\sqrt{xy}$ **29.** $3a^2b\sqrt{6b}$ **31.** $3x^3y^4\sqrt{7}$
33. $4a\sqrt{10a}$ **35.** $\frac{8y}{3}\sqrt{6xy}$ **37.** $\frac{\sqrt{10xy}}{5y}$ **39.** $\frac{\sqrt{15}}{6x^2}$
41. $\frac{5\sqrt{2y}}{6y}$ **43.** $\frac{\sqrt{14xy}}{4y^3}$ **45.** $\frac{3y\sqrt{2xy}}{4x}$ **47.** $\frac{2\sqrt{42ab}}{7b^2}$
49. $2\sqrt[3]{3y}$ **51.** $2x\sqrt[3]{2x}$ **53.** $2x^2y^2\sqrt[3]{7y^2}$ **55.** $\frac{\sqrt[3]{21x}}{3x}$
57. $\frac{\sqrt[3]{12x^2y}}{4x^2}$ **59.** $\frac{\sqrt[3]{4x^2y^2}}{xy^2}$ **61.** $2\sqrt{2x + 3y}$
63. $4\sqrt{x + 3y}$ **65.** $33\sqrt{x}$ **67.** $-30\sqrt{2x}$ **69.** $7\sqrt{3n}$
71. $-40\sqrt{ab}$ **73.** $-7x\sqrt{2x}$ **79.** **(a)** $5|x|\sqrt{5}$ **(b)** $4x^2$ **(c)** $2b\sqrt{2b}$ **(d)** $y^2\sqrt{3y}$ **(e)** $12|x^3|\sqrt{2}$ **(f)** $2m^4\sqrt{7}$

(g) $8|c^5|\sqrt{2}$ **(h)** $3d^3\sqrt{2d}$ **(i)** $7|x|$ **(j)** $4n^{10}\sqrt{5}$
(k) $9h\sqrt{h}$

Conjunto de problemas 5.4 (página 254)

1. $6\sqrt{2}$ **3.** $18\sqrt{2}$ **5.** $-24\sqrt{10}$ **7.** $24\sqrt{6}$ **9.** 120
11. 24 **13.** $56\sqrt[3]{3}$ **15.** $\sqrt{6}+\sqrt{10}$
17. $6\sqrt{10}-3\sqrt{35}$ **19.** $24\sqrt{3}-60\sqrt{2}$
21. $-40-32\sqrt{15}$ **23.** $15\sqrt{2x}+3\sqrt{xy}$
25. $5xy-6x\sqrt{y}$ **27.** $2\sqrt{10xy}+2y\sqrt{15y}$
29. $-25\sqrt{6}$ **31.** $-25-3\sqrt{3}$ **33.** $23-9\sqrt{5}$
35. $6\sqrt{35}+3\sqrt{10}-4\sqrt{21}-2\sqrt{6}$
37. $8\sqrt{3}-36\sqrt{2}+6\sqrt{10}-18\sqrt{15}$
39. $11+13\sqrt{30}$ **41.** $141-51\sqrt{6}$ **43.** -10 **45.** -8
47. $2x-3y$ **49.** $10\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{18}$ **51.** $12-36\sqrt[3]{2}$
53. $\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$ **55.** $\dfrac{-3\sqrt{2}-15}{23}$ **57.** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$
59. $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7}$ **61.** $\dfrac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{2}$ **63.** $\dfrac{6\sqrt{7}+4\sqrt{6}}{13}$
65. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **67.** $\dfrac{2\sqrt{x}-8}{x-16}$ **69.** $\dfrac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$
71. $\dfrac{x-8\sqrt{x}+12}{x-36}$ **73.** $\dfrac{x-2\sqrt{xy}}{x-4y}$ **75.** $\dfrac{6\sqrt{xy}+9y}{4x-9y}$

Conjunto de problemas 5.5 (página 260)

1. $\{20\}$ **3.** $\varnothing$ **5.** $\left\{\dfrac{25}{4}\right\}$ **7.** $\left\{\dfrac{4}{9}\right\}$ **9.** $\{5\}$ **11.** $\left\{\dfrac{39}{4}\right\}$
13. $\left\{\dfrac{10}{3}\right\}$ **15.** $\{-1\}$ **17.** $\varnothing$ **19.** $\{1\}$ **21.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ **23.** $\{3\}$
25. $\left\{\dfrac{61}{25}\right\}$ **27.** $\{-3, 3\}$ **29.** $\{-9, -4\}$ **31.** $\{0\}$ **33.** $\{3\}$
35. $\{4\}$ **37.** $\{-4, -3\}$ **39.** $\{12\}$ **41.** $\{25\}$ **43.** $\{29\}$
45. $\{-15\}$ **47.** $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ **49.** $\{-3\}$ **51.** $\{0\}$ **53.** $\{5\}$
55. $\{2, 6\}$ **57.** 56 pies; 106 pies; 148 pies
59. 3.2 pies; 5.1 pies; 7.3 pies

Conjunto de problemas 5.6 (página 266)

1. 9 **3.** 3 **5.** -2 **7.** -5 **9.** $\dfrac{1}{6}$ **11.** 3 **13.** 8 **15.** 81
17. -1 **19.** -32 **21.** $\dfrac{81}{16}$ **23.** 4 **25.** $\dfrac{1}{128}$ **27.** -125
29. 625 **31.** $\sqrt[3]{x^4}$ **33.** $3\sqrt{x}$ **35.** $\sqrt[3]{2y}$ **37.** $\sqrt{2x-3y}$
39. $\sqrt[3]{(2a-3b)^2}$ **41.** $\sqrt[3]{x^2y}$ **43.** $-3\sqrt[5]{xy^2}$ **45.** $5^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$
47. $3y^{\frac{1}{2}}$ **49.** $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ **51.** $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$ **53.** $(2x-y)^{\frac{3}{5}}$ **55.** $5xy^{\frac{1}{2}}$
57. $-(x+y)^{\frac{1}{3}}$ **59.** $12x^{\frac{13}{20}}$ **61.** $y^{\frac{5}{12}}$ **63.** $\dfrac{4}{x^{\frac{1}{10}}}$ **65.** $16xy^2$
67. $2x^2y$ **69.** $4x^{\frac{4}{15}}$ **71.** $\dfrac{4}{b^{\frac{5}{12}}}$ **73.** $\dfrac{36x^{\frac{4}{5}}}{49y^{\frac{4}{3}}}$ **75.** $\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{x}$ **77.** $4x^{\frac{1}{6}}$

79. $\dfrac{16}{a^{\frac{11}{10}}}$ **81.** $\sqrt[6]{243}$ **83.** $\sqrt[4]{216}$ **85.** $\sqrt[12]{3}$ **87.** $\sqrt{2}$
89. $\sqrt[4]{3}$ **93.** **(a)** 12 **(c)** 7 **(e)** 11 **95.** **(a)** 1024
(c) 512 **(e)** 49

Conjunto de problemas 5.7 (página 271)

1. $(8.9)(10)^1$ **3.** $(4.29)(10)^3$ **5.** $(6.12)(10)^6$ **7.** $(4)(10)^7$
9. $(3.764)(10)^2$ **11.** $(3.47)(10)^{-1}$ **13.** $(2.14)(10)^{-2}$
15. $(5)(10)^{-5}$ **17.** $(1.94)(10)^{-9}$ **19.** 23 **21.** 4190
23. 500 000 000 **25.** 31 400 000 000 **27.** 0.43
29. 0.000914 **31.** 0.00000005123 **33.** 0.000000074
35. 0.77 **37.** 300 000 000 000 **39.** 0.000000004
41. 1000 **43.** 1000 **45.** 3000 **47.** 20 **49.** 27 000 000
51. $(6.02)(10^{23})$ **53.** 831 **55.** $(2.07)(10^4)$ dólares
57. $(1.99)(10^{-26})$ kg **59.** 1833 **63.** **(a)** 7000 **(c)** 120
(e) 30 **65.** **(a)** $(4.385)(10)^{14}$ **(c)** $(2.322)(10)^{17}$
(e) $(3.052)(10)^{12}$

Capítulo 5 Conjunto de problemas de repaso (página 275)

1. $\dfrac{1}{64}$ **2.** $\dfrac{9}{4}$ **3.** 3 **4.** -2 **5.** $\dfrac{2}{3}$ **6.** 32 **7.** 1 **8.** $\dfrac{4}{9}$
9. -64 **10.** 32 **11.** 1 **12.** 27 **13.** $3\sqrt{6}$
14. $4x\sqrt{3xy}$ **15.** $2\sqrt{2}$ **16.** $\dfrac{\sqrt{15x}}{6x^2}$ **17.** $2\sqrt[3]{7}$
18. $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3}$ **19.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ **20.** $\dfrac{x\sqrt{21x}}{7}$ **21.** $3xy^2\sqrt[3]{4xy^2}$
22. $\dfrac{15\sqrt{6}}{4}$ **23.** $2y\sqrt{5xy}$ **24.** $2\sqrt{x}$ **25.** $24\sqrt{10}$
26. 60 **27.** $24\sqrt{3}-6\sqrt{14}$ **28.** $x-2\sqrt{x}-15$
29. 17 **30.** $12-8\sqrt{3}$ **31.** $6a-5\sqrt{ab}-4b$ **32.** 70
33. $\dfrac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$ **34.** $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{15}}{3}$ **35.** $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{11}$
36. $\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{7}$ **37.** $\dfrac{x^6}{y^8}$ **38.** $\dfrac{27a^3b^{12}}{8}$ **39.** $20x^{\frac{7}{10}}$
40. $7a^{\frac{5}{12}}$ **41.** $\dfrac{y^{\frac{4}{3}}}{x}$ **42.** $\dfrac{x^{12}}{9}$ **43.** $\sqrt{5}$ **44.** $5\sqrt[3]{3}$
45. $\dfrac{29\sqrt{6}}{5}$ **46.** $-15\sqrt{3x}$ **47.** $\dfrac{y+x^2}{x^2y}$ **48.** $\dfrac{b-2a}{a^2b}$
49. $\left\{\dfrac{19}{7}\right\}$ **50.** $\{4\}$ **51.** $\{8\}$ **52.** $\varnothing$ **53.** $\{14\}$
54. $\{-10, 1\}$ **55.** $\{2\}$ **56.** $\{8\}$ **57.** 0.000000006

58. 36 000 000 000 **59.** 6 **60.** 0.15 **61.** 0.000028
62. 0.002 **63.** 0.002 **64.** 8 000 000 000

Capítulo 5 Examen (página 277)

1. $\frac{1}{32}$ **2.** -32 **3.** $\frac{81}{16}$ **4.** $\frac{1}{4}$ **5.** $3\sqrt{7}$ **6.** $3\sqrt[3]{4}$
7. $2x^2y\sqrt{13y}$ **8.** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ **9.** $\frac{\sqrt{42x}}{12x^2}$ **10.** $72\sqrt{2}$
11. $-5\sqrt{6}$ **12.** $-38\sqrt{2}$ **13.** $\frac{3\sqrt{6}+3}{10}$ **14.** $\frac{9x^2y^2}{4}$
15. $-\frac{12}{a^{\frac{3}{10}}}$ **16.** $\frac{y^3+x}{xy^3}$ **17.** $-12x^{\frac{1}{4}}$ **18.** 33 **19.** 600
20. 0.003 **21.** $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ **22.** {2} **23.** {4} **24.** {5}
25. {4, 6}

CAPÍTULO 6

Conjunto de problemas 6.1 (página 285)

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero **9.** $10+8i$
11. $-6+10i$ **13.** $-2-5i$ **15.** $-12+5i$ **17.** $-1-23i$
19. $-4-5i$ **21.** $1+3i$ **23.** $\frac{5}{3}-\frac{5}{12}i$ **25.** $-\frac{17}{9}+\frac{23}{30}i$
27. $9i$ **29.** $i\sqrt{14}$ **31.** $\frac{4}{5}i$ **33.** $3i\sqrt{2}$ **35.** $5i\sqrt{3}$
37. $6i\sqrt{7}$ **39.** $-8i\sqrt{5}$ **41.** $36i\sqrt{10}$ **43.** -8
45. $-\sqrt{15}$ **47.** $-3\sqrt{6}$ **49.** $-5\sqrt{3}$ **51.** $-3\sqrt{6}$
53. $4i\sqrt{3}$ **55.** $\frac{5}{2}$ **57.** $2\sqrt{2}$ **59.** $2i$ **61.** $-20+0i$
63. $42+0i$ **65.** $15+6i$ **67.** $-42+12i$ **69.** $7+22i$
71. $40-20i$ **73.** $-3-28i$ **75.** $-3-15i$
77. $-9+40i$ **79.** $-12+16i$ **81.** $85+0i$
83. $5+0i$ **85.** $\frac{3}{5}+\frac{3}{10}i$ **87.** $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$ **89.** $2+\frac{2}{3}i$
91. $0-\frac{2}{7}i$ **93.** $\frac{22}{25}-\frac{4}{25}i$ **95.** $-\frac{18}{41}+\frac{39}{41}i$ **97.** $\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i$
99. $\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i$ **101. (a)** $-2-i\sqrt{3}$ **(c)** $\frac{-1-3i\sqrt{2}}{2}$
(e) $\frac{10+3i\sqrt{5}}{4}$

Conjunto de problemas 6.2 (página 293)

1. {0, 9} **3.** {−3, 0} **5.** {−4, 0} **7.** $\left\{0, \frac{9}{5}\right\}$ **9.** {−6, 5}
11. {7, 12} **13.** $\left\{-8, -\frac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{2}{5}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{3}{5}\right\}$
19. $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right\}$ **21.** {1, 4} **23.** {8} **25.** {12} **27.** $\{0, 5k\}$
29. $\{0, 16k^2\}$ **31.** $\{5k, 7k\}$ **33.** $\left\{\frac{k}{2}, -3k\right\}$ **35.** {±1}
37. $\{\pm 6i\}$ **39.** $\{\pm\sqrt{14}\}$ **41.** $\{\pm 2\sqrt{7}\}$ **43.** $\{\pm 3\sqrt{2}\}$
45. $\left\{\pm\frac{\sqrt{14}}{2}\right\}$ **47.** $\left\{\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ **49.** $\left\{\pm\frac{2i\sqrt{30}}{5}\right\}$
51. $\left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ **53.** {−1, 5} **55.** {−8, 2} **57.** $\{-6\pm 2i\}$
59. {1, 2} **61.** $\{4\pm\sqrt{5}\}$ **63.** $\{-5\pm 2\sqrt{3}\}$
65. $\left\{\frac{2\pm 3i\sqrt{3}}{3}\right\}$ **67.** {−12, −2} **69.** $\left\{\frac{2\pm\sqrt{10}}{5}\right\}$
71. $2\sqrt{13}$ centímetros **73.** $4\sqrt{5}$ pulgadas **75.** 8 yardas
77. $6\sqrt{2}$ pulgadas **79.** $a=b=4\sqrt{2}$ metros
81. $b=3\sqrt{3}$ pulgadas y $c=6$ pulgadas
83. $a=7$ centímetros y $b=7\sqrt{3}$ centímetros
85. $a=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ pies y $c=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ pies **87.** 17.9 pies
89. 38 metros **91.** 53 metros **95.** 10.8 centímetros
97. $h=s\sqrt{2}$

Conjunto de problemas 6.3 (página 299)

1. {−6, 10} **3.** {4, 10} **5.** {−5, 10} **7.** {−8, 1}
9. $\left\{-\frac{5}{2}, 3\right\}$ **11.** $\left\{-3, \frac{2}{3}\right\}$ **13.** {−16, 10}
15. $\{-2\pm\sqrt{6}\}$ **17.** $\{-3\pm 2\sqrt{3}\}$ **19.** $\{5\pm\sqrt{26}\}$
21. $\{4\pm i\}$ **23.** $\{-6\pm 3\sqrt{3}\}$ **25.** $\{-1\pm i\sqrt{5}\}$
27. $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$ **31.** $\left\{\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}\right\}$
33. $\left\{\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{3\pm i\sqrt{6}}{3}\right\}$ **37.** $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}\right\}$
39. {−12, 4} **41.** $\left\{\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}\right\}$ **43.** $\left\{-\frac{9}{2}, \frac{1}{3}\right\}$
45. {−3, 8} **47.** $\{3\pm 2\sqrt{3}\}$ **49.** $\left\{\frac{3\pm i\sqrt{3}}{3}\right\}$
51. {−20, 12} **53.** $\left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$ **55.** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$
57. $\{-6\pm 2\sqrt{10}\}$ **59.** $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$
61. $\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$ **65.** $x=\frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b}$
67. $r=\frac{\sqrt{A\pi}}{\pi}$ **69.** $\{2a, 3a\}$ **71.** $\left\{\frac{a}{2}, -\frac{2a}{3}\right\}$
73. $\left\{\frac{2b}{3}\right\}$

Conjunto de problemas 6.4 (página 307)

1. Dos soluciones reales; $\{-7, 3\}$ **3.** Una solución real; $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

5. Dos soluciones complejas; $\left\{\frac{7 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$

7. Dos soluciones reales; $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{1}{5}\right\}$

9. Dos soluciones reales; $\left\{\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}\right\}$ **11.** $\{-1 \pm \sqrt{2}\}$

13. $\left\{\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$ **15.** $\{4 \pm 2\sqrt{5}\}$ **17.** $\left\{\frac{-5 \pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$

19. $\{8, 10\}$ **21.** $\left\{\frac{9 \pm \sqrt{61}}{2}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$

25. $\left\{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}\right\}$ **27.** $\left\{\frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}\right\}$ **29.** $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$

31. $\left\{-5, -\frac{4}{3}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{5}{6}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}\right\}$

37. $\left\{0, \frac{13}{5}\right\}$ **39.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$ **41.** $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{73}}{12}\right\}$

43. $\{-18, -14\}$ **45.** $\left\{\frac{11}{4}, \frac{10}{3}\right\}$ **47.** $\left\{\frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2}\right\}$

49. $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}\right\}$ **55.** $\{-1.381, 17.381\}$

57. $\{-13.426, 3.426\}$ **59.** $\{-0.347, -8.653\}$

61. $\{0.119, 1.681\}$ **63.** $\{-0.708, 4.708\}$

65. $k = 4$ o $k = -4$

Conjunto de problemas 6.5 (página 317)

1. $\{2 \pm \sqrt{10}\}$ **3.** $\left\{-9, \frac{4}{3}\right\}$ **5.** $\{9 \pm 3\sqrt{10}\}$

7. $\left\{\frac{3 \pm i\sqrt{23}}{4}\right\}$ **9.** $\{-15, -9\}$ **11.** $\{-8, 1\}$

13. $\left\{\frac{2 \pm i\sqrt{10}}{2}\right\}$ **15.** $\{9 \pm \sqrt{66}\}$ **17.** $\left\{-\frac{5}{4}, \frac{2}{5}\right\}$

19. $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{3}{4}, 4\right\}$ **23.** $\left\{\frac{11 \pm \sqrt{109}}{2}\right\}$

25. $\left\{\frac{3}{7}, 4\right\}$ **27.** $\left\{\frac{7 \pm \sqrt{129}}{10}\right\}$ **29.** $\left\{-\frac{10}{7}, 3\right\}$

31. $\{1 \pm \sqrt{34}\}$ **33.** $\{\pm\sqrt{6}, \pm 2\sqrt{3}\}$

35. $\left\{\pm 3, \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$ **37.** $\left\{\pm\frac{i\sqrt{15}}{3}, \pm 2i\right\}$

39. $\left\{\pm\frac{\sqrt{14}}{2}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$ **41.** 8 y 9 **43.** 9 y 12

45. $5 + \sqrt{3}$ y $5 - \sqrt{3}$ **47.** 3 y 6

49. 9 pulgadas y 12 pulgadas **51.** 1 metro **53.** 8 pulgadas por 14 pulgadas **5.** 20 millas por hora para Lorraine y 25 millas por hora para Charlotte, o 45 millas por hora para Lorraine y 50 millas por hora para Charlotte **57.** 55 millas por hora **59.** 6 horas para Tom y 8 horas para Terry **61.** 2 horas **63.** 8 estudiantes **65** 40 acciones a $20 por acción **67.** 50 números **69.** 9%

75. $\{9, 36\}$

77. $\{1\}$ **79.** $\left\{-\frac{8}{27}, \frac{27}{8}\right\}$ **81.** $\left\{-4, \frac{3}{5}\right\}$ **83.** $\{4\}$

85. $\{\pm 4\sqrt{2}\}$ **87.** $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ **89.** $\{-1, 3\}$

Conjunto de problemas 6.6 (página 325)

1. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

-2 1

3. $(-4, -1)$

-4 -1

5. $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

$-\frac{7}{3}$ $\frac{1}{2}$

7. $\left[-2, \frac{3}{4}\right]$

-2 $\frac{3}{4}$

9. $(-1, 1) \cup (3, \infty)$

-1 1 3

11. $(-\infty, -2] \cup [0, 4]$

-2 0 4

13. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

-1 2

15. $(-2, 3)$

-2 3

17. $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

0 $\frac{1}{2}$

19. $(-\infty, 1) \cup [2, \infty)$

1 2

21. $(-7, 5)$ **23.** $(-\infty, 4) \cup (7, \infty)$ **25.** $\left[-5, \frac{2}{3}\right]$

27. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ **29.** $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup (8, \infty)$

31. $(-\infty, \infty)$ **33.** $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ **35.** $(-1, 3) \cup (3, \infty)$

37. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **39.** $(-6, 6)$ **41.** $(-\infty, \infty)$

43. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ **45.** $(-4, 0) \cup (0, \infty)$ **47.** $(-6, -3)$

49. $(-\infty, 5) \cup [9, \infty)$ **51.** $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (3, \infty)$

53. $(-4, 6]$ **55.** $(-\infty, 2)$

Capítulo 6 Conjunto de problemas de repaso (página 328)

1. $2 - 2i$ **2.** $-3 - i$ **3.** $30 + 15i$ **4.** $86 - 2i$

5. $-32 + 4i$ **6.** $25 + 0i$ **7.** $\frac{9}{20} + \frac{13}{20}i$ **8.** $-\frac{3}{29} + \frac{7}{29}i$

9. Una solución real con una multiplicidad de 2.

10. Dos soluciones complejas no reales

11. Dos soluciones reales distintas

12. Dos soluciones reales distintas **13.** $\{0, 17\}$

14. $\{-4, 8\}$

15. $\left\{\frac{1 \pm 8i}{2}\right\}$ **16.** $\{-3, 7\}$ **17.** $\{-1 \pm \sqrt{10}\}$

18. $\{3 \pm 5i\}$ **19.** $\{25\}$ **20.** $\left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$ **21.** $\{-10, 20\}$

22. $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}\right\}$

24. $\left\{\frac{5 \pm i\sqrt{23}}{4}\right\}$ **25.** $\left\{\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}\right\}$ **26.** $\{-9, 4\}$

27. $\{-2 \pm i\sqrt{5}\}$ **28.** $\{-6, 12\}$ **29.** $\{1 \pm \sqrt{10}\}$

30. $\left\{\pm\frac{\sqrt{14}}{2}, \pm 2\sqrt{2}\right\}$ **31.** $\left\{\frac{-3 \pm \sqrt{97}}{2}\right\}$

32. $(-\infty, -5) \cup (2, \infty)$ **33.** $\left[-\frac{7}{2}, 3\right]$

34. $(-\infty, -6) \cup [4, \infty)$ **35.** $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$

36. $3 + \sqrt{7}$ y $3 - \sqrt{7}$ **37.** 20 acciones a \$15 por acción **38.** 45 millas por hora y 52 millas por hora **39.** 8 unidades **40.** 8 y 10 **41.** 7 pulgadas por 12 pulgadas **42.** 4 horas para Reena y 6 horas para Billy **43.** 10 metros

Capítulo 6 Examen (página 330)

1. $39 - 2i$ **2.** $-\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$ **3.** $\{0, 7\}$ **4.** $\{-1, 7\}$

5. $\{-6, 3\}$ **6.** $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ **7.** $\left\{\frac{1 - 2i}{5}, \frac{1 + 2i}{5}\right\}$

8. $\{-16, -14\}$ **9.** $\left\{\frac{1 - 6i}{3}, \frac{1 + 6i}{3}\right\}$ **10.** $\left\{-\frac{7}{4}, \frac{6}{5}\right\}$

11. $\left\{-3, \frac{19}{6}\right\}$ **12.** $\left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$ **13.** $\{-2, 2, -4i, 4i\}$

14. $\left\{-\frac{3}{4}, 1\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1 - \sqrt{10}}{3}, \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right\}$

16. Dos soluciones reales iguales

17. Dos soluciones complejas no reales

18. $[-6, 9]$ **19.** $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

20. $[-10, -6)$ **21.** 20.8 pies **22.** 29 metros

23. 150 acciones **24.** $6\frac{1}{2}$ pulgadas **25.** $3 + \sqrt{5}$

Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 331)

1. $\frac{64}{15}$ **2.** $\frac{11}{3}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **4.** $-\frac{44}{5}$ **5.** -7 **6.** $-24a^4b^5$

7. $2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$ **8.** $\frac{3x^2y^2}{8}$ **9.** $\frac{a(a + 1)}{2a - 1}$

10. $\frac{-x + 14}{18}$ **11.** $\frac{5x + 19}{x(x + 3)}$ **12.** $\frac{2}{n + 8}$

13. $\frac{x - 14}{(5x - 2)(x + 1)(x - 4)}$ **14.** $y^2 - 5y + 6$

15. $x^2 - 3x - 2$ **16.** $20 + 7\sqrt{10}$

17. $2x - 2\sqrt{xy} - 12y$ **18.** $-\frac{3}{8}$ **19.** $-\frac{2}{3}$ **20.** 0.2

21. $\frac{1}{2}$ **22.** $\frac{13}{9}$ **23.** -27 **24.** $\frac{16}{9}$ **25.** $\frac{8}{27}$

26. $3x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ **27.** $(6x - 5)(x + 4)$

28. $(4 + 7x)(3 - 2x)$ **29.** $(3x + 2)(3x - 2)(x^2 + 8)$

30. $(2x - y)(a - b)$ **31.** $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$

32. $\left\{-\frac{12}{7}\right\}$ **33.** $\{150\}$ **34.** $\{25\}$ **35.** $\{0\}$ **36.** $\{-2, 2\}$

37. $\{-7\}$ **38.** $\left\{-6, \frac{4}{3}\right\}$ **39.** $\left\{\frac{5}{4}\right\}$ **40.** $\{3\}$ **41.** $\left\{\frac{4}{5}, 1\right\}$

42. $\left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$ **43.** $\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\}$ **44.** $\left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$ **45.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$

46. $\left\{\frac{5}{7}\right\}$ **47.** $\{-2, 2\}$ **48.** $\{0\}$ **49.** $\{-6, 19\}$

50. $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right\}$ **51.** $\{1 \pm 5i\}$ **52.** $\{1, 3\}$ **53.** $\left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$

54. $\{-2 \pm 4i\}$ **55.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$ **56.** $(-\infty, -2]$

57. $\left(-\infty, \frac{19}{5}\right)$ **58.** $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ **59.** $(-2, 3)$

60. $\left(-\infty, -\frac{13}{3}\right) \cup (3, \infty)$ **61.** $(-\infty, 29]$ **62.** $[-2, 4]$

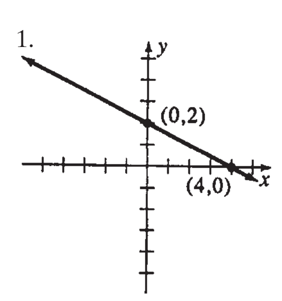
63. $(-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ **64.** $(-\infty, -2] \cup (7, \infty)$

65. $(-3, 4)$ **66.** 6 litros **67.** \$900 y \$1350 **68.** 12 pulgadas por 17 pulgadas **69.** 5 horas **70.** 7 bolas de golf **71.** 12 minutos **72.** 7% **73.** 15 sillas por fila **74.** 140 acciones

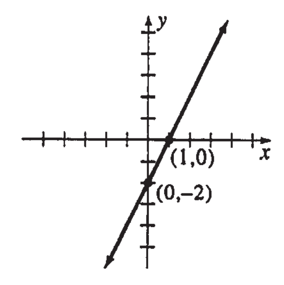
CAPÍTULO 7

Conjunto de problemas 7.1 (página 346)

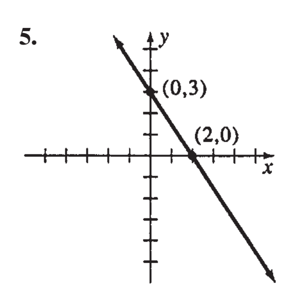
1.



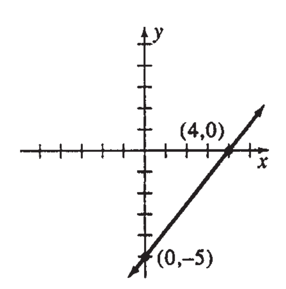
3.



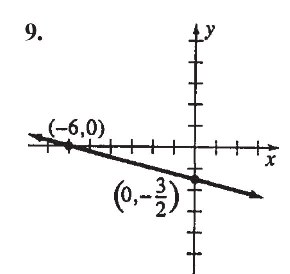
5.



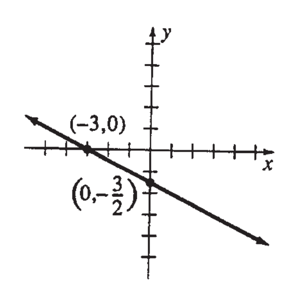
7.



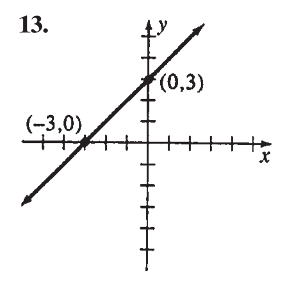
9.



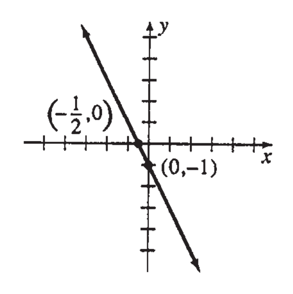
11.



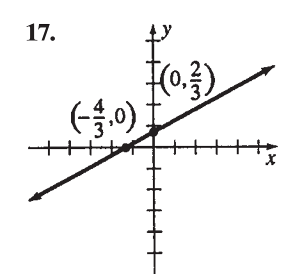
13.



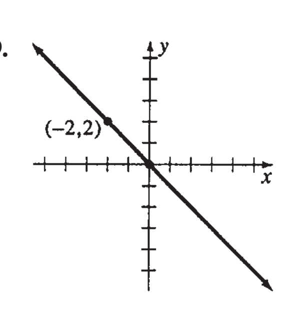
15.



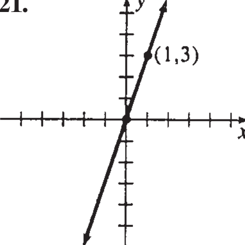
17.



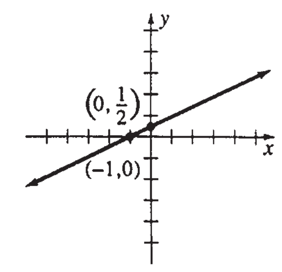
19.



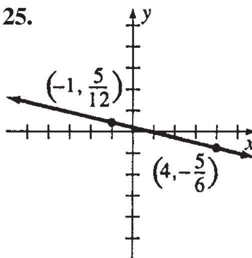
21.



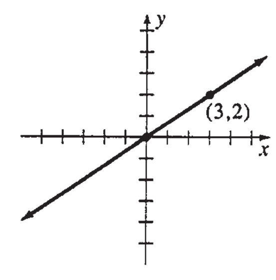
23.



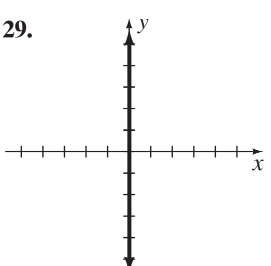
25.



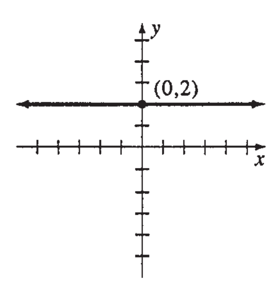
27.



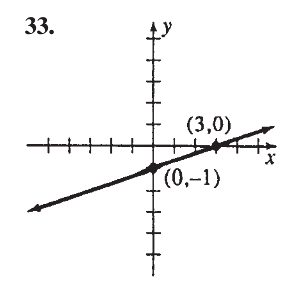
29.



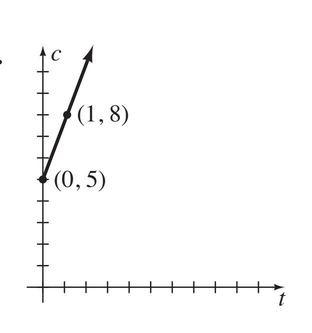
31.



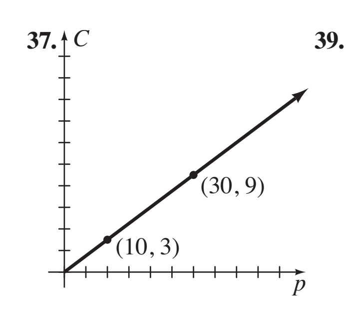
33.



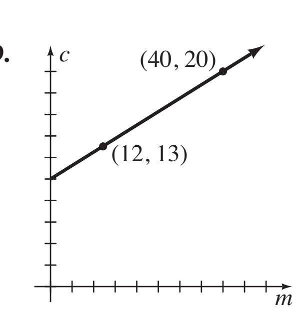
35.



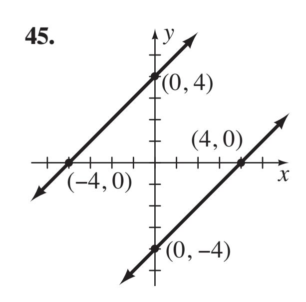
37.



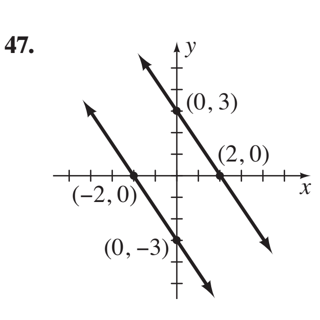
39.



45.



47.



Conjunto de problemas 7.2 (página 356)

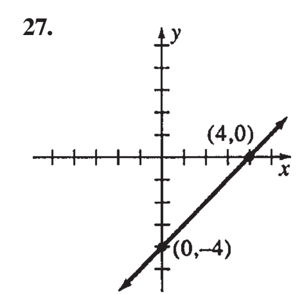
1. $(-3, -1)$; $(3, 1)$; $(3, -1)$ **3.** $(7, 2)$; $(-7, -2)$; $(-7, 2)$

5. $(5, 0)$; $(-5, 0)$; $(-5, 0)$ **7.** eje x **9.** eje y

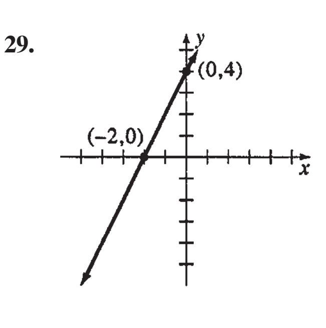
11. eje x, eje y y origen **13.** eje x **15.** Ninguna

17. Origen **19.** eje y **21.** Los tres **23.** eje x
25. eje y

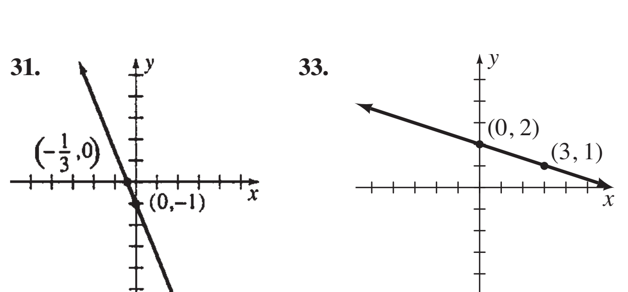
27.



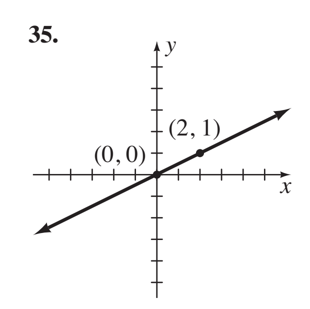
29.



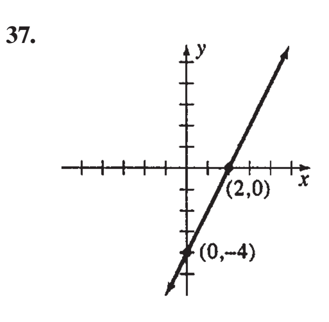
31. **33.**



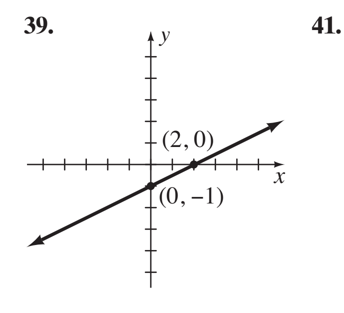
35.



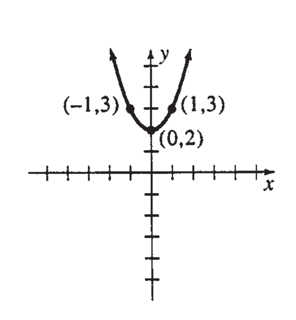
37.



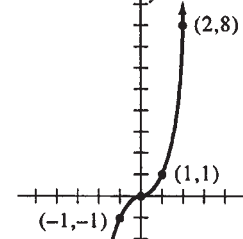
39.



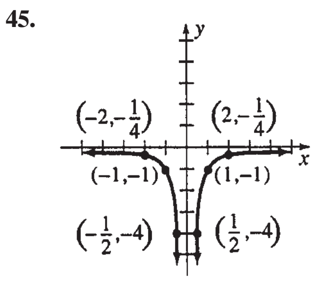
41.



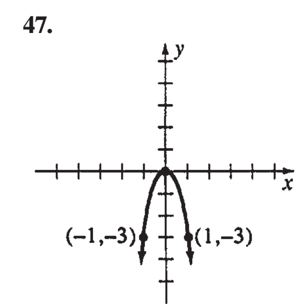
43.



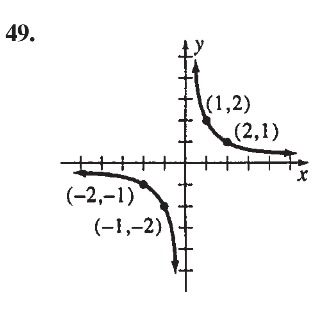
45.



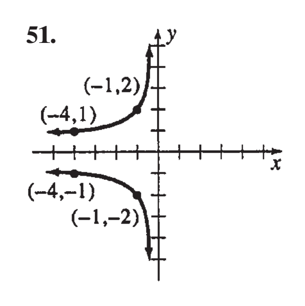
47.



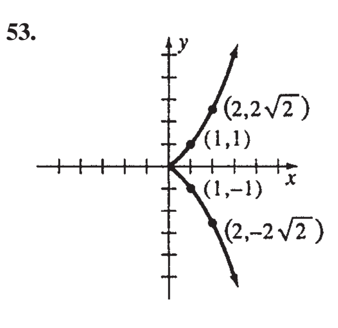
49.



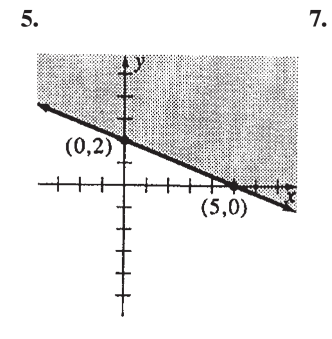
51.



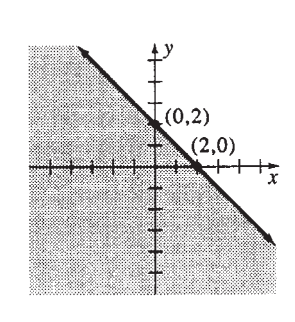
53.



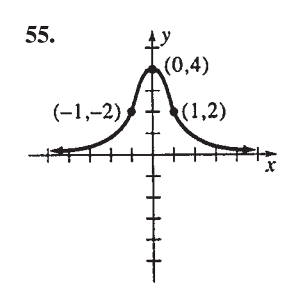
5.



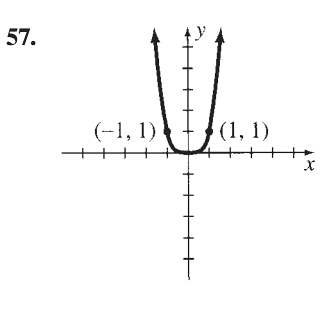
7.



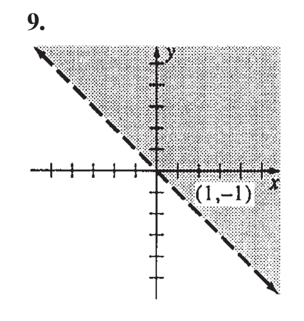
55.



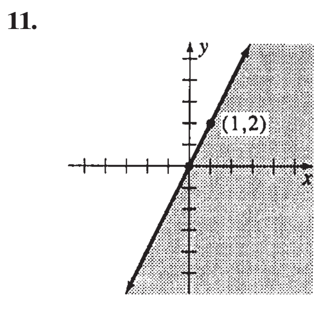
57.



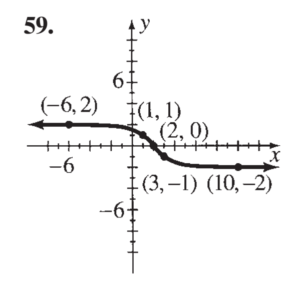
9.



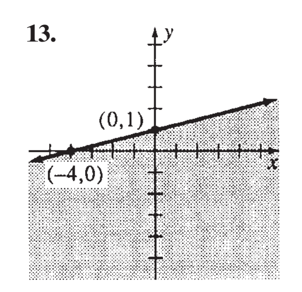
11.



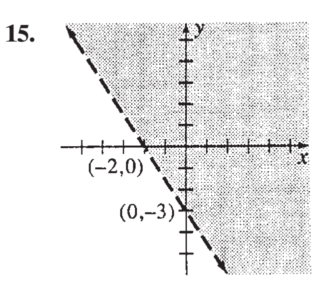
59.



13.

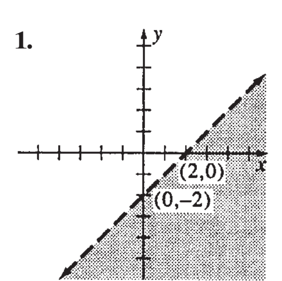


15.

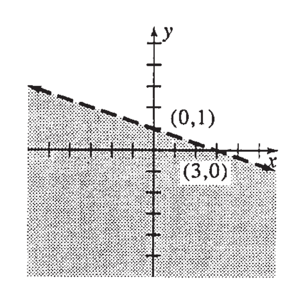


Conjunto de problemas 7.3 (página 361)

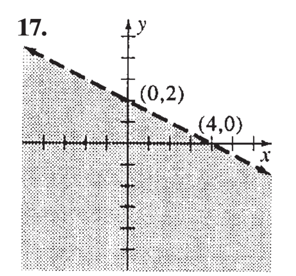
1.



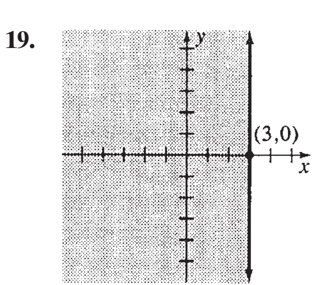
3.



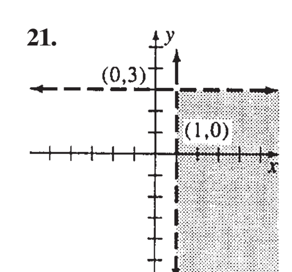
17.



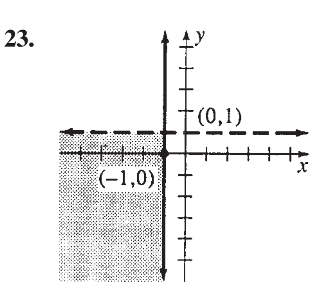
19.



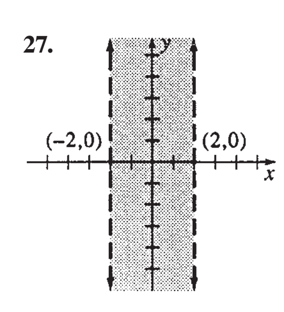
21.



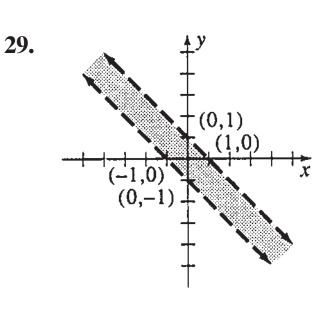
23.



27.



29.



Conjunto de problemas 7.4 (página 371)

1. 15 **3.** $\sqrt{13}$ **5.** $3\sqrt{2}$ **7.** $3\sqrt{5}$ **9.** 6 **11.** $3\sqrt{10}$

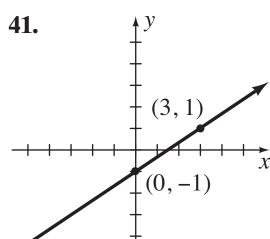
13. Las longitudes de los lados son 10, $5\sqrt{5}$ y 5. Puesto que $10^2 + 5^2 = (5\sqrt{5})^2$, es un triángulo rectángulo

15. Las distancias entre (3, 6) y (7, 12), entre (7, 12) y (11, 18), y entre (11, 18) y (15, 24) tienen todas $\sqrt{13}$ unidades

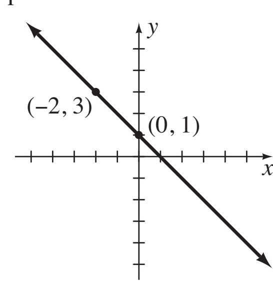
17. $\frac{4}{3}$ **19.** $-\frac{7}{3}$ **21.** -2 **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** 0 **27.** $\frac{1}{2}$

29. 7 **31.** -2 **33–39.** Las respuestas variarán.

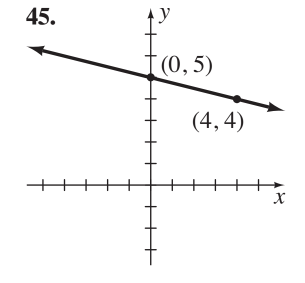
41.



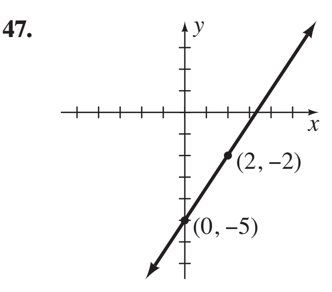
43.



45.



47.



49. $-\frac{2}{3}$ **51.** $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{4}{7}$ **55.** 0 **57.** -5 **59.** 105.6 pies

61. 8.1% **63.** 19 centímetros **69.** **(a)** (3, 5) **(c)** (2, 5)

(e) $\left(\frac{17}{8}, -7\right)$

Conjunto de problemas 7.5 (página 383)

1. $x - 2y = -7$ **3.** $3x - y = -10$ **5.** $3x + 4y = -15$

7. $5x - 4y = 28$ **9.** $x - y = 1$ **11.** $5x - 2y = -4$

13. $x + 7y = 11$ **15.** $x + 2y = -9$ **17.** $7x - 5y = 0$

19. $y = \frac{3}{7}x + 4$ **21.** $y = 2x - 3$ **23.** $y = -\frac{2}{5}x + 1$

25. $y = 0(x) - 4$ **27.** $2x - y = 4$ **29.** $5x + 8y = -15$

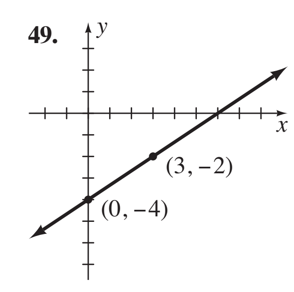
31. $x + 0(y) = 2$ **33.** $0(x) + y = 6$ **35.** $x + 5y = 16$

37. $4x - 7y = 0$ **39.** $x + 2y = 5$ **41.** $3x + 2y = 0$

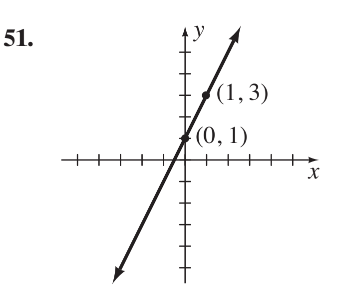
43. $m = -3$ y $b = 7$ **45.** $m = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{9}{2}$

47. $m = \frac{1}{5}$ y $b = -\frac{12}{5}$

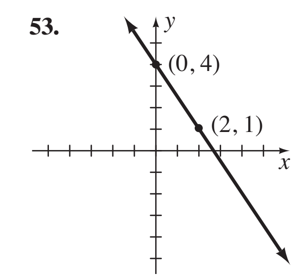
49.



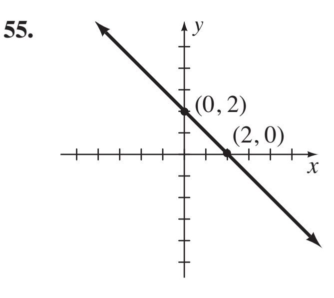
51.



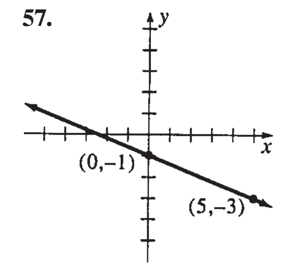
53.



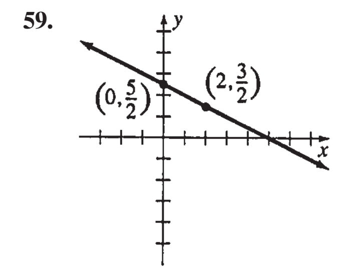
55.



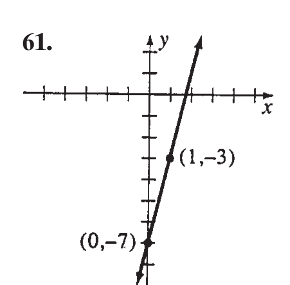
57.



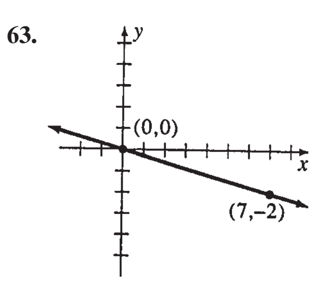
59.



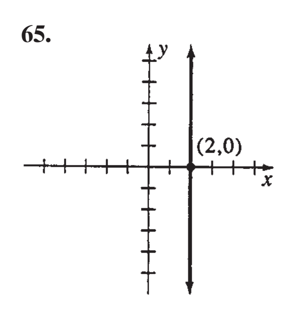
61.



63.



65.



67. $y = \frac{1}{1000}x + 2$ **69.** $y = \frac{9}{5}x + 32$

77. **(a)** $2x - y = 1$ **(b)** $5x - 6y = 29$ **(c)** $x + y = 2$
(d) $3x - 2y = 18$

Capítulo 7 Conjunto de problemas de repaso (página 388)

1. **(a)** $\frac{6}{5}$ **(b)** $-\frac{2}{3}$ **2.** 5 **3.** −1

4. **(a)** $m = -4$ **(b)** $m = \frac{2}{7}$ **5.** 5, 10 y $\sqrt{97}$

6. **(a)** $2\sqrt{10}$ **(b)** $\sqrt{58}$ **8.** $7x + 4y = 1$

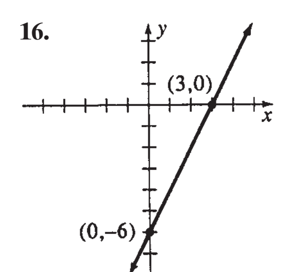
9. $3x + 7y = 28$ **10.** $2x - 3y = 16$

11. $x - 2y = -8$ **12.** $2x - 3y = 14$

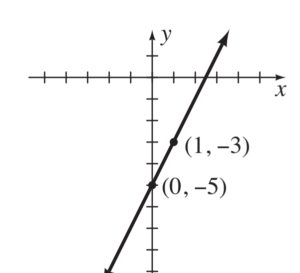
13. $x - y = -4$ **14.** $x + y = -2$

15. $4x + y = -29$

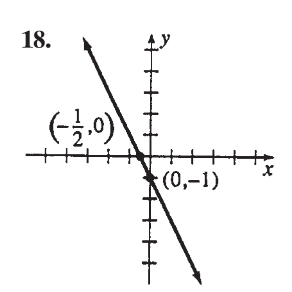
16.



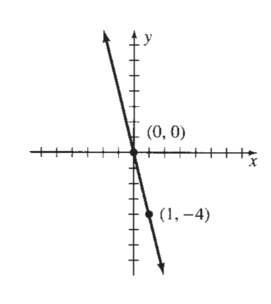
17.



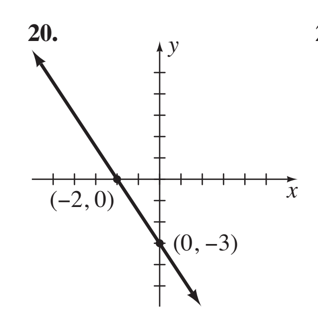
18.



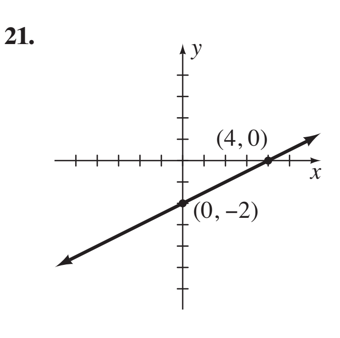
19.



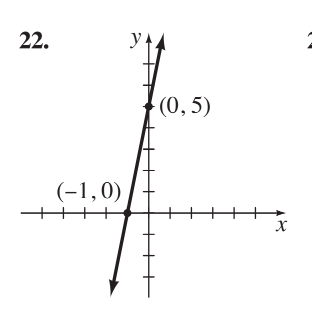
20.



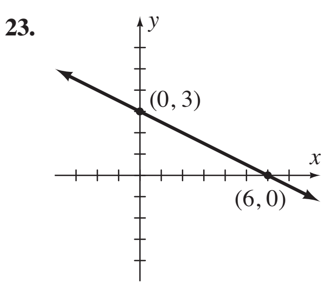
21.



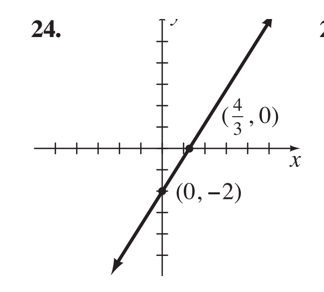
22.



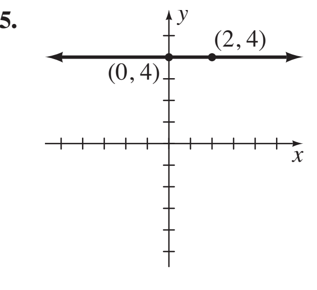
23.



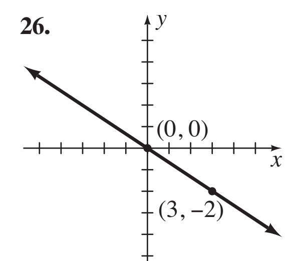
24.



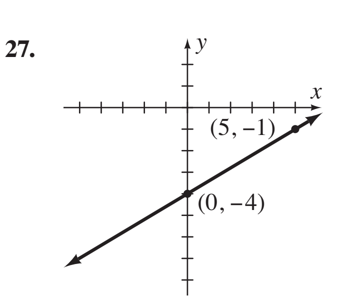
25.



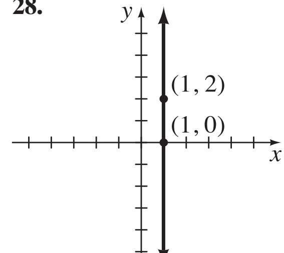
26.



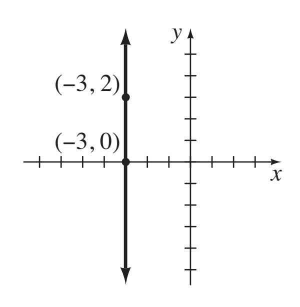
27.



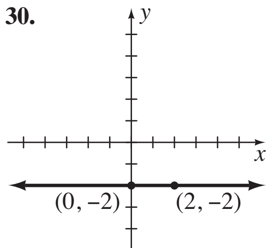
28.



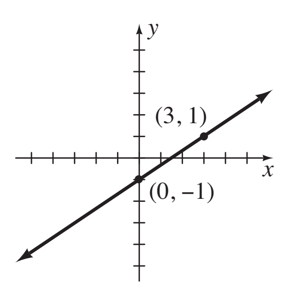
29.



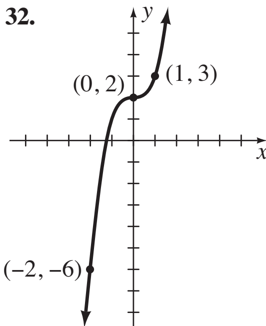
30.



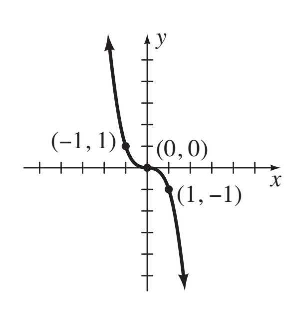
31.



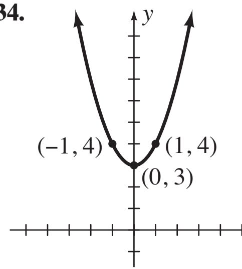
32.



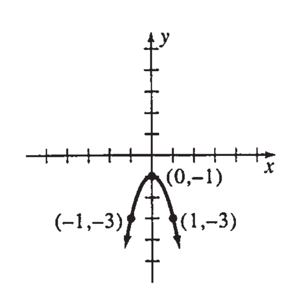
33.



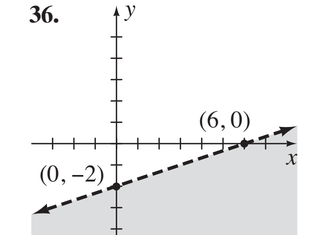
34.



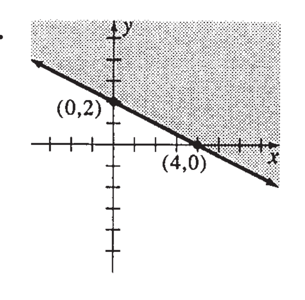
35.



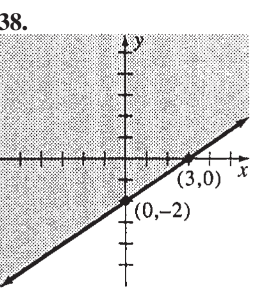
36.



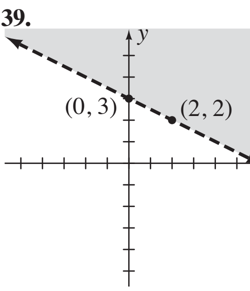
37.



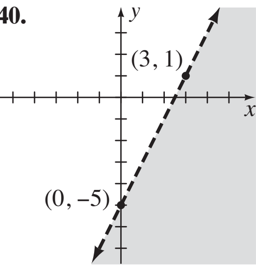
38.



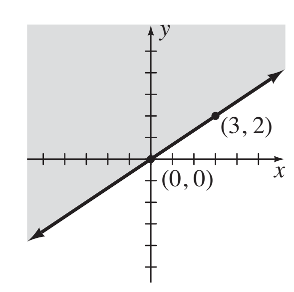
39.

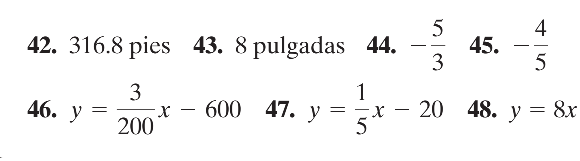
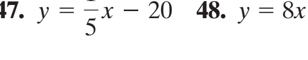


40.



41.



42. 316.8 pies **43.** 8 pulgadas **44.** $-\frac{5}{3}$ **45.** $-\frac{4}{5}$

46. $y = \frac{3}{200}x - 600$ **47.** $y = \frac{1}{5}x - 20$ **48.** $y = 8x$

49. $y = 300x - 150$ **50.** **(a)** eje y **(b)** origen **(c)** origen **(d)** eje x

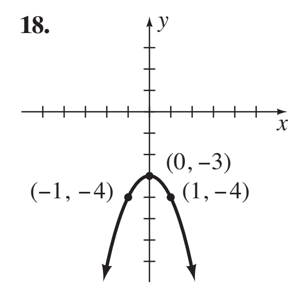
Capítulo 7 Examen (página 390)

1. $-\frac{6}{5}$ **2.** $\frac{3}{7}$ **3.** $\sqrt{58}$ **4.** $3x + 2y = 2$ **5.** $y = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

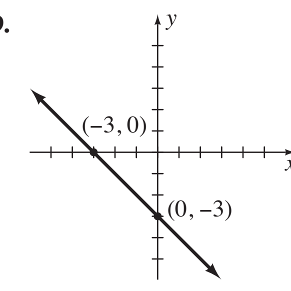
6. $5x + 2y = -18$ **7.** $6x + y = 31$ **8.** Simetría en torno al origen **9.** eje x, eje y y simetría en torno al origen **11.** $\frac{7}{2}$ **12.** $\frac{9}{4}$ **13.** $\frac{10}{9}$

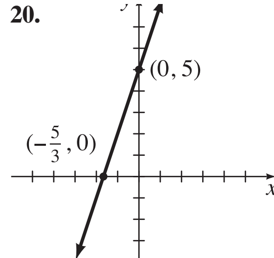
14. $-\frac{5}{8}$ **15.** 480 pies **16.** 6.7% **17.** 43 centímetros

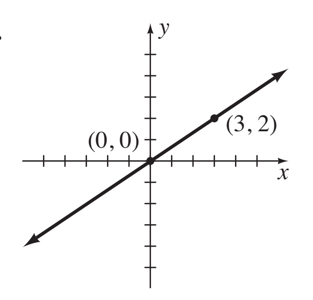
18.

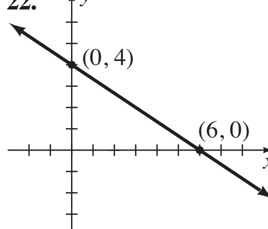


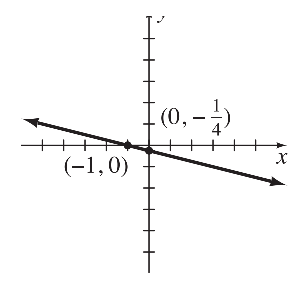
19.

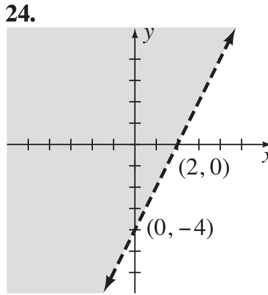


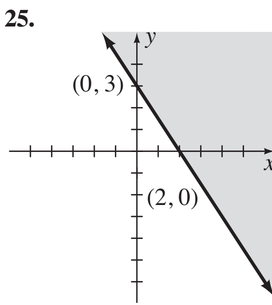
20.


21.


22.


23.


24.


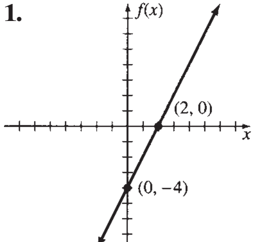
25.


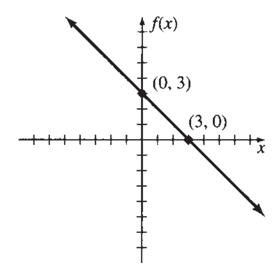
CAPÍTULO 8

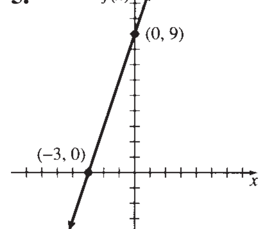
Conjunto de problemas 8.1 (página 399)

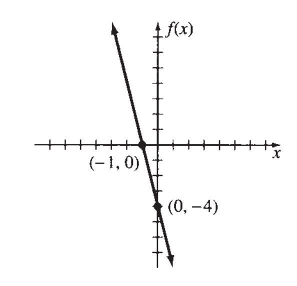
1. $f(3) = -1; f(5) = -5; f(-2) = 9$
3. $g(3) = -20; g(-1) = -8; g(2a) = -8a^2 + 2a - 5$
5. $h(3) = \frac{5}{4}; h(4) = \frac{23}{12}; h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{12}$
7. $f(5) = 3; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0; f(23) = 3\sqrt{5}$
9. $-2a + 7, -2a + 3, -2a - 2h + 7$
11. $a^2 + 4a + 10, a^2 - 12a + 42,$
$a^2 + 2ah + h^2 - 4a - 4h + 10$
13. $-a^2 - 3a + 5, -a^2 - 9a - 13, -a^2 - a + 7$
15. $f(4) = 4; f(10) = 10; f(-3) = 9; f(-5) = 25$
17. $f(3) = 6; f(5) = 10; f(-3) = 6; f(-5) = 10$
19. $f(2) = 1; f(0) = 0; f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; f(-4) = -1$
21. -7 **23.** $-2a - h + 4$ **25.** $6a + 3h - 1$
27. $3a^2 + 3ah + h^2 - 2a - h + 2$
29. $-\frac{2}{(a - 1)(a + h - 1}$ **31.** $-\frac{2a + h}{a^2(a + h)^2}$ **33.** Sí
35. No **37.** Sí **39.** Sí **41.** $D = \left\{x|x \geq \frac{4}{3}\right\};$
$R = \{f(x)|f(x) \geq 0\}$
43. $D = \{x|x$ es cualquier número real$\};$
$R = \{f(x)|f(x) \geq -2\}$
45. $D = \{x|x$ es cualquier número real$\};$
$R = \{f(x)|f(x)$ es cualquier número real no negativo$\}$
47. $D = \{x|x$ es cualquier número real no negativo$\};$
$R = \{f(x)|f(x)$ es cualquier número real no positivo$\}$
49. $D = \{x|x \neq -2\}$
51. $D = \left\{x|x \neq \frac{1}{2} \text{ y } x \neq -4\right\}$
53. $D = \{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$
55. $D = \{x|x \neq -3 \text{ y } x \neq 4\}$
57. $D = \left\{x|x \neq -\frac{5}{2} \text{ y } x \neq \frac{1}{3}\right\}$
59. $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ **61.** $(-\infty, \infty)$
63. $(-\infty, -5] \cup [8, \infty)$ **65.** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$
67. $[-1, 1]$ **69.** 12.57; 28.27; 452.39; 907.92
71. 48; 64; 48; 0
73. \$55; \$60; \$67.50; \$75 **75.** 125.66; 301.59; 804.25

Conjunto de problemas 8.2 (página 408)

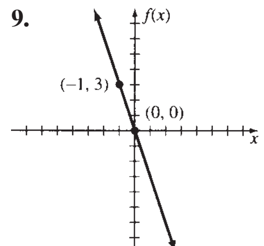
1.


3.


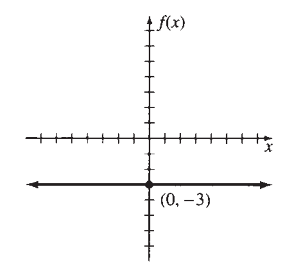
5.


7.


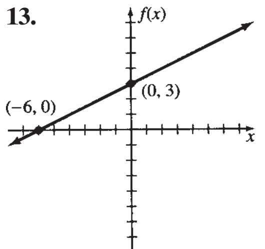
9.



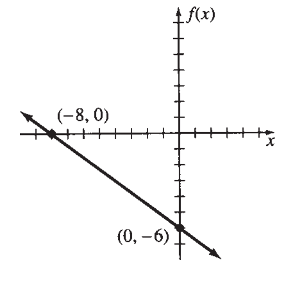
11.



13.



15.



17. $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ **19.** $f(x) = -x - 4$

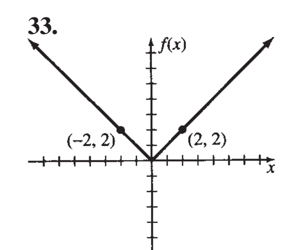
21. $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$ **23. (a)** \$.42

(c) Las respuestas variarán. **25.** \$26; \$30.50; \$50; \$60.50

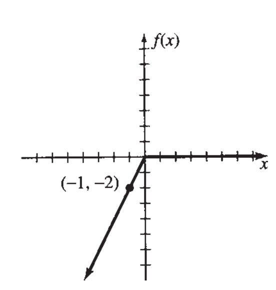
27. \$2.10; \$4.55; \$20.72; \$29.40; \$33.88

29. $f(p) = 0.8p$; \$7.60; \$12; \$60; \$10; \$600

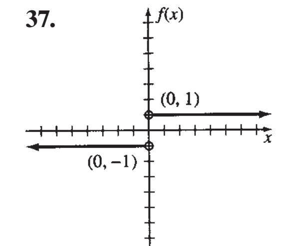
33.



35.

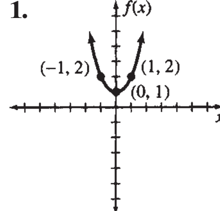


37.

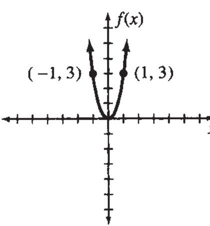


Conjunto de problemas 8.3 (página 419)

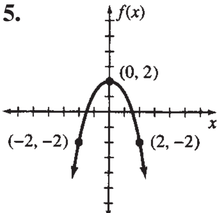
1.



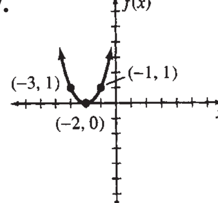
3.



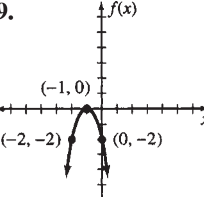
5.



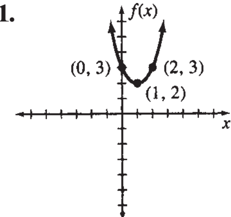
7.



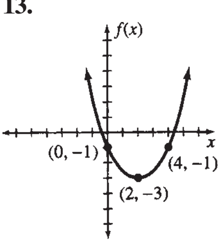
9.



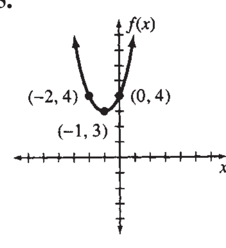
11.



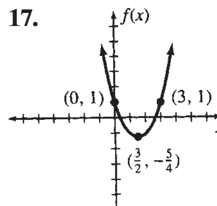
13.



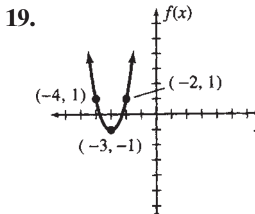
15.



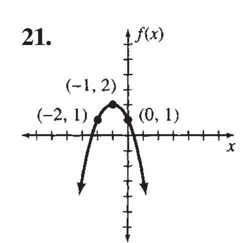
17.



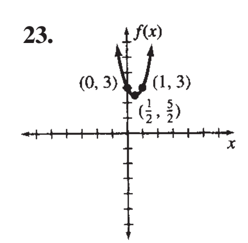
19.



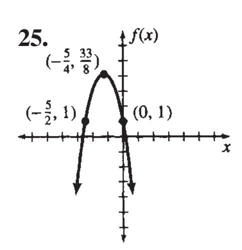
21.



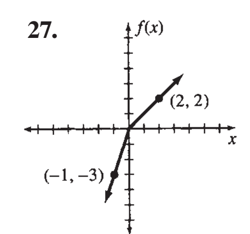
23.



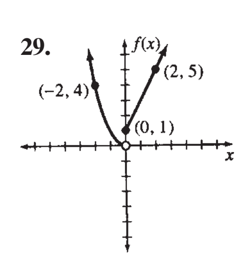
25.



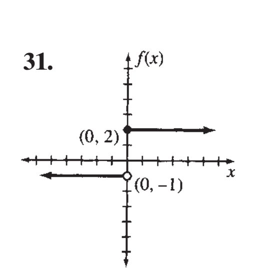
27.



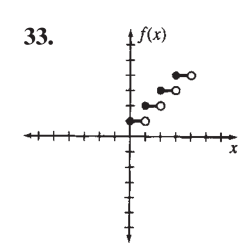
29.



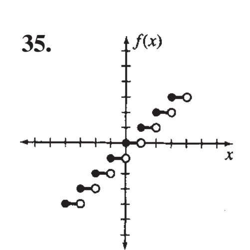
31.



33.

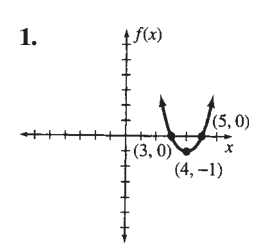


35.

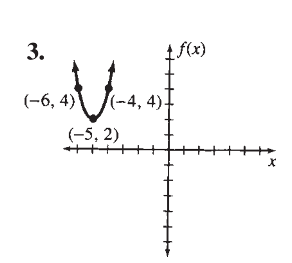


Conjunto de problemas 8.4 (página 430)

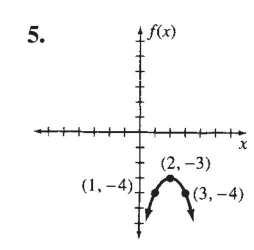
1.



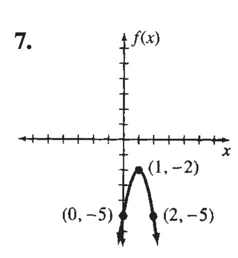
3.



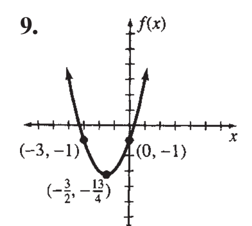
5.



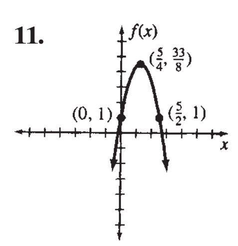
7.



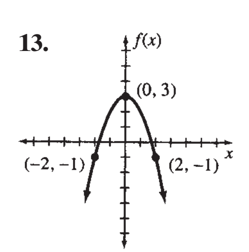
9.



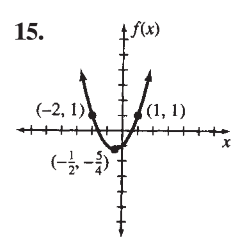
11.



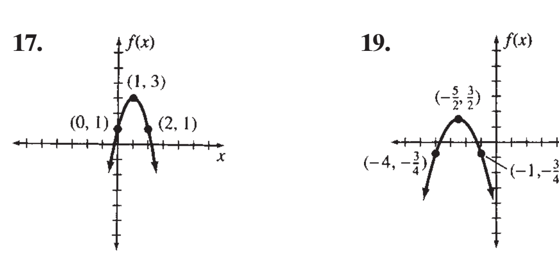
13.



15.



17. **19.**



21. -2 y 2; $0, -12$ **23.** 0 y 2; $(1, -5)$

25. 3 y 5; $(4, -1)$ **27.** 6 y 8; $(7, -2)$

29. 4 y 6; $(5, 1)$ **31.** $7 + \sqrt{5}$ y $7 - \sqrt{5}$; $(7, 5)$

33. No hay abscisas al origen; $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

35. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ **37.** -11 y 8

39. 3 y 9 **41.** $2 - i\sqrt{7}$ y $2 + i\sqrt{7}$

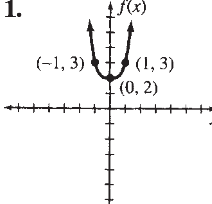
43. 70 **45.** 144 pies **47.** 25 y 25

49. 60 metros por 60 metros

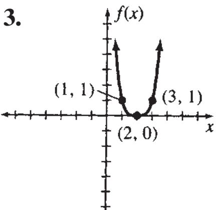
51. 1100 suscriptores a \$13.75 por mes

Conjunto de problemas 8.5 (página 441)

1.



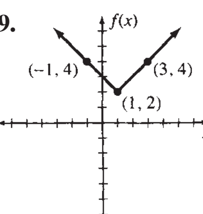
3.



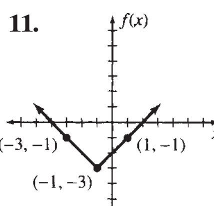
5. (−2, 8) f(x) (0, 0) (1, −1) (2, −8) x

7. f(x) (−1, 1) (−2, 0) (−3, −1) x

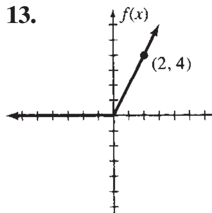
9.



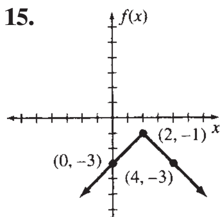
11.



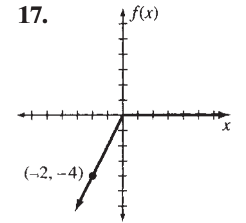
13.



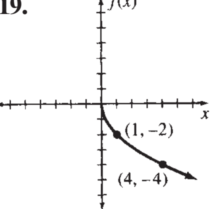
15.



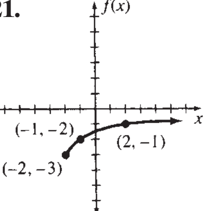
17.



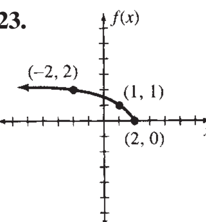
19.



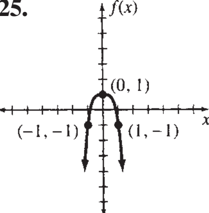
21.



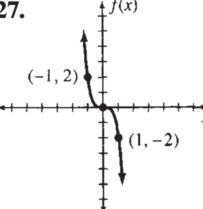
23.



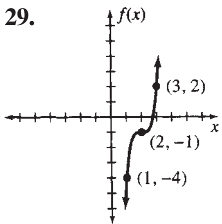
25.



27.

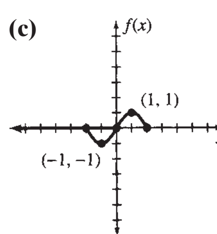


29.

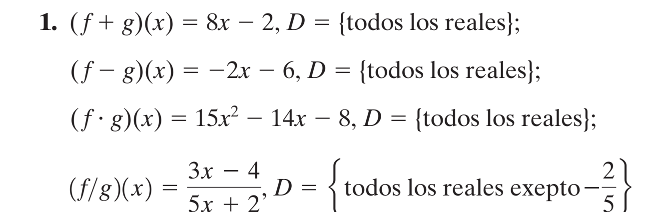


31. (a) f(x) (−1, 4) (0, 3) (2, 3) (−2, 3) (1, 2) x

(c)



Conjunto de problemas 8.6 (página 448)



1. $(f+g)(x) = 8x - 2$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f-g)(x) = -2x - 6$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f \cdot g)(x) = 15x^2 - 14x - 8$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f/g)(x) = \dfrac{3x-4}{5x+2}$, $D = \left\{\text{todos los reales exepto} -\dfrac{2}{5}\right\}$

3. $(f+g)(x) = x^2 - 7x + 3$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f-g)(x) = x^2 - 5x + 5$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f \cdot g)(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 4$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;

$(f/g)(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 4}{-x - 1}$, $D = \{\text{todos los reales excepto } -1\}$

5. $(f+g)(x) = 2x^2 + 3x - 6$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(f-g)(x) = -5x + 4$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(f \cdot g)(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 + x + 5$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(f/g)(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 4x - 5}$, $D = \{\text{todos los reales excepto } -5 \text{ y } 1\}$

7. $(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$, $D = \{x|x \geq 1\}$;
$(f-g)(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$, $D = \{x|x \geq 1\}$;
$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 - x}$, $D = \{x|x \geq 1\}$;
$(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$, $D = \{x|x \geq 1\}$

9. $(f \circ g)(x) = 6x - 2$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(g \circ f)(x) = 6x - 1$, $D = \{\text{todos los reales}\}$

11. $(f \circ g)(x) = 10x + 2$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(g \circ f)(x) = 10x - 5$, $D = \{\text{todos los reales}\}$

13. $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 7$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(g \circ f)(x) = 9x^2 + 24x + 17$, $D = \{\text{todos los reales}\}$

15. $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 9x - 16$, $D = \{\text{todos los reales}\}$;
$(g \circ f)(x) = 9x^2 - 15x$, $D = \{\text{todos los reales}\}$

17. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x+7}$, $D = \left\{x|x \neq -\dfrac{7}{2}\right\}$;
$(g \circ f)(x) = \dfrac{7x+2}{x}$, $D = \{x|x \neq 0\}$

19. $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x-3}$, $D = \{x|x \geq 1\}$;
$(g \circ f)(x) = 3\sqrt{x-2} - 1$, $D = \{x|x \geq 2\}$

21. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{2-x}$, $D = \{x|x \neq 0 \text{ y } x \neq 2\}$;
$(g \circ f)(x) = 2x - 2$, $D = \{x|x \neq 1\}$

23. $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-1} + 1$, $D = \{x|x \geq 1\}$;
$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x}$, $D = \{x|x \geq 0\}$

25. $(f \circ g)(x) = x$, $D = \{x|x \neq 0\}$;
$(g \circ f)(x) = x$, $D = \{x|x \neq 1\}$

27. 4; 50 **29.** 9; 0 **31.** $\sqrt{11}$; 5

Conjunto de problemas 8.7 (página 456)

1. $y = kx^3$ **3.** $A = klw$ **5.** $V = \dfrac{k}{P}$ **7.** $V = khr^2$

9. 24 **11.** $\dfrac{22}{7}$ **13.** $\dfrac{1}{2}$ **15.** 7 **17.** 6 **19.** 8 **21.** 96

23. 5 horas **25.** 2 segundos **27.** 24 días **29.** 28
31. $2400 **37.** 2.8 segundos **39.** 1.4

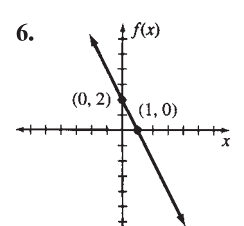
Capítulo 8 Conjunto de problemas de repaso (página 460)

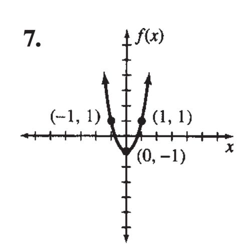
1. 7; 4; 32 **2.** **(a)** -5 **(b)** $4a + 2h - 1$ **(c)** $-6a - 3h + 2$

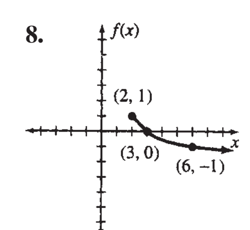
3. $D = \{x|x \text{ es cualquier número real}\}$;
$R = \{f(x)|f(x) \geq 5\}$

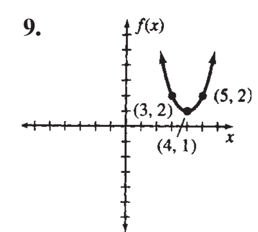
4. $D = \left\{x|x \neq \dfrac{1}{2}, x \neq -4\right\}$

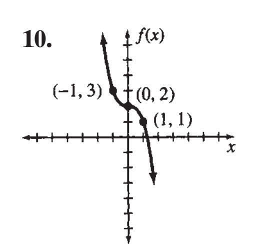
5. $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

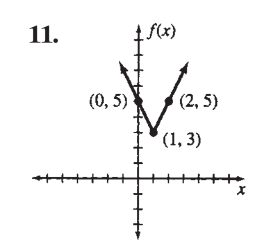
6.


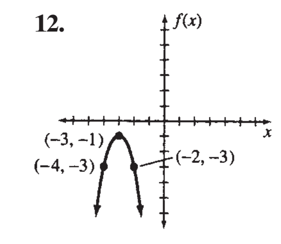
7.


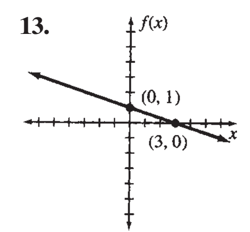
8.


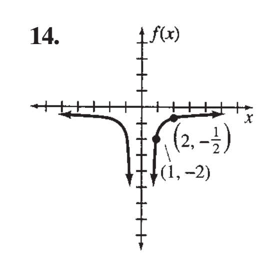
9.


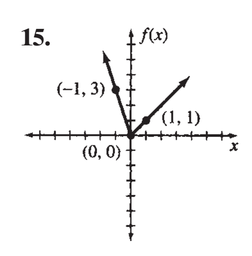
10.


11.


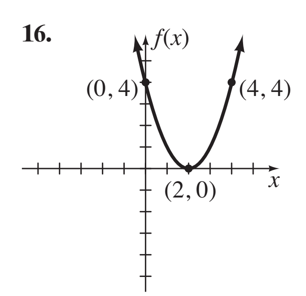
12.


13.


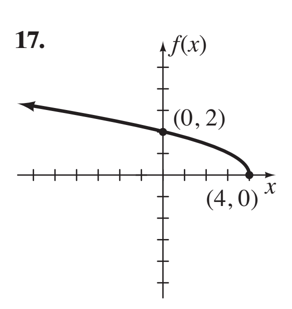
14.


15.


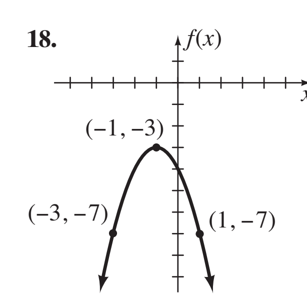
16.



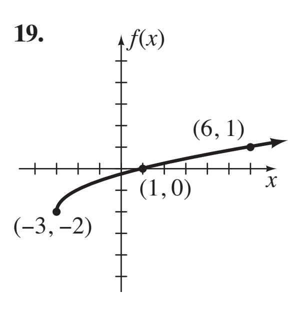
17.



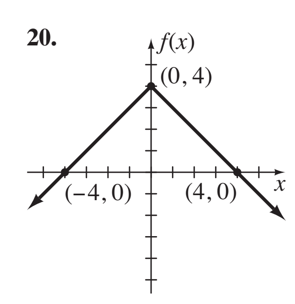
18.



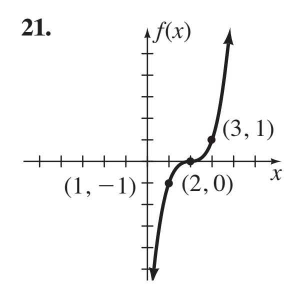
19.



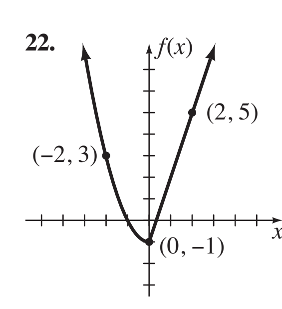
20.



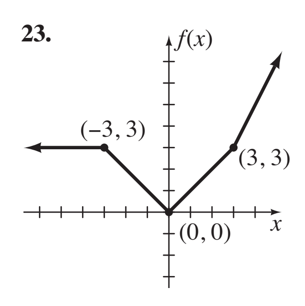
21.



22.



23.



24. $x^2 - 2x; -x^2 + 6x + 6; 2x^3 - 5x^2 - 18x - 9; \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4x - 3}$

25. $(f \circ g)(x) = -6x + 12, D = \{\text{todos los reales}\};$
$(g \circ f)(x) = -6x + 25, D = \{\text{todos los reales}\}$

26. $(f \circ g)(x) = 25x^2 - 40x + 11, D = \{\text{todos los reales}\};$
$(g \circ f)(x) = 5x^2 - 29, D = \{\text{todos los reales}\}$

27. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3}, D = \{x|x \geq 3\};$
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 5} + 2, D = \{x|x \geq 5\}$

28. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}, D = \{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -2\};$
$(g \circ f)(x) = \dfrac{1 - x - 6x^2}{x^2}, D = \{x|x \neq 0\}$

29. $(f \circ g)(x) = x - 1, D = \{x|x \geq 1\};$
$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}, D = \{x|x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$

30. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x + 2}{-3x - 5}, D = \left\{x|x \neq -2 \text{ y } x \neq -\dfrac{5}{3}\right\};$
$(g \circ f)(x) = \dfrac{x - 3}{2x - 5}, D = \left\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq \dfrac{5}{2}\right\}$

31. $f(5) = 23; f(0) = -2; f(-3) = 13$

32. $f(g(6)) = -2; g(f(-2)) = 0$

33. $f(g(1)) = 1; g(f(-3)) = 5$ **34.** $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{16}{3}$

35. $f(x) = 2x + 15$ **36.** \$.72

37. $f(x) = 0.7x$; \$45.50; \$33.60; \$10.85

38. -4 y 2; $(-1, -27)$ **39.** $3 \pm \sqrt{14}; (3, -14)$

40. No hay abscisa al origen; (7, 3) **41.** 2 y 8
42. 112 estudiantes **43.** 9 **44.** 441
45. 128 libras **46.** 15 horas

Capítulo 8 Examen (página 462)

1. $\dfrac{11}{6}$ **2.** 11 **3.** $6a + 3h + 2$

4. $\left\{x|x \neq -4 \text{ y } x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$ **5.** $\left\{x|x \leq \dfrac{5}{3}\right\}$

6. $(f + g)(x) = 2x^2 + 2x - 6; (f - g)(x) = -2x^2 + 4x + 4; (f \cdot g)(x) = 6x^3 - 5x^2 - 14x + 5$

7. $(f \circ g)(x) = -21x - 2$ **8.** $(g \circ f)(x) = 8x^2 + 38x + 48$

9. $(f \circ g)(x) = \dfrac{3x}{2 - 2x}$ **10.** 12; 7 **11.** $f(x) = -\dfrac{5}{6}x - \dfrac{14}{3}$

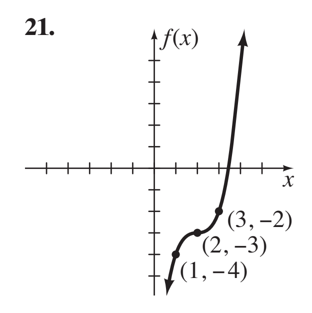
12. $\{x|x \neq 0 \text{ y } x \neq 1\}$ **13.** 18; 10; 0

14. $(f \cdot g)(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6; \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = x + 6$

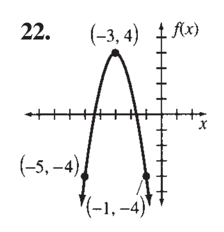
15. 6 y 54 **16.** 15 **17.** -4 **18.** \$96

19. $s(c) = 1.35c$; \$17.55 **20.** -2 y 6; $(2, -64)$

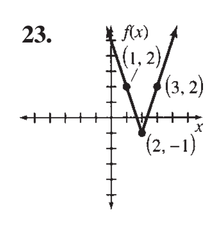
21.



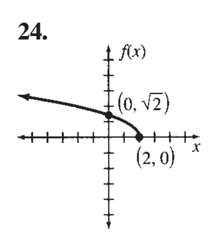
22.



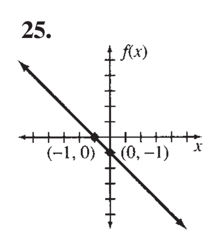
23.



24.



25.



CAPÍTULO 9

Conjunto de problemas 9.1 (página 468)

1. Q: $4x + 3$; R: 0 **3.** Q: $2x - 7$; R: 0 **5.** Q: $3x - 4$; R: 1
7. Q: $4x - 5$; R: -2 **9.** Q: $x^2 + 3x - 4$; R: 0
11. Q: $3x^2 + 2x - 4$; R: 0 **13.** Q: $5x^2 + x - 1$; R: -4
15. Q: $x^2 - x - 1$; R: 8 **17.** Q: $-x^2 + 4x - 2$; R: 0
19. Q: $-3x^2 + 4x - 2$; R: 4 **21.** Q: $3x^2 + 6x + 10$; R: 15
23. Q: $2x^3 - x^2 + 4x - 2$; R: 0
25. Q: $x^3 + 7x^2 + 21x + 56$; R: 167
27. Q: $x^3 - x + 5$; R: 0 **29.** Q: $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$; R: 0
31. Q: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; R: -2
33. Q: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; R: 0
35. Q: $x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$; R: 0
37. Q: $4x^4 - 2x^3 + 2x - 3$; R: -1
39. Q: $9x^2 - 3x + 2$; R: $-\dfrac{10}{3}$
41. Q: $3x^3 - 3x^2 + 6x - 3$; R: 0

Conjunto de problemas 9.2 (página 472)

1. $f(3) = 9$ **3.** $f(-1) = -7$ **5.** $f(2) = 19$ **7.** $f(6) = 74$
9. $f(-2) = -65$ **11.** $f(-1) = -1$ **13.** $f(8) = -83$
15. $f(3) = 8751$ **17.** $f(-6) = 31$ **19.** $f(4) = -1113$
21. Sí **23.** No **25.** Sí **27.** Sí **29.** No **31.** Sí
33. Sí **35.** $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 7)$
37. $f(x) = (x + 2)(4x - 1)(3x + 2)$
39. $f(x) = (x + 1)^2(x - 4)$
41. $f(x) = (x - 6)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$
43. $f(x) = (x + 5)(3x - 4)^2$ **45.** $k = 1$ o $k = -4$
47. $k = 6$ **49.** $f(c) > 0$ para todos los valores de c
51. Sea $f(x) = x^n - 1$. Puesto que $(-1)^n = 1$ para todo valor entero positivo par de n, $f(-1) = 0$ y $x - (-1) = x + 1$ es un factor

53. **(a)** Sea $f(x) = x^n - y^n$. Por tanto $f(y) = y^n - y^n = 0$ y $x - y$ es un factor de $f(x)$. **(c)** Sea $f(x) = x^n + y^n$. Por tanto $f(-y) = (-y)^n + y^n = -y^n + y^n = 0$ cuando n es impar, y $x - (-y) = x + y$ es un factor de $f(x)$.

57. $f(1 + i) = 2 + 6i$

61. **(a)** $f(4) = 137$; $f(-5) = 11$; $f(7) = 575$

(c) $f(4) = -79$; $f(5) = -162$; $f(-3) = 110$

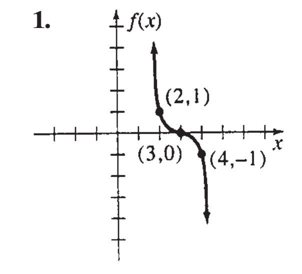
Conjunto de problemas 9.3 (página 483)

1. $\{-3, 1, 4\}$ **3.** $\left\{-1, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right\}$ **5.** $\left\{-2, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{2}\right\}$
7. $\{-3, 2\}$ **9.** $\{2, 1 \pm \sqrt{5}\}$ **11.** $\{-3, -2, -1, 2\}$
13. $\{-2, 3, -1 \pm 2i\}$ **15.** $\{1, \pm i\}$ **17.** $\left\{-\dfrac{5}{2}, 1, \pm\sqrt{3}\right\}$
19. $\left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ **27.** $\{-3, -1, 2\}$ **29.** $\left\{-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{3}, 3\right\}$
31. 1 solución positiva y 1 negativa
33. 1 solución positiva y 2 complejas no reales
35. 1 solución negativa y 2 positivas, *o* 1 negativa y 2 complejas no reales
37. 5 soluciones positivas, *o* 3 positivas y 2 complejas no reales, *o* 1 positiva y 4 complejas no reales
39. 1 solución negativa y 4 complejas no reales
47. **(a)** $\{4, -3 \pm i\}$ **(c)** $\{-2, 6, 1 \pm \sqrt{3}\}$

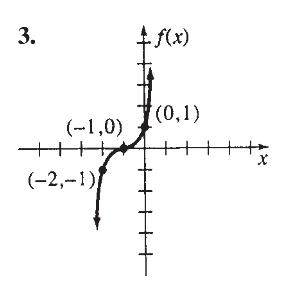
(e) $\{12, 1 \pm i\}$

Conjunto de problemas 9.4 (página 494)

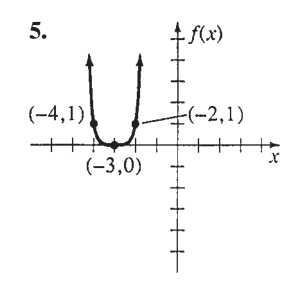
1.



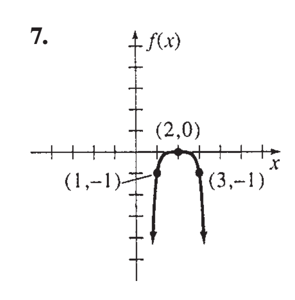
3.



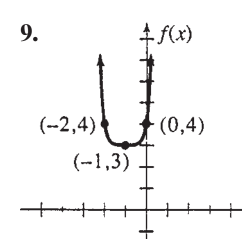
5.



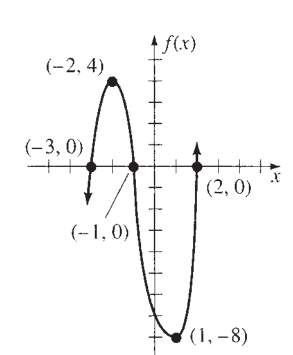
7.



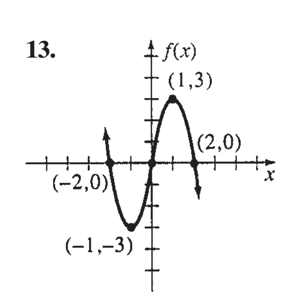
9.



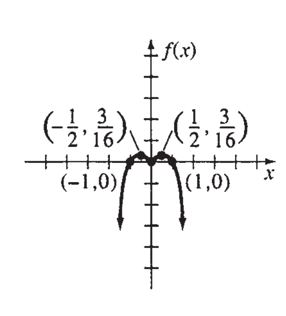
11.



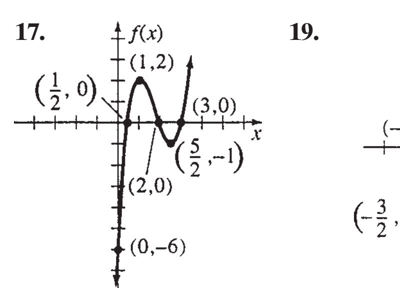
13.



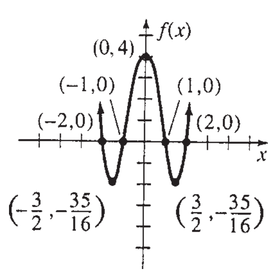
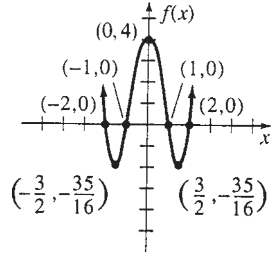
15.



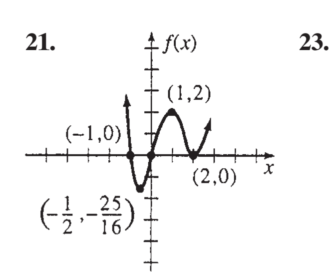
17.



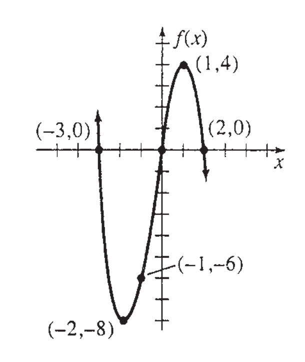
19.

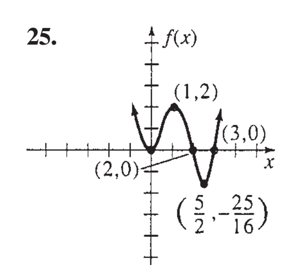
21.



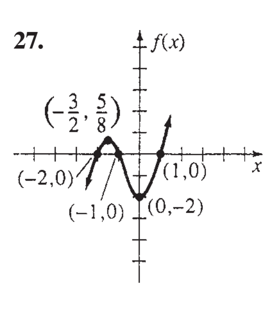
23.



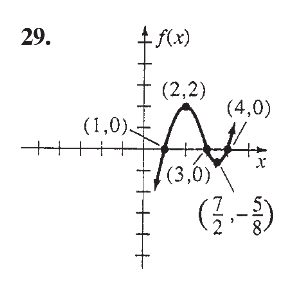
25.



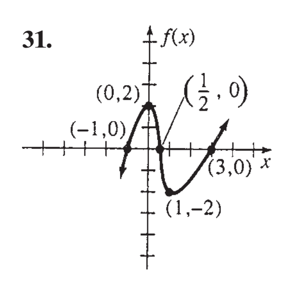
27.



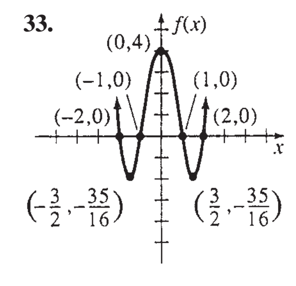
29.



31.



33.



35. **(a)** -144 **(b)** $-3, 6$ y 8

(c) $f(x) > 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } 6 < x < 8\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|-3 < x < 6 \text{ o } x > 8\}$

37. **(a)** -81 **(b)** -3 y 1 **(c)** $f(x) > 0$ para $\{x|x > 1\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } -3 < x < 1\}$

39. **(a)** 0 **(b)** $-4, 0$ y 6

(c) $f(x) > 0$ para $\{x|x < -4 \text{ o } 0 < x < 6 \text{ o } x > 6\}$;

$f(x) < 0$ para $\{x|-4 < x < 0\}$

41. **(a)** 0 **(b)** $-3, 0$ y 2

(c) $f(x) > 0$ para $\{x|-3 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2\}$;

$f(x) < 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } x > 2\}$

45. **(a)** 1.6 **(c)** 6.1 **(e)** 2.5

51. **(a)** $-2, 1$ y 4; $f(x) > 0$ para $(-2, 1) \cup (4, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$

(c) 2 y 3; $f(x) > 0$ para $(3, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(2, 3) \cup (-\infty, -2)$ **(e)** $-3, -1$ y 2; $f(x) > 0$ para $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(-3, -1) \cup (-1, 2)$

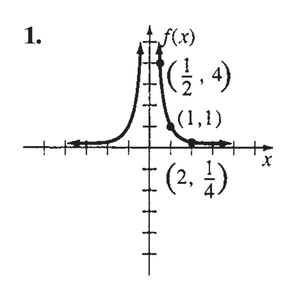
53. **(a)** -3.3; $(0.5, 3.1)$, $(-1.9, 10.1)$

(c) -2.2, 2.2; $(-1.4, -8.0)$, $(0, -4.0)$, $(1.4, -8.0)$

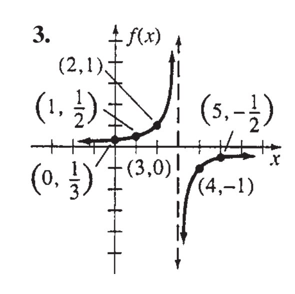
55. 32 unidades

Conjunto de problemas 9.5 (página 506))

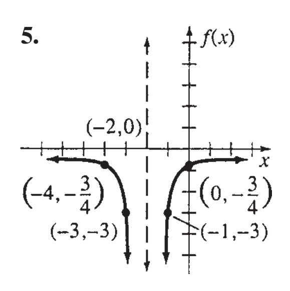
1.



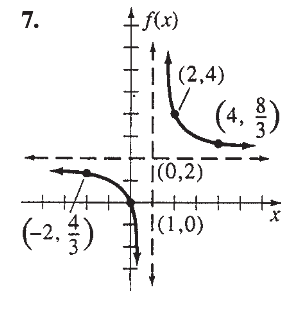
3.



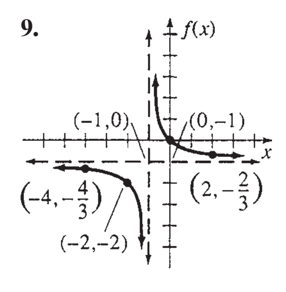
5.



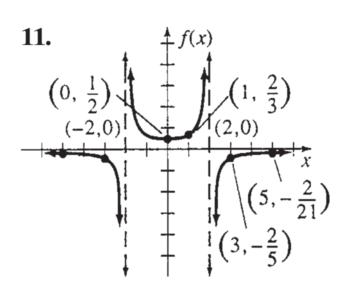
7.



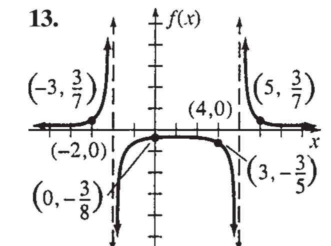
9.



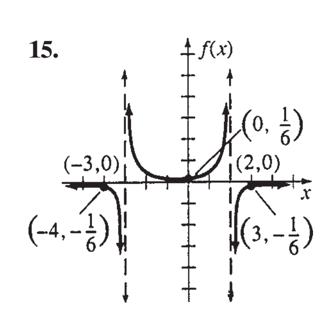
11.



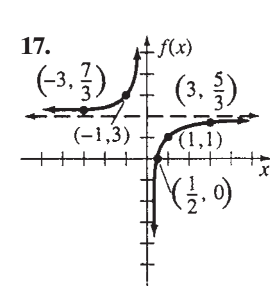
13.



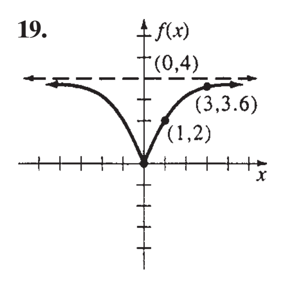
15.



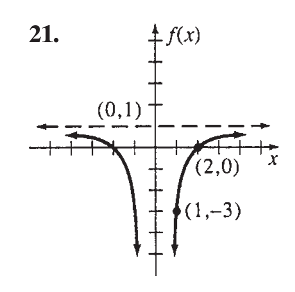
17.



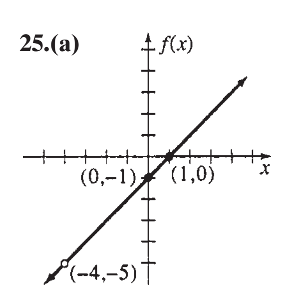
19.



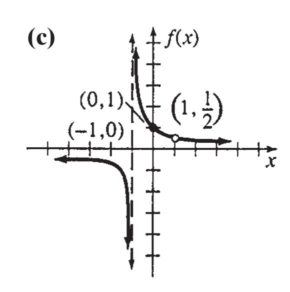
21.



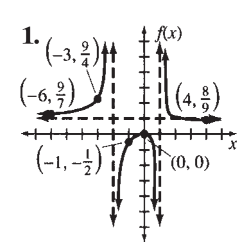
25.(a)

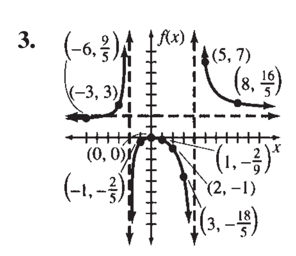


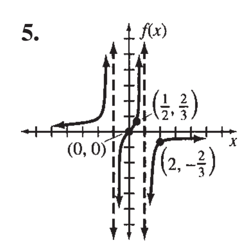
(c)

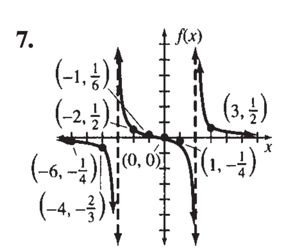


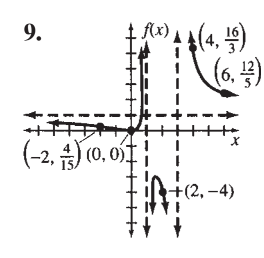
Conjunto de problemas 9.6 (página 515)

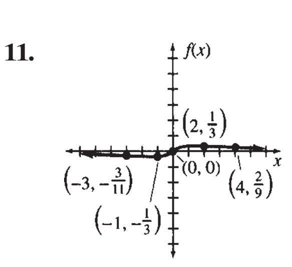
1.


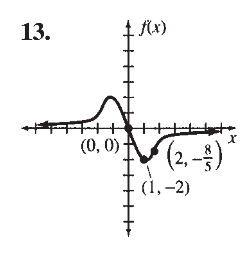
3.


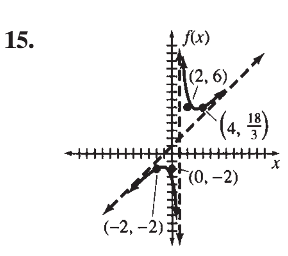
5.


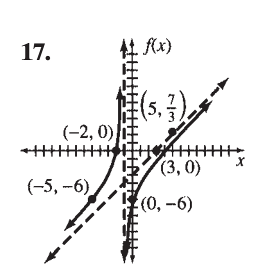
7.


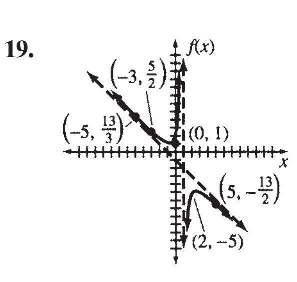
9.


11.


13.


15.


17.


19.


Capítulo 9 Conjunto de problemas de repaso (página 518)

1. $Q: 3x^2 - x + 5$; $R: 3$ **2.** $Q: 5x^2 - 3x - 3$; $R: 16$

3. $Q: -2x^3 + 9x^2 - 38x + 151$; $R: -605$

4. $Q: -3x^3 - 9x^2 - 32x - 96$; $R: -279$ **5.** $f(1) = 1$

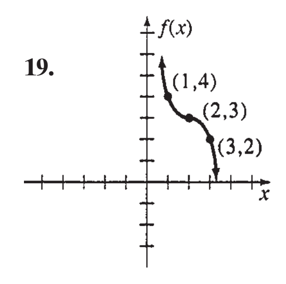
6. $f(-3) = -197$ **7.** $f(-2) = 20$ **8.** $f(8) = 0$

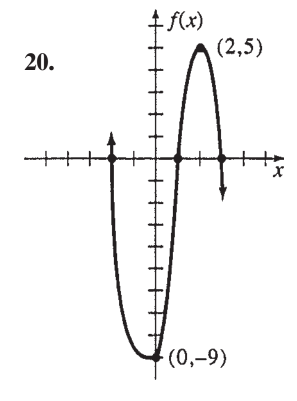
9. Sí **10.** No **11.** Sí **12.** Sí **13.** $\{-3, 1, 5\}$

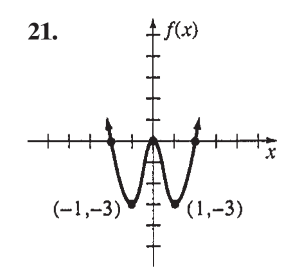
14. $\left\{-\frac{7}{2}, -1, \frac{5}{4}\right\}$ **15.** $\{1, 2, 1 \pm 5i\}$ **16.** $\{-2, 3 \pm \sqrt{7}\}$

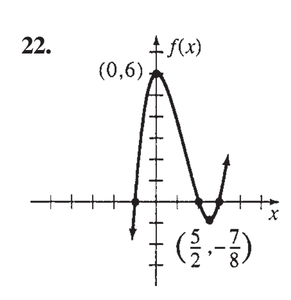
17. 2 soluciones positivas y 2 negativas, *o* 2 positivas y 2 soluciones complejas no reales *o* 2 negativas y 2 soluciones complejas no reales *o* 4 complejas no reales

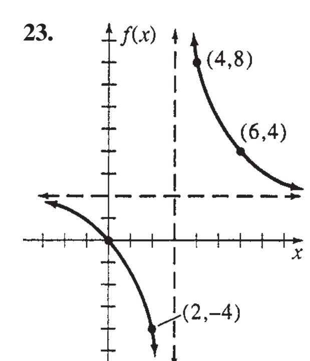
18. 1 negativa y 4 complejas no reales

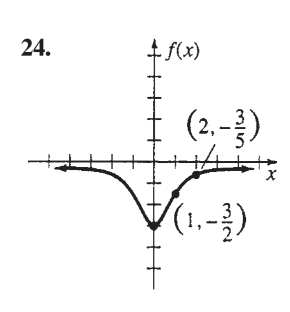
19.


20.


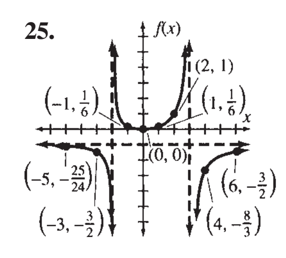
21.


22.


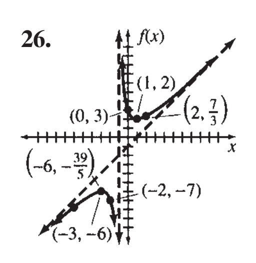
23.


24.


25.



26.



Capítulo 9 Examen (página 519)

1. $Q: 3x^2 - 4x - 2; R: 0$

2. $Q: 4x^3 + 8x^2 + 9x + 17; R: 38$ **3.** -24 **4.** 5

5. 39 **6.** No **7.** No **8.** Sí **9.** No **10.** $\{-4, 1, 3\}$

11. $\left\{-4, \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}\right\}$ **12.** $\{-3, 1, 3 \pm i\}$

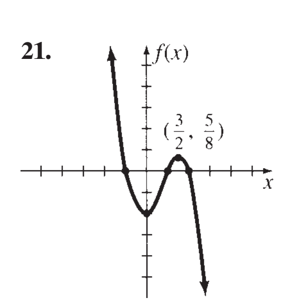
13. $\left\{-4, 1, \frac{3}{2}\right\}$ **14.** $\left\{-\frac{5}{3}, 2\right\}$

15. 1 solución positiva, 1 negativa y 2 complejas no reales

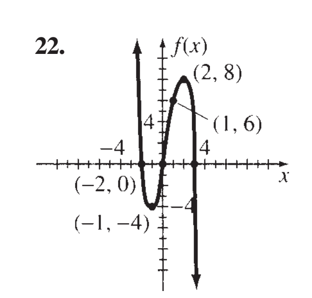
16. $-7, 0$ y $\frac{2}{3}$ **17.** $x = -3$ **18.** $f(x) = 5$ o $y = 5$

19. Simetría en torno al eje y **20.** Simetría en torno al origen

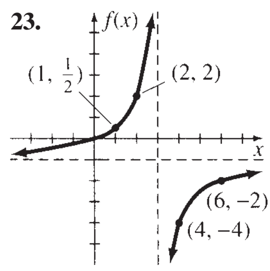
21.



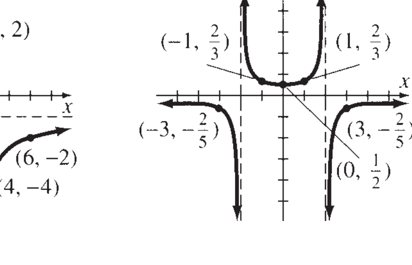
22.



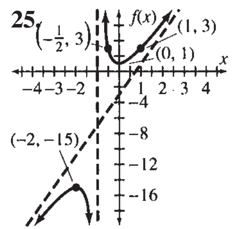
23.



24.



25.



CAPÍTULO 10

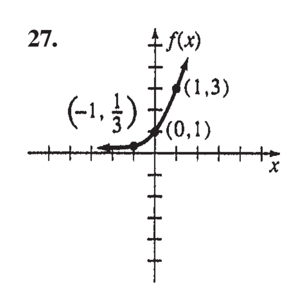
Conjunto de problemas 10.1 (página 528)

1. $\{6\}$ **3.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **5.** $\{7\}$ **7.** $\{5\}$ **9.** $\{1\}$ **11.** $\{-3\}$

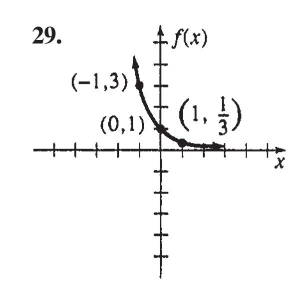
13. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **17.** $\{0\}$ **19.** $\{-1\}$ **21.** $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

23. $\{3\}$ **25.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

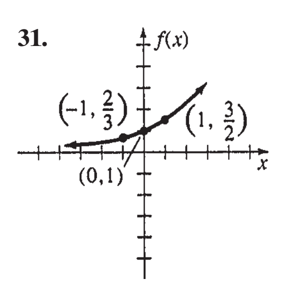
27.



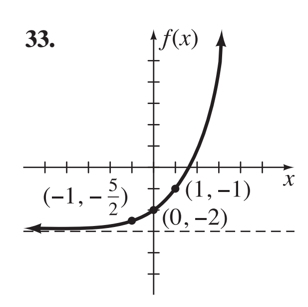
29.



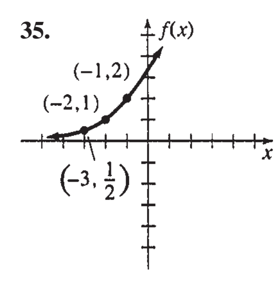
31.



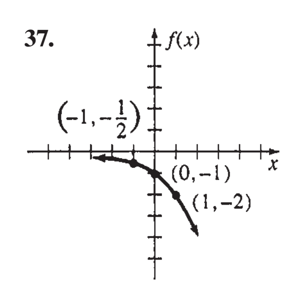
33.



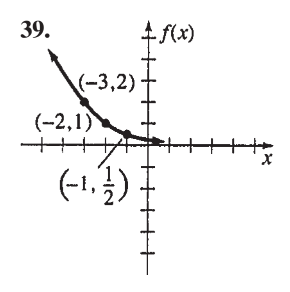
35.



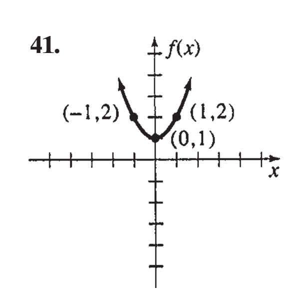
37.



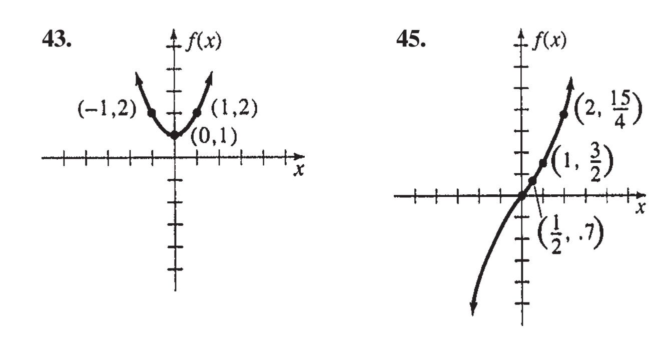
39.



41.



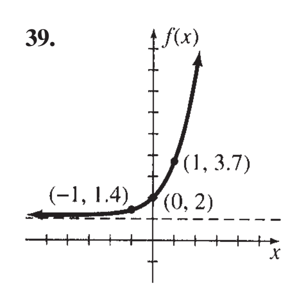
43. **45.**



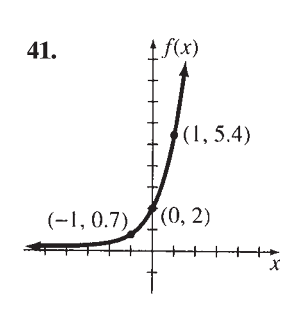
Conjunto de problemas 10.2 (página 538)

1. **(a)** \$0.87 **(c)** \$2.33 **(e)** \$21 900 **(g)** \$658
3. \$283.70 **5.** \$865.84 **7.** \$1782.25 **9.** \$2725.05
11. \$16 998.71 **13.** \$22 553.65 **15.** \$567.63
17. \$1422.36 **19.** \$8963.38 **21.** \$17 547.35
23. \$32 558.88 **25.** 5.9% **27.** 8.06%
29. 8.25% compuesto trimestralmente
31. 50 gramos; 37 gramos **33.** 2226; 3320; 7389
35. 2000 **37.** **(a)** 6.5 libras por pulgada cuadrada
(c) 13.6 libras por pulgada cuadrada

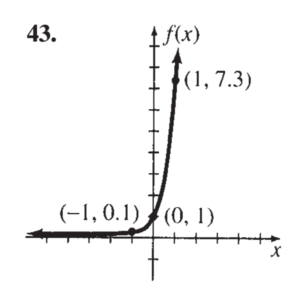
39.



41.



43.



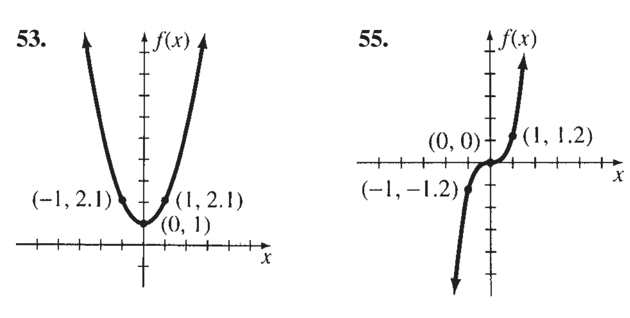
49.

	8%	10%	12%	14%
5 años	\$1492	1649	1822	2014
10 años	2226	2718	3320	4055
15 años	3320	4482	6050	8166
20 años	4953	7389	11 023	16 445
25 años	7389	12 182	20 086	33 115

51.

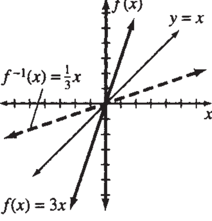
	8%	10%	12%	14%
Compuesto anualmente	\$2159	2594	3106	3707
Compuesto semestralmente	2191	2653	3207	3870
Compuesto trimestralmente	2208	2685	3262	3959
Compuesto mensualmente	2220	2707	3300	4022
Compuesto continuamente	2226	2718	3320	4055

53. **55.**

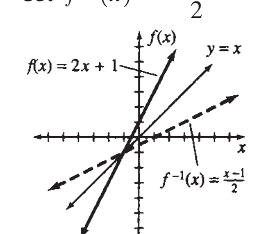


Conjunto de problemas 10.3 (página 549)

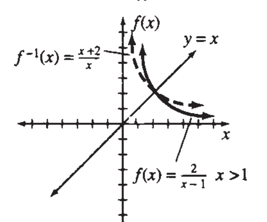
1. Sí **3.** No **5.** Sí **7.** Si **9.** Sí
11. No **13.** No
15. **(a)** Dominio de f: {1, 2, 5}; Rango de f: {5, 9, 21}
(b) $f^{-1} = \{(5, 1), (9, 2), (21, 5)\}$
(c) Dominio de f^{-1}: {5, 9, 21}; Rango de f^{-1}: {1, 2, 5}
17. **(a)** Dominio de f: $\{0, 2, -1, -2\}$;
Rango de f: $\{0, 8, -1, -8\}$
(b) f^{-1}: $\{(0, 0), (8, 2), (-1, -1), (-8, -2)\}$
(c) Dominio de f^{-1}: $\{0, 8, -1, -8\}$;
Rango de f^{-1}: $\{0, 2, -1, -2\}$
27. No **29.** Sí **31.** No **33.** Sí **35.** Sí
37. $f^{-1}(x) = x + 4$ **39.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-x - 4}{3}$
41. $f^{-1}(x) = \dfrac{12x + 10}{9}$ **43.** $f^{-1}(x) = -\dfrac{3}{2}x$
45. $f^{-1}(x) = x^2$ para $x \geq 0$ **47.** $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x \geq 4$
49. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para $x > 1$
51. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x$



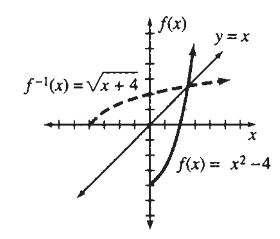
53. $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$



55. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x}$ para $x > 0$



57. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ para $x \geq -4$



59. Creciente sobre $[0, \infty)$ y decreciente sobre $(-\infty, 0]$

61. Creciente sobre $(-\infty, \infty)$

63. Creciente sobre $(-\infty, -2]$ y decreciente sobre $[-2, \infty)$

65. Creciente sobre $(-\infty, -4]$ y creciente sobre $[-4, \infty)$

71. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+9}{3}$ **(c)** $f^{-1}(x) = -x + 1$

(e) $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{5}x$

Conjunto de problemas 10.4 (página 560)

1. $\log_2 128 = 7$ **3.** $\log_5 125 = 3$ **5.** $\log_{10} 1000 = 3$

7. $\log_2 \left(\dfrac{1}{4}\right) = -2$ **9.** $\log_{10} 0.1 = -1$ **11.** $3^4 = 81$

13. $4^3 = 64$ **15.** $10^4 = 10\,000$ **17.** $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

19. $10^{-3} = 0.001$ **21.** 4 **23.** 4 **25.** 3 **27.** $\dfrac{1}{2}$ **29.** 0

31. -1 **33.** 5 **35.** -5 **37.** 1 **39.** 0 **41.** $\{49\}$

43. $\{16\}$ **45.** $\{27\}$ **47.** $\left\{\dfrac{1}{8}\right\}$ **49.** $\{4\}$ **51.** 5.1293

53. 6.9657 **55.** 1.4037 **57.** 7.4512 **59.** 6.3219

61. -0.3791 **63.** 0.5766 **65.** 2.1531 **67.** 0.3949

69. $\log_b x + \log_b y + \log_b z$ **71.** $\log_b y - \log_b z$

73. $3 \log_b y + 4 \log_b z$ **75.** $\dfrac{1}{2}\log_b x + \dfrac{1}{3}\log_b y - 4 \log_b z$

77. $\dfrac{2}{3}\log_b x + \dfrac{1}{3}\log_b z$ **79.** $\dfrac{3}{2}\log_b x - \dfrac{1}{2}\log_b y$

81. $\log_b\left(\dfrac{x^2}{y^4}\right)$ **83.** $\log_b\left(\dfrac{xz}{y}\right)$ **85.** $\log_b\left(\dfrac{x^2z^4}{z^3}\right)$

87. $\log_b\left(\dfrac{y^4\sqrt{x}}{x}\right)$ **89.** $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$ **91.** $\{25\}$ **93.** $\{4\}$ **95.** $\{-2\}$

97. $\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ **99.** $\left\{\dfrac{19}{8}\right\}$ **101.** $\{9\}$ **103.** $\varnothing$ **105.** $\{1\}$

Conjunto de problemas 10.5 (página 568)

1. 0.8597 **3.** 1.7179 **5.** 3.5071 **7.** -0.1373

9. -3.4685 **11.** 411.43 **13.** 90 095 **15.** 79.543

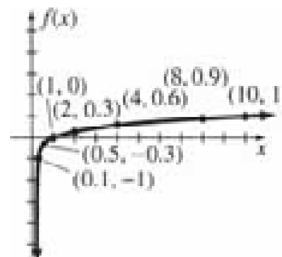
17. 0.048440 **19.** 0.0064150 **21.** 1.6094

23. 3.4843 **25.** 6.0638 **27.** -0.7765 **29.** -3.4609

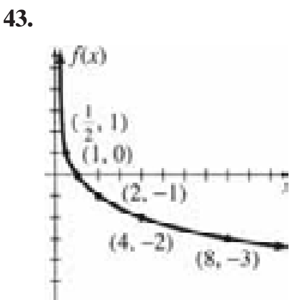
31. 1.6034 **33.** 3.1346 **35.** 108.56 **37.** 0.48268

39. 0.035994

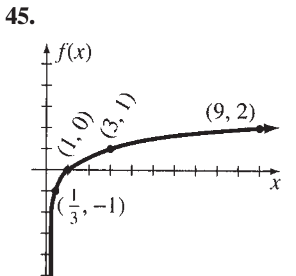
41.



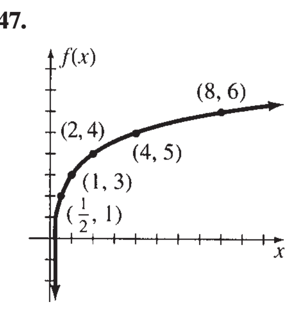
43.



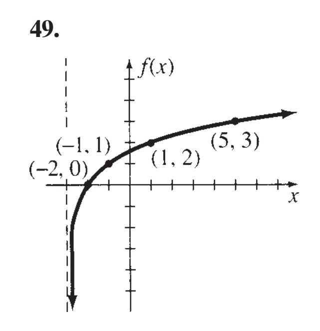
45.



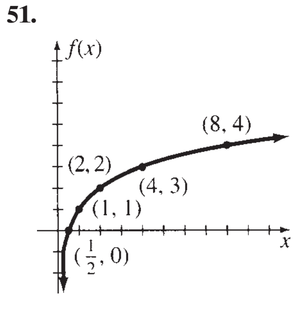
47.



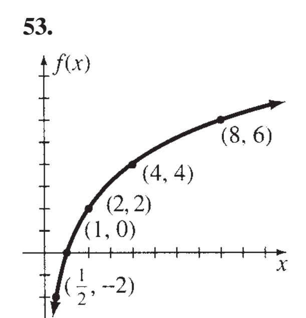
49.



51.



53.



55. 0.36 **57.** 0.73 **59.** 23.10 **61.** 7.93

Conjunto de problemas 10.6 (página 578)

1. {2.33} **3.** {2.56} **5.** {5.43} **7.** {4.18} **9.** {0.12}
11. {3.30} **13.** {4.57} **15.** {1.79} **17.** {3.32} **19.** {2.44}

21. {4} **23.** $\left\{\frac{19}{47}\right\}$ **25.** $\left\{\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$ **27.** {1}

29. {8} **31.** {1, 10 000} **33.** 5.322 **35.** 2.524 **37.** 0.339

39. −0.837 **41.** 3.194 **43.** 2.4 años **45.** 5.3 años

47. 5.9% **49.** 6.8 horas **51.** 6100 pies **53.** 3.5 horas
55. 6.7 **57.** Aproximadamente 8 veces **65.** {1.13}

67. $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Capítulo 10 Problemas de repaso (página 581)

1. 32 **2.** −125 **3.** 81 **4.** 3 **5.** −2 **6.** $\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{1}{4}$

8. −5 **9.** 1 **10.** 12 **11.** {5} **12.** $\left\{\frac{1}{9}\right\}$ **13.** $\left\{\frac{7}{2}\right\}$

14. {3.40} **15.** {8} **16.** $\left\{\frac{1}{11}\right\}$ **17.** {1.95} **18.** {1.41}

19. {1.56} **20.** {20} **21.** $\{10^{100}\}$ **22.** {2} **23.** $\left\{\frac{11}{2}\right\}$

24. {0} **25.** 0.3680 **26.** 1.3222 **27.** 1.4313 **28.** 0.5634

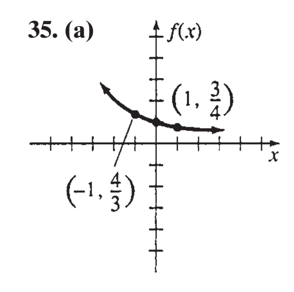
29. **(a)** $\log_b x - 2\log_b y$ **(b)** $\frac{1}{4}\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y$

(c) $\frac{1}{2}\log_b x - 3\log_b y$ **30.** **(a)** $\log_b x^3y^2$ **(b)** $\log_b\left(\frac{\sqrt{y}}{x^4}\right)$

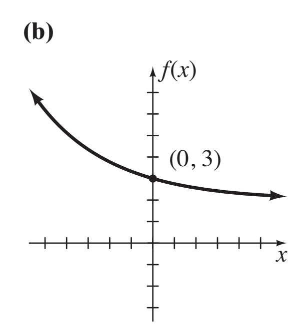
(c) $\log_b\left(\frac{\sqrt{xy}}{z^2}\right)$ **31.** 1.585 **32.** 0.631

33. 3.789 **34.** −2.120

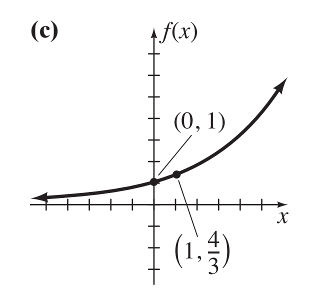
35. (a)



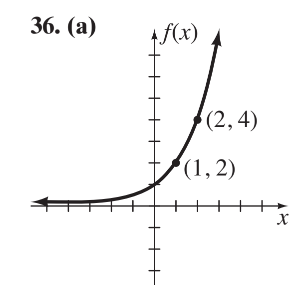
(b)



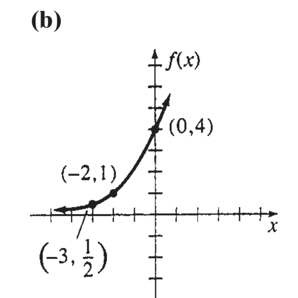
(c)



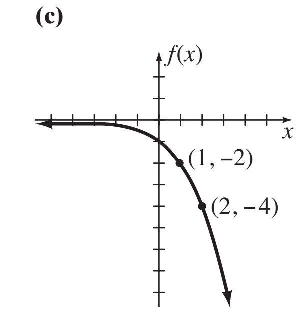
36. (a)



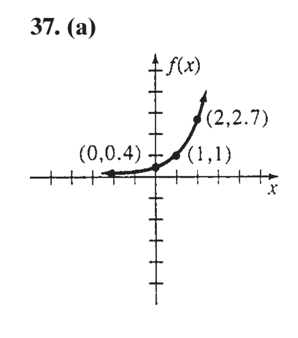
(b)



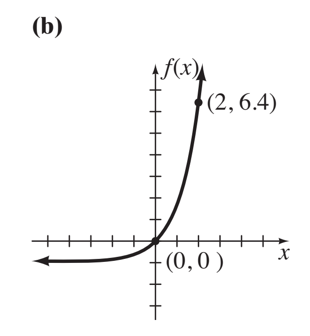
(c)



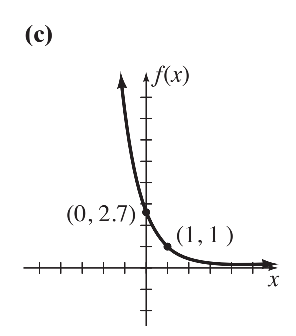
37. (a)



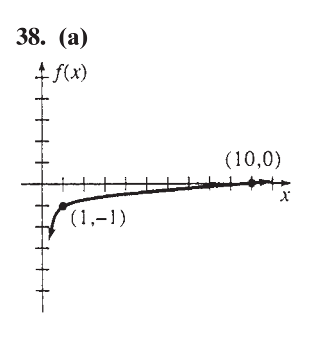
(b)



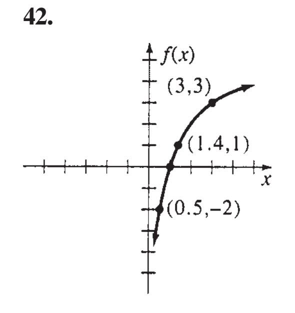
(c)



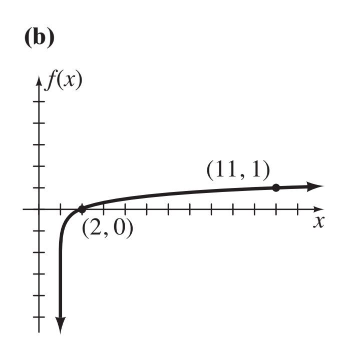
38. (a)



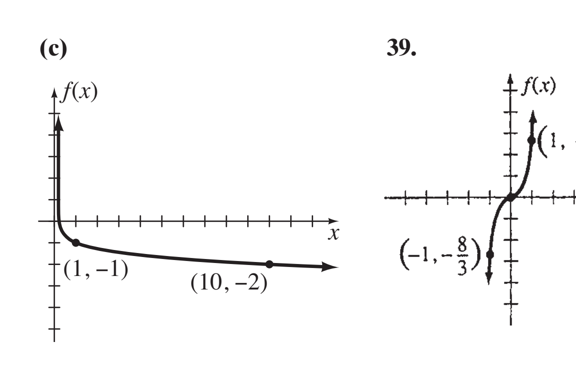
42.



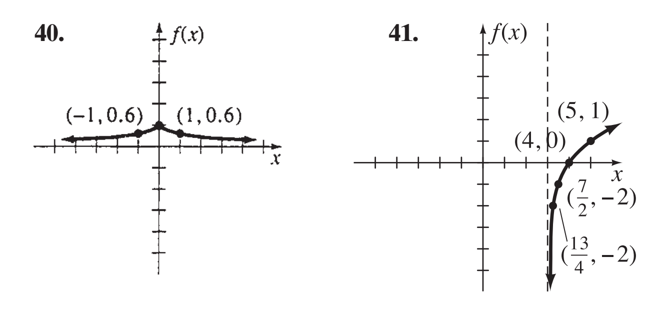
(b)



(c) **39.**



40. **41.**



43. \$2219.91 **44.** \$4797.55 **45.** \$15 999.31 **46.** Sí

47. No **48.** Sí **49.** Sí **50.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{4}$

51. $f^{-1}(x) = \dfrac{-x-7}{3}$ **52.** $f^{-1}(x) = \dfrac{6x+2}{5}$

53. $f^{-1}(x) = \sqrt{-2-x}$

54. Creciente sobre $(-\infty, 4]$ y decreciente sobre $[4, \infty)$

55. Creciente sobre $[3, \infty)$ **56.** Aproximadamente 5.3 años **57.** Aproximadamente 12.1 años
58. Aproximadamente 8.7%

59. 61 070; 67 493; 74 591 **60.** Aproximadamente 4.8 horas **61.** 133 gramos **62.** 8.1

Capítulo 10 Examen (página 584)

1. $\dfrac{1}{2}$ **2.** 1 **3.** 1 **4.** −1 **5.** {−3} **6.** $\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ **7.** $\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

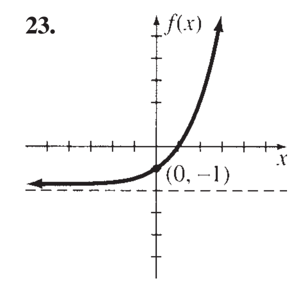
8. {243} **9.** {2} **10.** $\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$ **11.** 4.1919 **12.** 0.2031

13. 0.7325 **14.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-6-x}{3}$ **15.** {5.17}

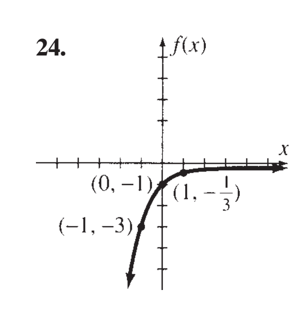
16. {10.29} **17.** 4.0069 **18.** $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{10}$

19. \$6342.08 **20.** 13.5 años **21.** 7.8 horas
22. 4813 gramos

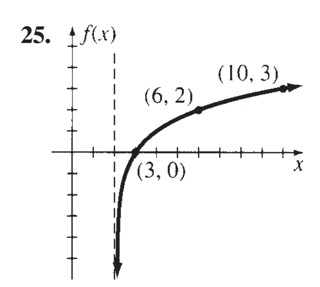
23.



24.



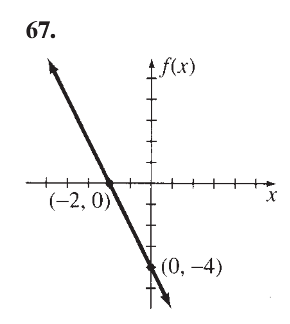
25.



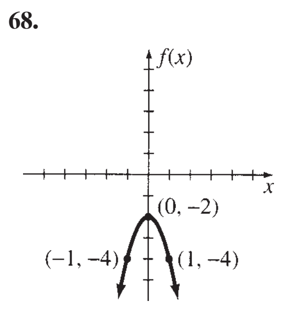
Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 585)

1. -6 **2.** -8 **3.** $\frac{13}{24}$ **4.** 56 **5.** $\frac{13}{6}$ **6.** $-90\sqrt{2}$
7. $2x + 5\sqrt{x} - 12$ **8.** $-18 + 22\sqrt{3}$
9. $2x^3 + 11x^2 - 14x + 4$ **10.** $\frac{x + 4}{x(x + 5)}$ **11.** $\frac{16x^2}{27y}$
12. $\frac{16x + 43}{90}$ **13.** $\frac{35a - 44b}{60a^2b}$ **14.** $\frac{2}{x - 4}$
15. $2x^2 - x - 4$ **16.** $\frac{5y^2 - 3xy^2}{x^2y + 2x^2}$ **17.** $\frac{2y - 3xy}{3x + 4xy}$
18. $\frac{(2n - 5)(n + 3)}{(n - 2)(3n + 13)}$ **19.** $\frac{3a^2 - 2a + 1}{2a - 1}$
20. $(5x - 2)(4x + 3)$ **21.** $2(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
22. $(2x + 3)(2x - 3)(x + 2)(x - 2)$
23. $4x(3x + 2)(x - 5)$ **24.** $(y - 6)(x + 3)$
25. $(5 - 3x)(2 + 3x)$ **26.** $\frac{81}{16}$ **27.** 4 **28.** $-\frac{3}{4}$
29. -0.3 **30.** $\frac{1}{81}$ **31.** $\frac{21}{16}$ **32.** $\frac{9}{64}$ **33.** 72 **34.** 6
35. -2 **36.** $\frac{-12}{x^3y}$ **37.** $\frac{8y}{x^5}$ **38.** $-\frac{a^3}{9b}$ **39.** $4\sqrt{5}$
40. $-6\sqrt{6}$ **41.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ **42.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **43.** $2\sqrt[3]{7}$ **44.** $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$
45. $8xy\sqrt{13x}$ **46.** $\frac{\sqrt{6xy}}{3y}$ **47.** $11\sqrt{6}$ **48.** $-\frac{169\sqrt{2}}{12}$
49. $-16\sqrt[3]{3}$ **50.** $\frac{-3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2}$
51. $\frac{6\sqrt{15} - 3\sqrt{35} - 6 + \sqrt{21}}{5}$ **52.** 0.021 **53.** 300
54. 0.0003 **55.** $32 + 22i$ **56.** $-17 + i$ **57.** $0 - \frac{5}{4}i$
58. $-\frac{19}{53} + \frac{40}{53}i$ **59.** $-\frac{10}{3}$ **60.** $\frac{4}{7}$ **61.** $2\sqrt{13}$
62. $5x - 4y = 19$ **63.** $4x + 3y = -18$
64. $(-2, 6)$ y $r = 3$ **65.** $(-5, -4)$ **66.** 8 unidades

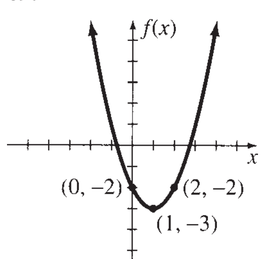
67.



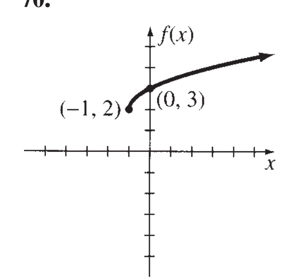
68.



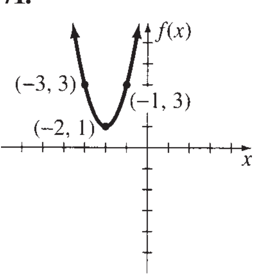
69.



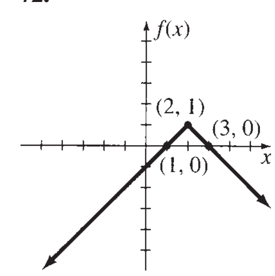
70.



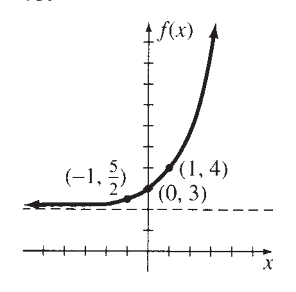
71.



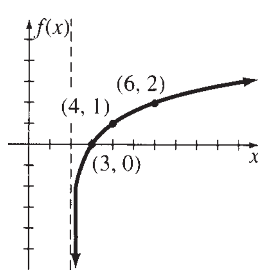
72.



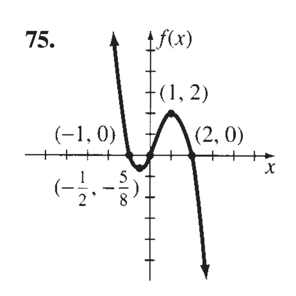
73.



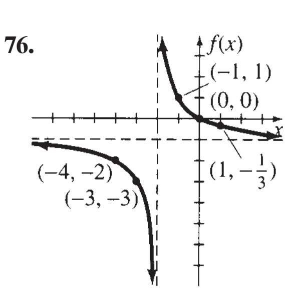
74.



75.



76.



77. $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 13x + 20; (f \circ g)(x) = 2x^2 - x - 4$

78. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3}$ **79.** $f^{-1}(x) = -2x + \dfrac{4}{3}$

80. $k = -3$ **81.** $y = 1$ **82.** 12 centímetros cúbicos

83. $\left\{-\dfrac{21}{16}\right\}$ **84.** $\left\{\dfrac{40}{3}\right\}$ **85.** $\{6\}$ **86.** $\left\{-\dfrac{5}{2}, 3\right\}$

87. $\left\{0, \dfrac{7}{3}\right\}$ **88.** $\{-6, 0, 6\}$ **89.** $\left\{-\dfrac{5}{6}, \dfrac{2}{5}\right\}$

90. $\left\{-3, 0, \dfrac{3}{2}\right\}$ **91.** $\{\pm 1, \pm 3i\}$ **92.** $\{-5, 7\}$ **93.** $\{-29, 0\}$

94. $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$ **95.** $\{12\}$ **96.** $\{-3\}$ **97.** $\left\{\dfrac{1 \pm 3\sqrt{5}}{3}\right\}$

98. $\left\{\dfrac{-5 \pm 4i\sqrt{2}}{2}\right\}$ **99.** $\left\{\dfrac{3 \pm i\sqrt{23}}{4}\right\}$

100. $\left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\right\}$ **101.** $\{1 \pm \sqrt{34}\}$

102. $\left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ **103.** $\left\{\dfrac{-5 \pm i\sqrt{15}}{4}\right\}$

104. $\{-4, 1, 7\}$ **105.** $\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{3}, 2\right\}$ **106.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

107. $\{81\}$ **108.** $\{4\}$ **109.** $\{6\}$ **110.** $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

111. $(-\infty, 3)$ **112.** $(-\infty, 50]$

113. $\left(-\infty, -\dfrac{11}{5}\right) \cup (3, \infty)$ **114.** $\left(-\dfrac{5}{3}, 1\right)$

115. $\left[-\dfrac{9}{11}, \infty\right)$ **116.** $[-4, 2]$

117. $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup (4, \infty)$ **118.** $(-8, 3)$

119. $(-\infty, 3] \cup (7, \infty)$ **120.** $(-6, -3)$

121. 17, 19 y 21

122. 14 monedas de 5 centavos, 20 monedas de 10 centavos y 29 monedas de 25 centavos

123. 48° y 132° **124.** \$600

125. \$1700 a 8% y \$2000 a 9%

126. 66 millas por hora y 76 millas por hora

127. 4 cuartos **128.** 69 o menos **129.** −3, 0 o 3

130. Tira de 1 pulgada **131.** \$1050 y \$1400

132. 3 horas

133. 30 acciones a \$10 por acción **134.** 37

135. 10°, 60° y 110°

CAPÍTULO 11

Conjunto de problemas 11.1 (página 598)

1. $\{(3, 2)\}$ **3.** $\{(2, 1)\}$ **5.** Dependiente **7.** $\{(4, -3)\}$

9. Inconsistente **11.** $\{(7, 9)\}$ **13.** $\{(-4, 7)\}$ **15.** $\{(6, 3)\}$

17. $a = -3$ y $b = -4$

19. $\left\{\left(k, \dfrac{2}{3}k - \dfrac{4}{3}\right)\right\}$, un sistema dependiente

21. $u = 5$ y $t = 7$ **23.** $\{(2, -5)\}$

25. $\varnothing$, un sistema inconsistente **27.** $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{6}{5}\right)\right\}$

29. $\{(3, -4)\}$ **31.** $\{(2, 8)\}$ **33.** $\{(-1, -5)\}$

35. $\varnothing$, un sistema inconsistente **37.** $a = 2$ y $b = -\dfrac{1}{3}$

39. $s = -6$ y $t = 12$ **41.** $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)\right\}$

43. $\left\{\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ **45.** $\{(-4, 2)\}$ **47.** $\{(5, 5)\}$

49. $\varnothing$, un sistema dependiente **51.** $\{(12, -24)\}$

53. $t = 8$ y $u = 3$ **55.** $\{(200, 800)\}$ **57.** $\{(400, 800)\}$

59. $\{(3.5, 7)\}$ **61.** 17 y 36 **63.** 15°, 75° **65.** 72

67. 34 **69.** 8 habitaciones sencillas y 15 habitaciones dobles

71. 2500 boletos de estudiante y 500 boletos no de estudiante

73. \$500 a 9% y \$1500 a 11%

75. 3 millas por hora

77. \$1.25 por pelota de tenis y \$1.75 por bola de golf

79. 30 billetes de cinco dólares y 18 billetes de diez dólares

85. $\{(4, 6)\}$ **87.** $\{(2, -3)\}$ **89.** $\left\{\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{2}{3}\right)\right\}$

Conjunto de problemas 11.2 (página 608)

1. $\{(-4, -2, 3)\}$ **3.** $\{(-2, 5, 2)\}$ **5.** $\{(4, -1, -2)\}$

7. $\{(3, 1, 2)\}$ **9.** $\{(-1, 3, 5)\}$ **11.** $\{(-2, -1, 3)\}$

13. $\{(0, 2, 4)\}$ **15.** $\{(4, -1, -2)\}$ **17.** $\{(-4, 0, -1)\}$

19. $\{(2, 2, -3)\}$

21. 4 libras de pacanas, 4 libras de almendras y 12 libras de cacahuates

23. 7 monedas de 5 centavos, 13 monedas de 10 centavos y 22 monedas de 25 centavos

25. 40°, 60° y80°

27. \$500 a 12%, \$1000 a 13% y \$1500 a 14%

29. 50 de tipo A, 75 de tipo B y 150 de tipo C

Conjunto de problemas 11.3 (página 618)

1. Sí **3.** Sí **5.** No **7.** No **9.** Sí **11.** $\{(-1, -5)\}$

13. $\{(3, -6)\}$ **15.** $\varnothing$ **17.** $\{(-2, -9)\}$

19. $\{(-1, -2, 3)\}$

21. $\{(3, -1, 4)\}$ **23.** $\{(0, -2, 4)\}$
25. $\{(-7k + 8, -5k + 7, k)\}$ **27.** $\{(-4, -3, -2)\}$
29. $\{(4, -1, -2)\}$ **31.** $\{(1, -1, 2, -3)\}$
33. $\{(2, 1, 3, -2)\}$ **35.** $\{(-2, 4, -3, 0)\}$
37. $\varnothing$ **39.** $\{(-3k + 5, -1, -4k + 2, k)\}$
41. $\{(-3k + 9, k, 2, -3)\}$
45. $\{(17k - 6, 10k - 5, k)\}$
47. $\left\{\left(-\frac{1}{2}k + \frac{34}{11}, \frac{1}{2}k - \frac{5}{11}, k\right)\right\}$ **49.** $\varnothing$

Conjunto de problemas 11.4 (página 627)

1. 22 **3.** -29 **5.** 20 **7.** 5 **9.** -2 **11.** $-\frac{2}{3}$ **13.** -25
15. 58 **17.** 39 **19.** -12 **21.** -41 **23.** -8 **25.** 1088
27. -140 **29.** 81 **31.** 146 **33.** Propiedad 11.3
35. Propiedad 11.2 **37.** Propiedad 11.4
39. Propiedad 11.3 **41.** Propiedad 11.5

Conjunto de problemas 11.5 (página 635)

1. $\{(1, 4)\}$ **3.** $\{(3, -5)\}$ **5.** $\{(2, -1)\}$ **7.** $\varnothing$
9. $\left\{\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ **11.** $\left\{\left(\frac{2}{17}, \frac{52}{17}\right)\right\}$ **13.** $\{(9, -2)\}$
15. $\left\{\left(2, -\frac{5}{7}\right)\right\}$ **17.** $\{(0, 2, -3)\}$ **19.** $\{(2, 6, 7)\}$
21. $\{(4, -4, 5)\}$ **23.** $\{(-1, 3, -4)\}$
25. Infinitas soluciones **27.** $\left\{\left(-2, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$
29. $\left\{\left(3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$ **31.** $(-4, 6, 0)$ **37.** $(0, 0, 0)$
39. Infinitas soluciones

Conjunto de problemas 11.6 (página 642)

1. $\frac{4}{x-2} + \frac{7}{x+1}$ **3.** $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x-1}$
5. $\frac{1}{3x-1} + \frac{6}{2x+3}$ **7.** $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3}$
9. $\frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{4x+1}$ **11.** $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$
13. $\frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x+3}$ **15.** $\frac{-3}{x^2+1} - \frac{2}{x-4}$
17. $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$
19. $\frac{2}{x} + \frac{3x+5}{x^2-x+3}$ **21.** $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3-x}{(x^2+1)^2}$

Capítulo 11 Conjunto de problemas de repaso (página 644)

1. $\{(3, -7)\}$ **2.** $\{(-1, -3)\}$ **3.** $\{(0, -4)\}$
4. $\left\{\left(\frac{23}{3}, -\frac{14}{3}\right)\right\}$ **5.** $\{(4, -6)\}$ **6.** $\left\{\left(-\frac{6}{7}, -\frac{15}{7}\right)\right\}$
7. $\{(-1, 2, -5)\}$ **8.** $\{(2, -3, -1)\}$ **9.** $\{(5, -4)\}$
10. $\{(2, 7)\}$ **11.** $\{(-2, 2, -1)\}$ **12.** $\{(0, -1, 2)\}$
13. $\{(-3, -1)\}$ **14.** $\{(4, 6)\}$ **15.** $\{(2, -3, -4)\}$
16. $\{(-1, 2, -5)\}$ **17.** $\{(5, -5)\}$ **18.** $\{(-12, 12)\}$
19. $\left\{\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$ **20.** $\{(-10, -7)\}$ **21.** $\{(1, 1, -4)\}$
22. $\{(-4, 0, 1)\}$ **23.** $\varnothing$ **24.** $\{(-2, -4, 6)\}$ **25.** -34
26. 13 **27.** -40 **28.** 16 **29.** 51 **30.** 125 **31.** 72
32. \$900 a 10% y \$1600 a 12%
33. 20 monedas de 5 centavos, 32 monedas de 10 centavos y 54 monedas de 25 centavos
34. 25°, 45° y 110°

Capítulo 11 Examen (página 646)

1. III **2.** I **3.** III **4.** II **5.** 8 **6.** $-\frac{7}{12}$ **7.** -18
8. 112 **9.** Infinitas **10.** $\{(-2, 4)\}$ **11.** $\{(3, -1)\}$
12. $x = -12$ **13.** $y = -\frac{13}{11}$ **14.** $x = 14$ **15.** $y = 13$
16. Infinitas **17.** Ninguna **18.** $\left\{\left(\frac{11}{5}, 6, -3\right)\right\}$
19. $\{(-2, -1, 0)\}$ **20.** $x = 1$ **21.** $y = 4$ **22.** 2 litros
23. 22 cuartos **24.** 5 lotes de bollos de crema, 4 lotes de bombas de crema y 10 lotes de rollo danés
25. 100º, 45º y 35º

CAPÍTULO 12

Conjunto de problemas 12.1 (página 653)

1. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -2 & 21 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 19 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} -12 & -14 \\ -18 & -20 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$
13. $AB = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$
15. $AB = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ -4 & 42 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 19 & -39 \\ -16 & 18 \end{bmatrix}$
17. $AB = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
19. $AB = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -32 & -13 \end{bmatrix}$
21. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $AB = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ \frac{17}{6} & -3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{17}{6} \\ \frac{5}{3} & -3 \end{bmatrix}$

25. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. $AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

29. $AD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$, $DA = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

49. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}$

Conjunto de problemas 12.2 (página 660)

1. $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

7. No existe **9.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 30 \\ 36 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -4 \\ 13 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} -4 \\ -13 \end{bmatrix}$ **27.** $\{(2, 3)\}$

29. $\{(-2, 5)\}$ **31.** $\{(0, -1)\}$ **33.** $\{(-1, -1)\}$ **35.** $\{(4, 7)\}$

37. $\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ **39.** $\{(-9, 20)\}$

Conjunto de problemas 12.3 (página 668)

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ -7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 11 & -18 & 16 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 10 & -12 & 30 \\ -18 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

3. $[-1 \quad -7 \quad 13 \quad 7]$; $[5 \quad 5 \quad -5 \quad 17]$; $[-5 \quad -20 \quad 35 \quad 9]$; $[14 \quad 8 \quad -2 \quad 58]$

5. $\begin{bmatrix} 8 & -3 & -2 \\ 9 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 21 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -11 & 6 & -11 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 21 & -7 & -7 \\ 28 & 2 & 2 \\ 21 & 10 & 54 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -24 & 20 & -36 \\ -14 & 20 & 12 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 10 \\ 1 & -9 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & -4 \\ -11 & 1 \\ -16 & 13 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 27 \\ 8 & -23 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 14 & -2 \\ -32 & -6 \\ -46 & 48 \end{bmatrix}$

9. $AB = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 14 \\ 4 & -16 & 8 \\ -28 & 22 & -36 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -20 & 21 \\ 8 & -21 \end{bmatrix}$

11. $AB = \begin{bmatrix} 22 & -8 & 1 & 3 \\ -42 & 36 & -26 & -20 \end{bmatrix}$; BA no existe

13. $AB = \begin{bmatrix} -12 & 5 & -5 \\ 14 & -2 & 4 \\ -10 & 13 & -5 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 10 & -2 & 16 \\ -8 & 5 & -16 \end{bmatrix}$

15. $AB = [-9]$; $BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & -4 \\ -6 & 3 & -9 & -12 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ -8 & 4 & -12 & -16 \end{bmatrix}$

17. AB no existe; $BA = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \\ -30 \end{bmatrix}$

19. $AB = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$; BA no existe

21. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} -50 & -9 & 11 \\ -23 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

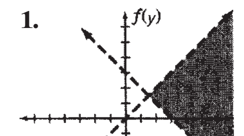
31. No existe **33.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 & -\frac{9}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ **37.** $\{(-3, 2)\}$ **39.** $\{(2, 5)\}$

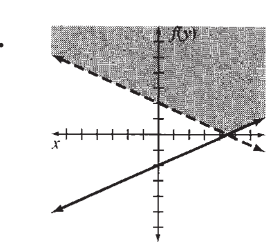
41. $\{(-1, -2, 1)\}$ **43.** $\{(-2, 3, 5)\}$ **45.** $\{(-4, 3, 0)\}$
47. (a) $\{(-1, 2, 3)\}$ **(c)** $\{(-5, 0, -2)\}$ **(e)** $\{(1, -1, -1)\}$

Conjunto de problemas 12.4 (página 678)

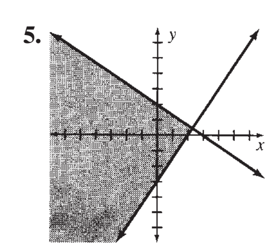
1.



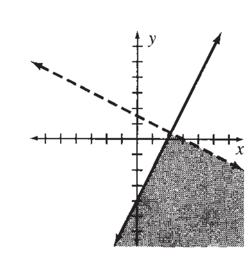
3.



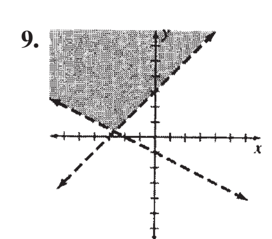
5.



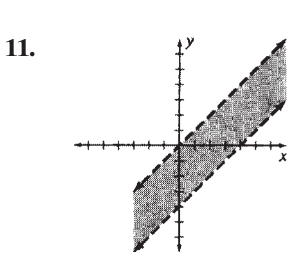
7.



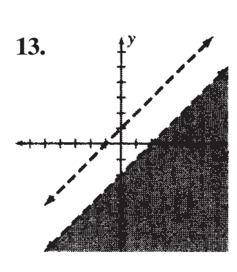
9.



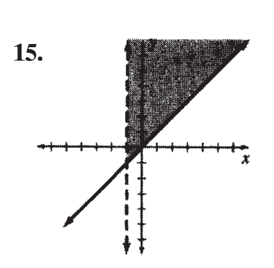
11.



13.

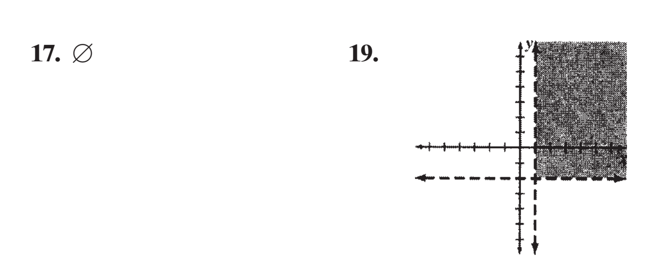


15.

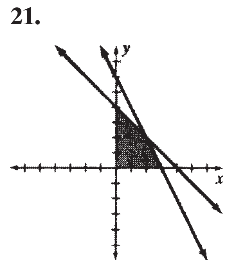


17. $\varnothing$

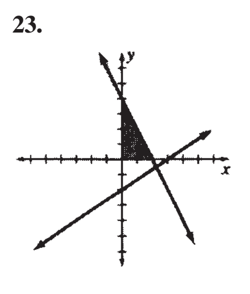
19.



21.



23.



25. Mínimo de 8 y máximo de 52

27. Mínimo de 0 y máximo de 28

29. 63 **31.** 340 **33.** 2 **35.** 98

37. \$5000 a 9% y \$5000 a 12%

39. 300 del tipo A y 200 del tipo B

41. 12 unidades de A y 16 unidades de B

Capítulo 12 Conjunto de problemas de repaso (página 683)

1. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 19 & -11 \\ -6 & 22 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -14 & 20 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -11 & -3 & 15 \\ 24 & 2 & -20 \\ -40 & -5 & 38 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 16 & -26 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 26 & -36 \\ -15 & 32 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} -27 \\ 26 \end{bmatrix}$

10. No existe **14.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **17.** No existe **18.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

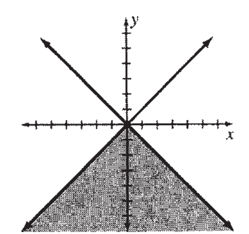
19. $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} \frac{39}{8} & -\frac{17}{8} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 8 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** No existe

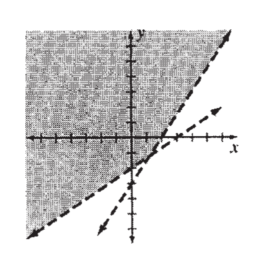
23. $\begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **24.** $\{(-2, 6)\}$ **25.** $\{(4, -1)\}$

26. $\{(2, -3, -1)\}$ **27.** $\{(-3, 2, 5)\}$ **28.** $\{(-4, 3, 4)\}$

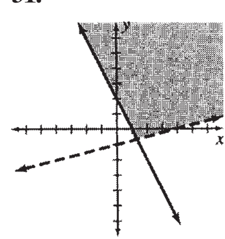
29.



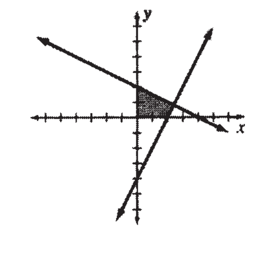
30.



31.



32.



33. 37 **34.** 56 **35.** 57 **36.** 1700

37. 75 un galón y 175 dos galones

Capítulo 12 Examen (página 685)

1. $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -11 & 13 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 11 \\ -4 & -5 & 18 \\ 37 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

4. No existe **5.** $\begin{bmatrix} -35 \\ 8 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -16 \\ 24 & 23 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -20 & 8 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 8 & 33 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -34 \\ 16 & -19 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

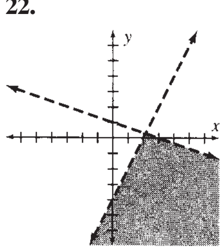
13. $\begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

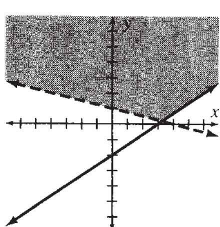
17. $\{(8, -12)\}$ **18.** $\{(-6, -14)\}$ **19.** $\{(9, 13)\}$

20. $\left\{\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)\right\}$ **21.** $\{(-1, 2, 1)\}$

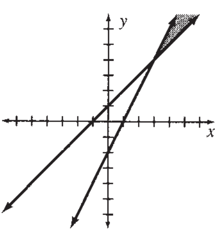
22.



23.



24.



25. 4050

CAPÍTULO 13

Conjunto de problemas 13.1 (página 693)

1. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

3. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$

5. $x^2 + y^2 - 6x = 0$ **7.** $x^2 + y^2 = 49$

9. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ y

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$

11. $x^2 + y^2 + 12x + 12y + 36 = 0$

13. $x^2 + y^2 - 8x + 4\sqrt{3}y + 12 = 0$ y
$x^2 + y^2 - 8x - 4\sqrt{3}y + 12 = 0$

15. $(5, 7)$; $r = 5$ **17.** $(-1, -8)$; $r = 2\sqrt{3}$

19. $(10, -5)$; $r = \sqrt{3}$

21. $(3, 5)$, $r = 2$ **23.** $(-5, -7)$, $r = 1$ **25.** $(5, 0)$, $r = 5$

27. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$ **29.** $(0, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$

31. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $r = 2$ **33.** $6x + 5y = 29$

35. $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

37. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ y

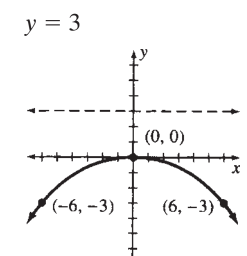
$x^2 + y^2 + 20x - 20y + 100 = 0$

39. $x + 2y = 7$ **41.** $x^2 + y^2 + 12x + 2y - 21 = 0$

Conjunto de problemas 13.2 (página 702)

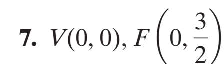
1. $V(0, 0)$, $F(2, 0)$, $x = -2$

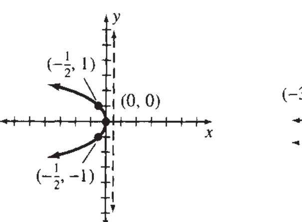
3. $V(0, 0)$, $F(0, -3)$, $y = 3$

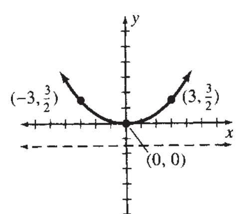


5. $V(0, 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x = \frac{1}{2}$

7. $V(0, 0)$, $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $y = -\frac{3}{2}$

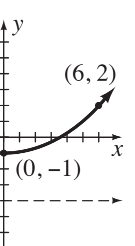


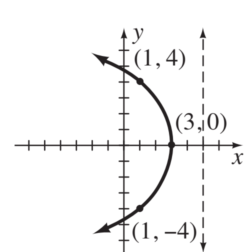




9. $V(0, -1)$, $F(0, 2)$, $y = -4$

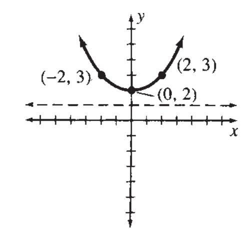
11. $V(3, 0)$, $F(1, 0)$, $x = 5$

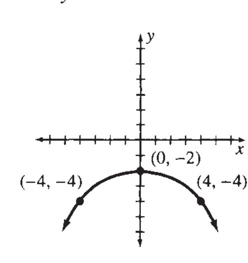




13. $V(0, 2)$, $F(0, 3)$, $y = 1$

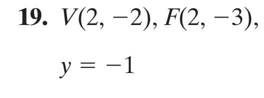
15. $V(0, -2)$, $F(0, -4)$, $y = 0$

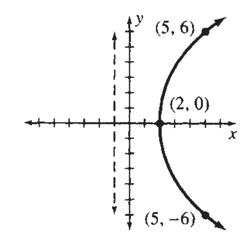


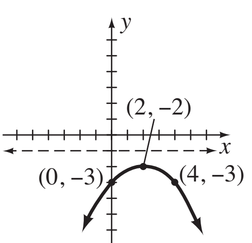


17. $V(2, 0)$, $F(5, 0)$, $x = -1$

19. $V(2, -2)$, $F(2, -3)$, $y = -1$

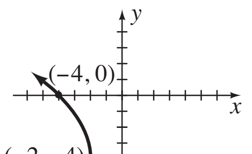


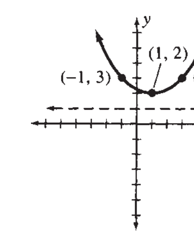




21. $V(-2, -4)$, $F(-4, -4)$, $x = 0$

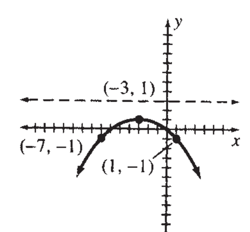
23. $V(1, 2)$, $F(1, 3)$, $y = 1$

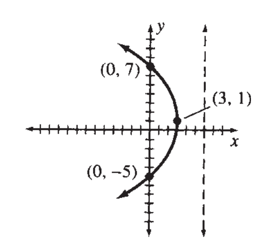




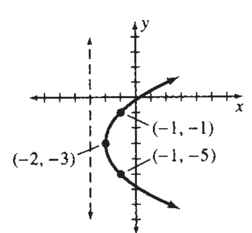
25. $V(-3, 1)$, $F(-3, -1)$, $y = 3$

27. $V(3, 1)$, $F(0, 1)$, $x = 6$





29. $V(-2, -3)$, $F(-1, -3)$, $x = -3$



31. $x^2 = 12y$ **33.** $y^2 = -4x$ **35.** $x^2 + 12y - 48 = 0$

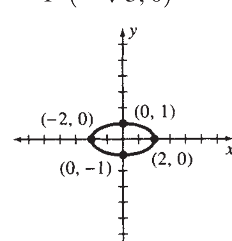
37. $x^2 - 6x - 12y + 21 = 0$ **39.** $y^2 - 10y + 8x + 41 = 0$

41. $y^2 = \frac{-25}{3}x$ **43.** $y^2 = 10x$
45. $x^2 - 14x - 8y + 73 = 0$ **47.** $y^2 + 6y - 12x + 105 = 0$
49. $x^2 + 18x + y + 80 = 0$ **51.** $x^2 = 750(y - 10)$
53. $10\sqrt{2}$ pies **55.** 62.5 pies

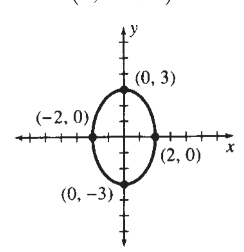
Conjunto de problemas 13.3 (página 712)

Para los problemas 1-21, los focos se indican arriba de la gráfica, y los vértices y puntos finales del eje menor se indican sobre la gráfica.

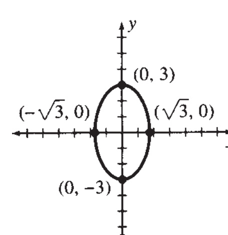
1. $F(\sqrt{3}, 0)$, $F'(-\sqrt{3}, 0)$



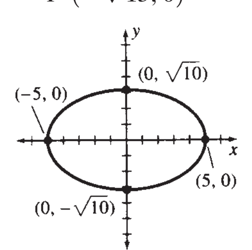
3. $F(0, \sqrt{5})$, $F'(0, -\sqrt{5})$



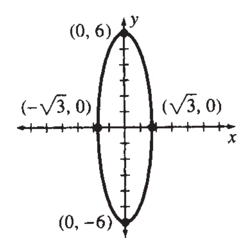
5. $F(0, \sqrt{6})$ $F'(0, -\sqrt{6})$



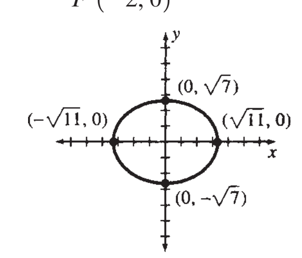
7. $F(\sqrt{15}, 0)$ $F'(-\sqrt{15}, 0)$



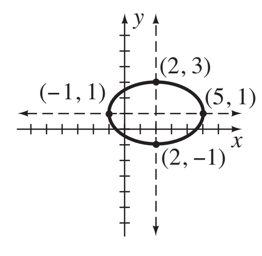
9. $F(0, \sqrt{33})$ $F'(0, -\sqrt{33})$



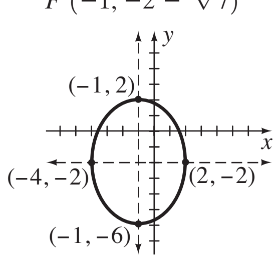
11. $F(2, 0)$ $F'(-2, 0)$



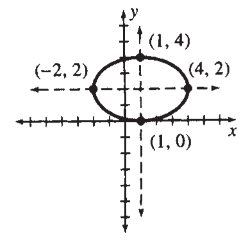
13. $F(2 + \sqrt{5}, 1)$ $F'(2 - \sqrt{5}, 1)$



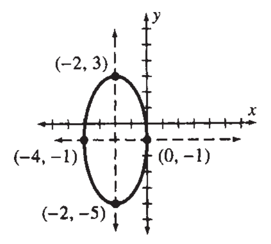
15. $F(-1, -2 + \sqrt{7})$ $F'(-1, -2 - \sqrt{7})$



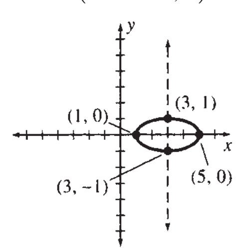
17. $F(1 + \sqrt{5}, 2)$ $F'(1 - \sqrt{5}, 2)$



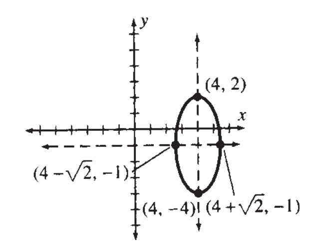
19. $F(-2, -1 + 2\sqrt{3})$ $F'(-2, -1 - 2\sqrt{3})$

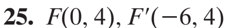


21. $F(3 + \sqrt{3}, 0)$ $F'(3 - \sqrt{3}, 0)$

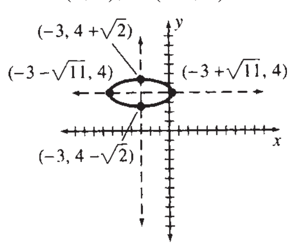


23. $F(4, -1 + \sqrt{7})$ $F'(4, -1 - \sqrt{7})$





25. $F(0, 4)$, $F'(-6, 4)$



27. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **29.** $36x^2 + 11y^2 = 396$

31. $x^2 + 9y^2 = 9$ **33.** $100x^2 + 36y^2 = 225$

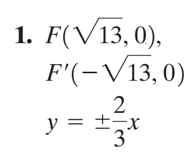
35. $7x^2 + 3y^2 = 75$ **37.** $3x^2 - 6x + 4y^2 - 8y - 41 = 0$

39. $9x^2 + 25y^2 - 50y - 200 = 0$ **41.** $3x^2 + 4y^2 = 48$

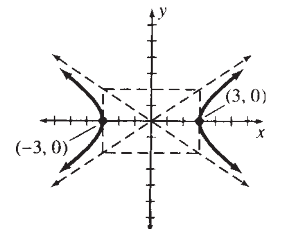
43. $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ pies

Conjunto de problemas 13.4 (página 722)

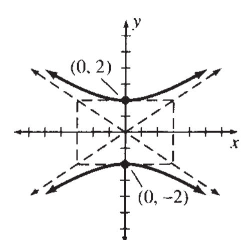
Para los problemas 1-22, los focos y ecuaciones de las asíntotas se indican arriba de las gráficas. Los vértices se dan sobre las gráficas.



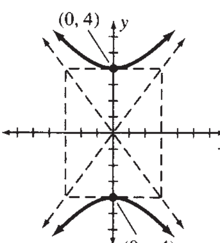
1. $F(\sqrt{13}, 0)$, $F'(-\sqrt{13}, 0)$, $y = \pm\frac{2}{3}x$

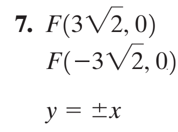


3. $F(0, \sqrt{13})$, $F'(0, -\sqrt{13})$, $y = \pm\frac{2}{3}x$

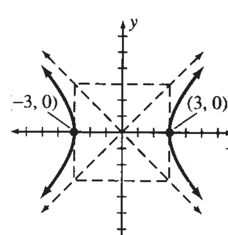


5. $F(0, 5)$, $F(0, -5)$, $y = \pm\frac{4}{3}$



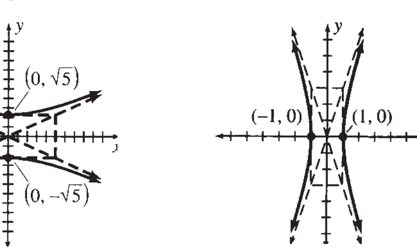


7. $F(3\sqrt{2}, 0)$, $F(-3\sqrt{2}, 0)$, $y = \pm x$

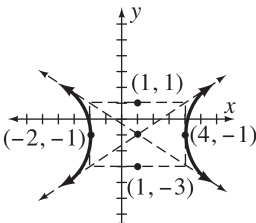


9. $F(0, \sqrt{30})$, $F(0, -\sqrt{30})$, $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

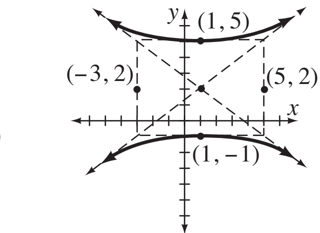
11. $F(\sqrt{10}, 0)$, $F'(-\sqrt{10}, 0)$, $y = \pm 3x$

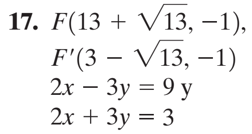


13. $F(1 - \sqrt{13}, -1)$, $F'(1 - \sqrt{13}, -1)$, $2x - 3y = 5$ y $2x + 3y = -1$

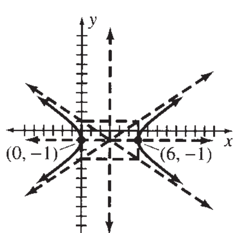


15. $F(1, 7)$, $F'(1, -3)$, $3x - 4y = -5$ y $3x + 4y = 11$

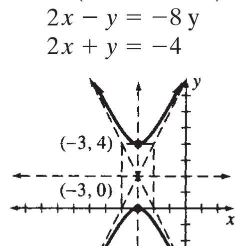




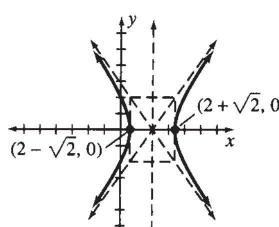
17. $F(13 + \sqrt{13}, -1)$, $F'(3 - \sqrt{13}, -1)$, $2x - 3y = 9$ y $2x + 3y = 3$

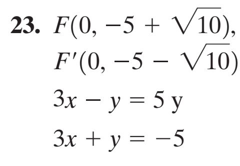


19. $F(-3, 2 + \sqrt{5})$, $F'(-3, 2 - \sqrt{5})$, $2x - y = -8$ y $2x + y = -4$

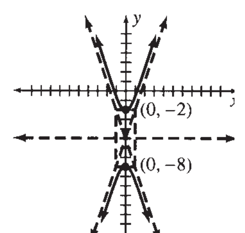


21. $F(2 + \sqrt{6}, 0)$, $F'(2 - \sqrt{6}, 0)$, $\sqrt{2}x - y = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}x + y = 2\sqrt{2}$

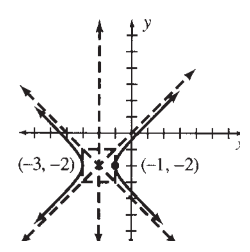




23. $F(0, -5 + \sqrt{10})$, $F'(0, -5 - \sqrt{10})$, $3x - y = 5$ y $3x + y = -5$



25. $F(-2 + \sqrt{2}, -2)$, $F'(-2 - \sqrt{2}, -2)$, $x - y = 0$ y $x + y = -4$

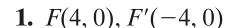


27. $5x^2 - 4y^2 = 20$ **29.** $16y^2 - 9x^2 = 144$
31. $3x^2 - y^2 = 3$ **33.** $4y^2 - 3x^2 = 12$ **35.** $7x^2 - 16y^2 = 112$
37. $5x^2 - 40x - 4y^2 - 24y + 24 = 0$
39. $3y^2 - 30y - x^2 - 6x + 54 = 0$
41. $5x^2 - 20x - 4y^2 = 0$ **43.** Círculo **45.** Línea recta
47. Elipse **49.** Hipérbola **51.** Parábola

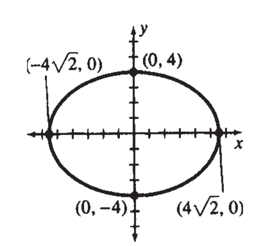
Conjunto de problemas 13.5 (página 729)

1. $\{(1, 2)\}$ **3.** $\{(1, -5), (-5, 1)\}$
5. $\{(2 + i\sqrt{3}, -2 + i\sqrt{3}), (2 - i\sqrt{3}, -2 - i\sqrt{3})\}$
7. $\{(-6, 7), (-2, -1)\}$ **9.** $\{(-3, 4)\}$
11. $\left\{\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-7 - i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-7 + i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$
13. $\{(-1, 2)\}$ **15.** $\{(-6, 3), (-2, -1)\}$ **17.** $\{(5, 3)\}$
19. $\{(1, 2,), (-1, 2)\}$ **21.** $\{(-3, 2)\}$ **23.** $\{(2, 0), (-2, 0)\}$
25. $\{(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})\}$
27. $\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$
29. $\left\{\left(2, \dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)\right\}$ **31.** $\{(9, -2)\}$ **33.** $\{(\ln 2, 1)\}$
35. $\left\{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right), (-3, -27)\right\}$ **43.** $\{(-2.3, 7.4)\}$
45. $\{(6.7, 1.7), (9.5, 2.1)\}$ **47.** Ninguno

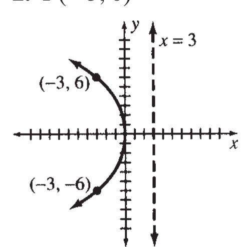
Capítulo 13 Conjunto de problemas de repaso (página 732)



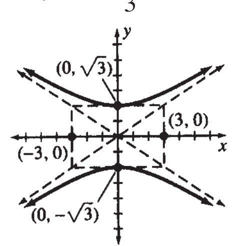
1. $F(4, 0), F'(-4, 0)$



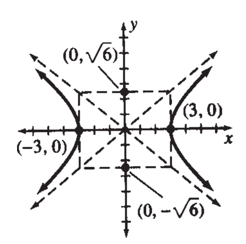
2. $F(-3, 0)$



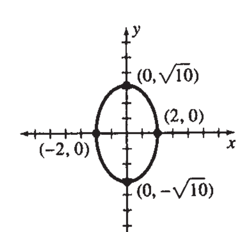
3. $F(0, 2\sqrt{3})$, $F'(0, -2\sqrt{3})$
$y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$



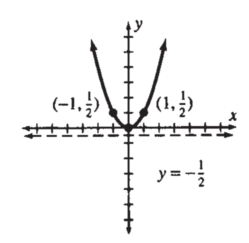
4. $F(\sqrt{15}, 0)$, $F'(-\sqrt{15}, 0)$
$y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$



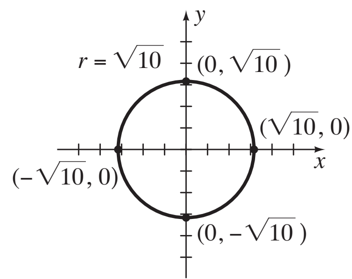
5. $F(0, \sqrt{6})$, $F'(0, -\sqrt{6})$



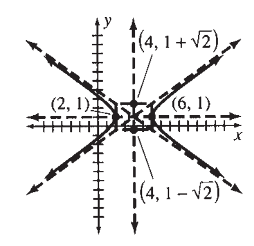
6. $F\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$



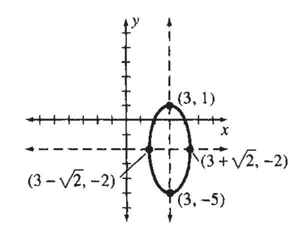
7.



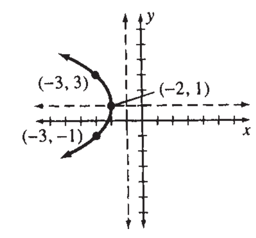
8. $F(4 + \sqrt{6}, 1), F'(4 - \sqrt{6}, 1)$
$\sqrt{2}x - 2y = 4\sqrt{2} - 2$ y $\sqrt{2}x + 2y = 4\sqrt{2} + 2$

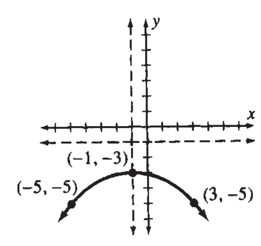


9. $F(3, -2 + \sqrt{7}), F'(3, -2 - \sqrt{7})$

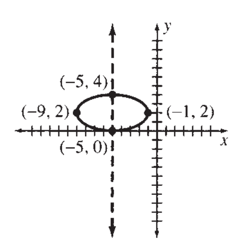


10. $F(-3, 1), x = -1$ **11.** $F(-1, -5), y = -1$

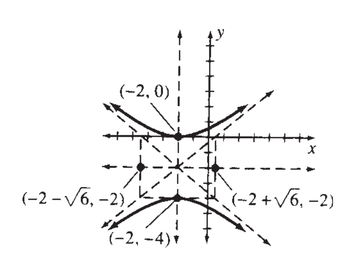




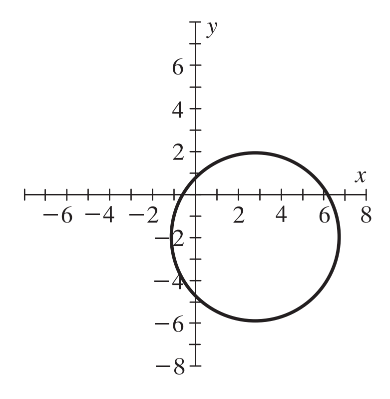
12. $F(-5 + 2\sqrt{3}, 2), F'(-5 - 2\sqrt{3}, 2)$



13. $F(-2, -2 + \sqrt{10}), F'(-2, -2 - \sqrt{10})$
$\sqrt{6}x - 3y = 6 - 2\sqrt{6}$ y $\sqrt{6}x + 3y = -6 - 2\sqrt{6}$



14. Centro en $(3, -2)$ y $r = 4$



15. $x^2 + 16x + y^2 - 6y + 68 = 0$ **16.** $y^2 = -20x$

17. $16x^2 + y^2 = 16$ **18.** $25x^2 - 2y^2 = 50$

19. $x^2 - 10x + y^2 + 24y = 0$ **20.** $4x^2 + 3y^2 = 16$

21. $x^2 = \frac{2}{3}y$ **22.** $9y^2 - x^2 = 9$

23. $9x^2 - 108x + y^2 - 8y + 331 = 0$

24. $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$

25. $3y^2 + 24y - x^2 - 10x + 20 = 0$

26. $x^2 + 12x - y + 33 = 0$ **27.** $4x^2 + 40x + 25y^2 = 0$

28. $4x^2 - 32x - y^2 + 48 = 0$ **29.** $\{(-1, 4)\}$ **30.** $\{(3, 1)\}$

31. $\{(-1, -2), (-2, -3)\}$

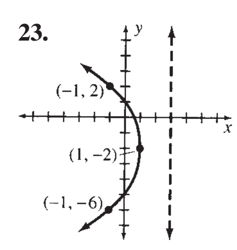
32. $\left\{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}i\right), \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{3}i\right), \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}i\right), \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{3}i\right)\right\}$ **33.** $\{(0, 2), (0, -2)\}$

34. $\left\{\left(\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$

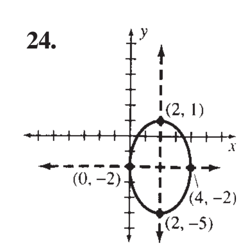
Capítulo 13 Examen (página 733)

1. $(0, -5)$ **2.** $(-3, 2)$ **3.** $x = -3$
4. $(6, 0)$ **5.** $(-2, -1)$ **6.** $(-3, -9)$
7. $y^2 + 8x = 0$ **8.** $x^2 - 6x + 12y - 39 = 0$
9. $x^2 + 2x + y^2 - 12y + 12 = 0$ **10.** 6 unidades
11. $(-7, 1)$ y $(-3, 1)$ **12.** $(-2\sqrt{3}, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 0)$
13. $(-5, 8)$ **14.** $25x^2 + 9y^2 = 900$
15. $x^2 - 12x + 4y^2 + 16y + 36 = 0$ **16.** $y = \pm\frac{3}{2}x$
17. $(-1, 6)$ y $(-1, 0)$ **18.** $(\pm 3, 0)$ **19.** $x^2 - 3y^2 = 36$
20. $8x^2 + 16x - y^2 + 8y - 16 = 0$ **21.** 2
22. $\left\{(3, 2), (-3, -2), \left(4, \frac{3}{2}\right), \left(-4, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

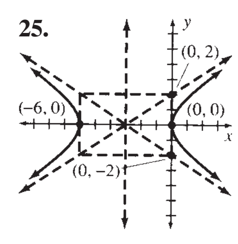
23.



24.



25.



CAPÍTULO 14

Conjunto de problemas 14.1 (página 741)

1. $-4, -1, 2, 5, 8$ **3.** $2, 0, -2, -4, -6$ **5.** $2, 11, 26, 47, 74$
7. $0, 2, 6, 12, 20$ **9.** $4, 8, 16, 32, 64$
11. $a_{15} = -79; a_{30} = -154$ **13.** $a_{25} = 1; a_{50} = -1\frac{15}{16}$
15. $2n + 9$ **17.** $-3n + 5$ **19.** $\frac{n+2}{2}$ **21.** $4n - 2$
23. $-3n$ **25.** 73 **27.** 334 **29.** 35 **31.** 7 **33.** 86
35. 2700 **37.** 3200 **39.** -7950 **41.** 637.5 **43.** 4950
45. 1850 **47.** -2030 **49.** 3591 **51.** 40 000 **53.** 58 250
55. 2205 **57.** -1325 **59.** 5265 **61.** -810 **63.** 1276
65. 660 **67.** 55 **69.** 431 **75.** 3, 3, 7, 7, 11, 11
77. 4, 7, 10, 13, 17, 21 **79.** 4, 12, 36, 108, 324, 972
81. 1, 1, 2, 3, 5, 8 **83.** 3, 1, 4, 9, 25, 256

Conjunto de problemas 14.2 (página 750)

1. $3(2)^{n-1}$ **3.** 3^n **5.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ **7.** 4^n **9.** $(0.3)^{n-1}$
11. $(-2)^{n-1}$ **13.** 64 **15.** $\frac{1}{9}$ **17.** -512 **19.** $\frac{1}{4374}$
21. $\frac{2}{3}$ **23.** 2 **25.** 1023 **27.** 19 682 **29.** $394\frac{1}{16}$
31. 1364 **33.** 1089 **35.** $7\frac{511}{512}$ **37.** -547 **39.** $127\frac{3}{4}$
41. 540 **43.** $2\frac{61}{64}$ **45.** 4 **47.** 3 **49.** No tiene suma **51.** $\frac{27}{4}$
53. 2 **55.** $\frac{16}{3}$ **57.** $\frac{1}{3}$ **59.** $\frac{26}{99}$ **61.** $\frac{41}{333}$ **63.** $\frac{4}{15}$
65. $\frac{106}{495}$ **67.** $\frac{7}{3}$

Conjunto de problemas 14.3 (página 756)

1. \$24 200 **3.** 11 550 **5.** 7320 **7.** 125 litros
9. 512 galones **11.** \$116.25 **13.** \$163.84; \$327.67
15. \$24 900 **17.** 1936 pies **19.** $\frac{15}{16}$ de un gramo
21. 2910 pies **23.** 325 logs **25.** 5.9%
27. $\frac{1}{64}$ de un galón

Conjunto de problemas 14.4 (página 763)

Estos problemas requieren una prueba por inducción matemática y necesitan discutirse en clase.

Capítulo 14 Conjunto de problemas de repaso (página 765)

1. $6n - 3$ **2.** 3^{n-2} **3.** $5(2^n)$ **4.** $-3n + 8$ **5.** $2n - 7$
6. 3^{3-n} **7.** $-(-2)^{n-1}$ **8.** $3n + 9$ **9.** $\frac{n+1}{3}$ **10.** 4^{n-1}
11. 73 **12.** 106 **13.** $\frac{1}{32}$ **14.** $\frac{4}{9}$ **15.** -92 **16.** $\frac{1}{16}$
17. -5 **18.** 85 **19.** $\frac{5}{9}$ **20.** 2 o -2 **21.** $121\frac{40}{81}$
22. 7035 **23.** $-10\,725$ **24.** $31\frac{31}{32}$ **25.** 32 015 **26.** 4757
27. $85\frac{21}{64}$ **28.** 37 044 **29.** 12 726 **30.** -1845
31. 225 **32.** 255 **33.** 8244 **34.** $85\frac{1}{3}$ **35.** $\frac{4}{11}$ **36.** $\frac{41}{90}$
37. \$750 **38.** \$46.50 **39.** \$3276.70 **40.** 10 935 galones

Capítulo 14 Examen (página 767)

1. -226 **2.** 48 **3.** $-5n + 2$ **4.** $5(2)^{1-n}$ **5.** $6n + 4$
6. $\frac{729}{8}$ o $91\frac{1}{8}$ **7.** 223 **8.** 60 términos **9.** 2380 **10.** 765
11. 7155 **12.** 6138 **13.** 22 650 **14.** 9384 **15.** 4075
16. -341 **17.** 6 **18.** $\frac{1}{3}$ **19.** $\frac{2}{11}$ **20.** $\frac{4}{15}$ **21.** 3 litros
22. \$1638.30 **23.** \$5810
24. y **25.** Prueba proporcionada por el instructor.

CAPÍTULO 15

Conjunto de problemas 15.1 (página 773)

1. 20 **3.** 24 **5.** 168 **7.** 48 **9.** 36 **11.** 6840 **13.** 720
15. 720 **17.** 36 **19.** 24 **21.** 243 **23.** Imposible
25. 216 **27.** 26 **29.** 36 **31.** 144 **33.** 1024 **35.** 30
37. **(a)** 6 084 000 **(c)** 3 066 336

Conjunto de problemas 15.2 (página 781)

1. 60 **3.** 360 **5.** 21 **7.** 252 **9.** 105 **11.** 1 **13.** 24
15. 84 **17.** **(a)** 336 **19.** 2880 **21.** 2450 **23.** 10
25. 10 **27.** 35 **29.** 1260 **31.** 2520 **33.** 15 **35.** 126
37. 144; 202 **39.** 15; 20 **41.** 20
43. 10; 15; 21; $\frac{n(n-1)}{2}$ **47.** 120 **53.** 133 784 560
55. 54 627 300

Conjunto de problemas 15.3 (página 788)

1. $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{3}{4}$ **5.** $\frac{1}{8}$ **7.** $\frac{7}{8}$ **9.** $\frac{1}{16}$ **11.** $\frac{3}{8}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **15.** $\frac{1}{2}$
17. $\frac{5}{36}$ **19.** $\frac{1}{6}$ **21.** $\frac{11}{36}$ **23.** $\frac{1}{4}$ **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{1}{25}$ **29.** $\frac{9}{25}$
31. $\frac{2}{5}$ **33.** $\frac{9}{10}$ **35.** $\frac{5}{14}$ **37.** $\frac{15}{28}$ **39.** $\frac{7}{15}$ **41.** $\frac{1}{15}$ **43.** $\frac{2}{3}$

45. $\frac{1}{5}$ **47.** $\frac{1}{63}$ **49.** $\frac{1}{2}$ **51.** $\frac{5}{11}$ **53.** $\frac{1}{6}$ **55.** $\frac{21}{128}$ **57.** $\frac{13}{16}$
59. $\frac{1}{21}$ **63.** 40 **65.** 3744 **67.** 10 200 **69.** 123 552
71. 1 302 540

Conjunto de problemas 15.4 (página 797)

1. $\frac{5}{36}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{1}{216}$ **7.** $\frac{53}{54}$ **9.** $\frac{1}{16}$ **11.** $\frac{15}{16}$ **13.** $\frac{1}{32}$
15. $\frac{31}{32}$ **17.** $\frac{5}{6}$ **19.** $\frac{12}{13}$ **21.** $\frac{7}{12}$ **23.** $\frac{37}{44}$ **25.** $\frac{2}{3}$ **27.** $\frac{2}{3}$
29. $\frac{5}{18}$ **31.** $\frac{1}{3}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{7}{12}$ **37.** **(a)** 0.410 **(c)** 0.955
39. 0.525 **41.** 60 **43.** 120 **45.** 9 **47.** 56
49. Es un juego justo. **51.** Sí **53.** $11 000 **55.** −$25
59. 1 a 7 **61.** 11 a 5 **63.** 1 a 8 **65.** 1 a 1 **67.** 4 a 3
69. 3 a 2 **71.** $\frac{2}{7}$ **73.** $\frac{7}{12}$

Conjunto de problemas 15.5 (página 806)

1. $\frac{1}{3}$ **3.** $\frac{2}{15}$ **5.** $\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{1}{6}$ **9.** $\frac{2}{3}; \frac{2}{7}$ **11.** $\frac{2}{3}; \frac{2}{5}$ **13.** $\frac{1}{5}; \frac{2}{7}$
15. Dependiente **17.** Independiente **19.** $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{1}{216}$
23. $\frac{1}{221}$ **25.** $\frac{13}{102}$ **27.** $\frac{1}{16}$ **29.** $\frac{1}{1352}$ **31.** $\frac{2}{49}$ **33.** $\frac{25}{81}$
35. $\frac{20}{81}$ **37.** $\frac{25}{169}$ **39.** $\frac{32}{169}$ **41.** $\frac{2}{3}$ **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** $\frac{5}{68}$
47. $\frac{15}{34}$ **49.** $\frac{1}{12}$ **51.** $\frac{1}{6}$ **53.** $\frac{1}{729}$ **55.** $\frac{5}{27}$ **57.** $\frac{4}{35}$
59. $\frac{8}{35}$ **61.** $\frac{4}{21}; \frac{2}{7}; \frac{11}{21}$

Conjunto de problemas 15.6 (página 813)

1. $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$
3. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$
5. $a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$
7. $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$
9. $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$
11. $x^{10} + 5x^8y + 10x^6y^2 + 10x^4y^3 + 5x^2y^4 + y^5$
13. $16x^8 - 32x^6y^2 + 24x^4y^4 - 8x^2y^6 + y^8$
15. $x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1215x^2 + 1458x + 729$
17. $x^9 - 9x^8 + 36x^7 - 84x^6 + 126x^5 - 126x^4 + 84x^3 - 36x^2 + 9x - 1$
19. $1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}$
21. $a^6 - \frac{6a^5}{n} + \frac{15a^4}{n^2} - \frac{20a^3}{n^3} + \frac{15a^2}{n^4} - \frac{6a}{n^5} + \frac{1}{n^6}$
23. $17 + 12\sqrt{2}$ **25.** $843 - 589\sqrt{2}$
27. $x^{12} + 12x^{11}y + 66x^{10}y^2 + 220x^9y^3$
29. $x^{20} - 20x^{19}y + 190x^{18}y^2 - 1140x^{17}y^3$
31. $x^{28} - 28x^{26}y^3 + 364x^{24}y^6 - 2912x^{22}y^9$
33. $a^9 + \frac{9a^8}{n} + \frac{36a^7}{n^2} + \frac{84a^6}{n^3}$
35. $x^{10} - 20x^9y + 180x^8y^2 - 960x^7y^3$ **37.** $56x^5y^3$
39. $126x^5y^4$ **41.** $189a^2b^5$ **43.** $120x^6y^{21}$ **45.** $\frac{5005}{n^6}$
51. $-117 + 44i$ **53.** $-597 - 122i$

Capítulo 15 Conjunto de problemas de repaso (página 816)

1. 720 **2.** 30 240 **3.** 150 **4.** 1440 **5.** 20 **6.** 525
7. 1287 **8.** 264 **9.** 74 **10.** 55 **11.** 40 **12.** 15
13. 60 **14.** 120 **15.** $\frac{3}{8}$ **16.** $\frac{5}{16}$ **17.** $\frac{5}{36}$ **18.** $\frac{13}{18}$ **19.** $\frac{3}{5}$
20. $\frac{1}{35}$ **21.** $\frac{57}{64}$ **22.** $\frac{1}{221}$ **23.** $\frac{1}{6}$ **24.** $\frac{4}{7}$ **25.** $\frac{4}{7}$
26. $\frac{10}{21}$ **27.** $\frac{140}{143}$ **28.** $\frac{105}{169}$ **29.** $\frac{1}{6}$ **30.** $\frac{28}{55}$ **31.** $\frac{5}{7}$
32. $\frac{1}{16}$ **33.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ **34.** **(a)** $\frac{9}{19}$ **(b)** $\frac{9}{10}$ **35.** **(a)** $\frac{2}{7}$
(b) $\frac{4}{9}$ **36.** $x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$
37. $x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$
38. $a^8 - 12a^6b^3 + 54a^4b^6 - 108a^2b^9 + 81b^{12}$
39. $x^6 + \frac{6x^5}{n} + \frac{15x^4}{n^2} + \frac{20x^3}{n^3} + \frac{15x^2}{n^4} + \frac{6x}{n^5} + \frac{1}{n^6}$
40. $41 - 29\sqrt{2}$ **41.** $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$
42. $-1760x^9y^3$ **43.** $57\,915a^4b^{18}$

Capítulo 15 Examen (página 818)

1. 12 **2.** 240 **3.** 216 **4.** 270 **5.** 26 **6.** 8640 **7.** 20
8. 144 **9.** 2520 **10.** 350 **11.** $\frac{13}{18}$ **12.** $\frac{5}{16}$ **13.** $\frac{5}{6}$
14. $\frac{1}{7}$ **15.** $\frac{23}{28}$ **16.** $\frac{3}{4}$ **17.** 25 **18.** $0.30 **19.** $\frac{168}{361}$
20. $\frac{2}{21}$ **21.** $\frac{5}{16}$
22. $64 - \frac{192}{n} + \frac{240}{n^2} - \frac{160}{n^3} + \frac{60}{n^4} - \frac{12}{n^5} + \frac{1}{n^6}$
23. $243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5$
24. $\frac{495}{256}x^4$ **25.** $2835x^3y^4$

APÉNDICE A

Ejercicios de práctica (página 828)

1. $2 \cdot 13$ **2.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **3.** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ **4.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ **5.** $7 \cdot 7$ **6.** $2 \cdot 2 \cdot 23$ **7.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ **8.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ **9.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ **10.** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ **11.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ **12.** $2 \cdot 7 \cdot 7$ **13.** 24 **14.** 24 **15.** 48 **16.** 36 **17.** 140 **18.** 462 **19.** 392 **20.** 72 **21.** 168 **22.** 60 **23.** 90 **24.** 168 **25.** $\frac{2}{3}$ **26.** $\frac{3}{4}$ **27.** $\frac{2}{3}$ **28.** $\frac{9}{16}$ **29.** $\frac{5}{3}$ **30.** $\frac{4}{3}$ **31.** $\frac{15}{28}$ **32.** $\frac{12}{55}$ **33.** $\frac{10}{21}$ **34.** $\frac{65}{66}$ **35.** $\frac{3}{10}$ **36.** $\frac{2}{3}$ **37.** $\frac{3}{8}$ tazas **38.** $\frac{1}{6}$ de la botella **39.** $\frac{2}{9}$ del espacio del disco **40.** $\frac{1}{3}$ **41.** $\frac{5}{7}$ **42.** $\frac{8}{11}$ **43.** $\frac{5}{9}$ **44.** $\frac{5}{13}$ **45.** 3 **46.** 2 **47.** $\frac{2}{3}$ **48.** $\frac{3}{8}$ **49.** $\frac{2}{3}$ **50.** $\frac{5}{9}$ **51.** $\frac{8}{15}$ **52.** $\frac{7}{24}$ **53.** $\frac{9}{16}$ **54.** $\frac{11}{12}$ **55.** $\frac{37}{30}$ **56.** $\frac{29}{24}$ **57.** $\frac{59}{96}$ **58.** $\frac{19}{24}$ **59.** $\frac{13}{12}$ **60.** $\frac{5}{16}$ **61.** $\frac{1}{4}$ **62.** $\frac{5}{3}$ **63.** $\frac{37}{30}$ **64.** $\frac{4}{5}$ **65.** $\frac{1}{3}$ **66.** $\frac{27}{35}$ **67.** $\frac{7}{26}$ **68.** 30 **69.** $\frac{7}{20}$ **70.** $\frac{11}{32}$

Índice

Símbolos

$=$	Es igual a
$\neq$	No es igual a
$\approx$	Es aproximadamente igual a
$>$	Es mayor que
$\geq$	Es mayor que o igual a
$<$	Es menor que
$\leq$	Es menor que o igual a
$a < x < b$	a es menor que x y x es menor que b
$.\overline{34}$	El decimal repetitivo .343434 . . .
MCD	Mínimo común denominador
$\{a, b\}$	El conjunto cuyos elementos son a y b
$\{x \mid x \geq 2\}$	El conjunto de toda x tal que x es mayor que o igual a 2
$\varnothing$	Conjunto nulo
$a \in B$	a es elemento del conjunto B
$a \notin B$	a no es elemento del conjunto B
$A \subseteq B$	El conjunto A es un subconjunto del conjunto B
$A \not\subseteq B$	El conjunto A no es un subconjunto del conjunto B
$A \cap B$	Intersección de conjuntos
$A \cup B$	Unión de conjuntos
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto de x
b^n	n-ésima potencia de b
$\sqrt[n]{a}$	Raíz n-ésima de a
$\sqrt{a}$	Raíz cuadrada de a
i	Unidad imaginaria
$a + bi$	Número complejo
$\pm$	Más o menos
(a, b)	Par ordenado: primer componente es a y segundo componente es b
$f, g, h,$ etc.	Nombres de funciones
$f(x)$	Valor funcional en x
$f \circ g$	Composición de funciones f y g
f^{-1}	Inverso de la función f
$\log_b x$	Logaritmo, a la base b, de x
$\ln x$	Logaritmo natural (base e)
$\log x$	Logaritmo común (base 10)
$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$	Matriz dos por tres
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	Determinante
a_n	n-ésimo término de una secuencia
S_n	Suma de n términos de una secuencia
$\sum_{i=1}^{n}$	Sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = n$
S_∞	Suma infinita
$n!$	n factorial
$P(n, n)$	Permutaciones de n cosas tomadas n a la vez
$P(n, r)$	Permutaciones de n cosas tomadas r a la vez
$C(n, r)$	Combinaciones de n cosas tomadas r a la vez o subconjuntos de r elementos tomados de un conjunto de n elementos
$P(E)$	Probabilidad de un evento E
$n(E)$	Número de elementos en el espacio evento E
$n(S)$	Número de elementos en el espacio muestral S
E'	Complemento del conjunto E
E_v	Valor esperado
$P(E \mid F)$	Probabilidad condicional de E dado F

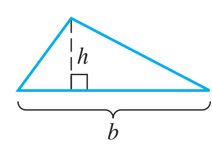
área A	**ancho** w	**base** b	**volumen** V
perímetro P	**área superficial** S	**circunferencia** C	**área de la base** B
longitud l	**altitud (altura)** h	**radio** r	**altura inclinada** s

Rectángulo

$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

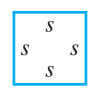
Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$



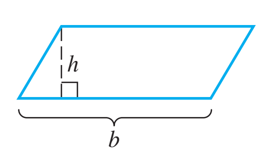
Cuadrado

$A = s^2 \qquad P = 4s$



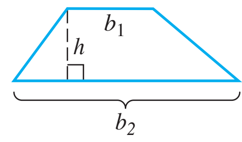
Paralelogramo

$A = bh$



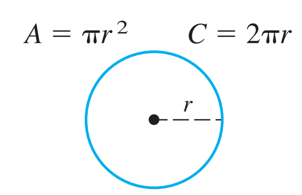
Trapezoide

$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

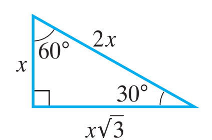


Círculo

$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

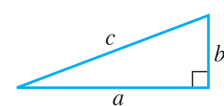


Triángulo rectángulo 30°-60°

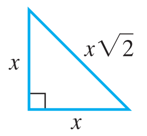


Triángulo rectángulo

$a^2 + b^2 = c^2$

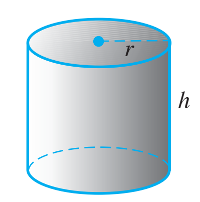


Triángulo recto isósceles



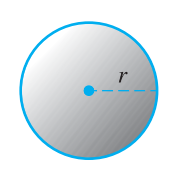
Cilindro circular recto

$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$



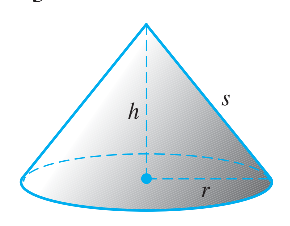
Esfera

$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$



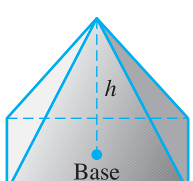
Cono circular recto

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r^2 + \pi rs$



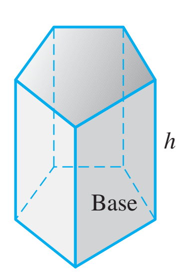
Pirámide

$V = \frac{1}{3}Bh$



Prisma

$V = Bh$



Propiedades del valor absoluto

$|a| \geq 0$

$|a| = |-a|$

$|a - b| = |b - a|$

$|a^2| = |a|^2 = a^2$

Notación de intervalo / Notación de conjunto

Notación de intervalo	Notación de conjunto
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$

Patrones de multiplicación

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Propiedades de logaritmos

$\log_b b = 1$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b rs = \log_b r + \log_b s$

$\log_b \left(\frac{r}{s}\right) = \log_b r - \log_b s$

$\log_b r^p = p(\log_b r)$

Propiedades de exponentes

$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ $\qquad \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

$(b^n)^m = b^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Patrones de factorización

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Ecuaciones que determinan funciones

Función lineal: $f(x) = ax + b$

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Función polinomial: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde n es un entero no negativo

Función racional: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde g y h son polinomios; $h(x) \neq 0$

Función exponencial: $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$

Función logarítmica: $f(x) = \log_b x$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$

Fórmulas

Fórmula cuadrática: Las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de distancia para espacio bidimensional:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendiente de una línea:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Punto medio de un segmento de línea:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Interés simple:

$$i = Prt \quad \text{y} \quad A = P + Prt$$

Interés compuesto:

$$A = P\left(i + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{y} \quad A = Pe^{rt}$$

n-ésimo término de una secuencia aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Suma de n términos de una secuencia aritmética:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

n-ésimo término de una secuencia geométrica:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma de n términos de una secuencia geométrica:

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$$

Suma de secuencia geométrica infinita:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Temperatura:

$$\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C} + 32 \quad \text{y} \quad \mathrm{C} = \frac{5}{9}(\mathrm{F} - 32)$$

Número de permutaciones de n cosas:

$$P(n, n) = n!$$

Número de permutaciones de r elementos tomados de un conjunto de n elementos:

$$P(n, r) = \underbrace{n(n - 1)(n - 2)}_{r \text{ factores}} \ldots$$

Número de combinaciones de r elementos tomados de un conjunto de n elementos:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

Álgebra, *Octava Edición*, abarca temas que por lo general se asocian con álgebra intermedia y álgebra universitaria. Este texto se puede usar en un curso de un semestre, pero contiene amplio material para una secuencia de dos semestres.

En este libro se presentan los conceptos básicos del álgebra en una forma simple y directa. Las ideas algebraicas se explican en una secuencia lógica y en una forma fácil de leer sin formalismo excesivo. Los conceptos se desarrollan a través de ejemplos, se refuerzan con ejemplos adicionales y luego se aplican a una variedad de situaciones para resolver problemas. Los ejemplos muestran a los estudiantes cómo usar los conceptos algebraicos para resolver problemas en un rango de situaciones, y en los conjuntos de problemas, para que razonen los estudiantes, se proporcionan otras situaciones. En los ejemplos se alienta a los estudiantes a organizar su trabajo y a decidir cuándo se puede usar un atajo significativo.

Características principales:

- PENSAR CON PALABRAS está incluido en cada conjunto de problemas, excepto los ejercicios de repaso. Estos problemas están diseñados para dar a los estudiantes la oportunidad para expresar por escrito sus pensamientos sobre diversas ideas matemáticas.
- INVESTIGACIONES ADICIONALES se incluyen en muchos de los conjuntos de problemas. Estos problemas ofrecen ejercicios más desafiantes al instructor y le dan flexibilidad para la incorporación de temas matemáticos avanzados dependiendo de las necesidades de curso específico.
- ENFOQUE CLARO DE TRES PASOS PARA RESOLVER PROBLEMAS. El enfoque directo de tres-pasos de Kaufmann/Schwitters para resolver problemas, es introducido y reforzado en todo el libro de texto. Los pasos son: adquirir habilidad algebraica; utilizar la habilidad para ayudar a resolver ecuaciones; aplicar la habilidad para resolver el problema de aplicación.
- EXÁMENES ACUMULATIVOS conjuntos de exámenes que se incluyen después de los capítulos 3, 5, 7 y 9. Éstos ayudan a que los estudiantes recuerden habilidades que se introdujeron anteriormente.
- CONJUNTOS DE PROBLEMAS. Están desarrollados sobre una base par-impar; todas las variaciones de ejercicios de desarrollo de habilidades están contenidas en los problemas numerados.
- VIÑETAS DE APERTURA DE CAPÍTULO. Establecen el concepto matemático clave en el contexto del mundo real.

http://latinoamerica.cengage

ISBN-13: 978-6075190334
ISBN-10: 6075190333

9 786075 190334